高等院校精品课教辅用书

高等院校经济数学教辅用书

上海财经大学应用数学系　编

微积分习题集

上海财经大学出版社

高等院校精品课教辅用书
高等院校经济数学教辅用书

微积分习题集

上海财经大学应用数学系　编

上海财经大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分习题集/上海财经大学应用数学系编．—上海：上海财经大学出版社，2008.4
高等院校精品课教辅用书
高等院校经济数学教辅用书
ISBN 978-7-5642-0185-2/F·0185

Ⅰ.微…　Ⅱ.上…　Ⅲ.微积分-高等学校-习题　Ⅳ.0172—44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 024911 号

责任编辑　刘光本
封面设计　周卫民

WEIJIFEN XITIJI
微积分习题集

上海财经大学应用数学系　编

上海财经大学出版社出版发行
(上海市武东路 321 号乙　邮编 200434)
网　址：http://www.sufep.com
电子邮箱：webmaster @ sufep.com
全国新华书店经销
同济大学印刷厂印刷
上海望新印刷厂装订
2008 年 4 月第 1 版　2008 年 4 月第 1 次印刷

787mm×960mm　1/32　17.5 印张　361 千字
印数 0 001—4 000　　定价：25.00 元

内容提要

本书根据高等教育面向21世纪发展的要求及财经类专业“经济数学基础”教学大纲的要求，并结合作者多年的教学实践编写而成。

全书共分八章：函数与极限，导数与微分，中值定理与导数的应用，不定积分，定积分及其应用，多元函数微积分，无穷级数，微分方程与差分方程。每章由内容提要、典型例题、自测试题和思考题组成，并附有参考答案与提示，供读者参考。

本书可作为财经类专业师生的教学参考用书，也可作为报考财经类专业硕士研究生的辅导用书。

前 言

我们根据高等教育面向21世纪发展的要求及财经类专业“经济数学基础”教学大纲的要求，结合作者多年的教学实践，编写了这本《微积分习题集》。

本书归纳了每章的内容，指出了每章的重点和难点，选编了典型例题并进行了解析，每章配有三份试卷与一组思考题，其中试题三与思考题有一定的难度和深度。学生在每学完一章后，可按规定时间(每份卷2小时)独立完成试卷，测试自己掌握知识的程度。

书末附有参考答案，对较难的题目有提示性的解答。

本书由上海财经大学应用数学系的教师编写。具体分工为：第一、二、三章由杨爱珍同志编写，第四、五章由卢慧芳同志编写，第六章由魏枫同志编写，第七、八章由罗万钧同志编写，最后由杨爱珍对全书进行了统稿。

在编写过程中，我们得到了上海财经大学数学系的重视和支持，上海财经大学出版社的刘光本博士为本书的出版付出了艰苦的劳动，他的认真编辑为本书增色不少，在此一并表示我们衷心的感谢。

尽管我们认真编撰、仔细审查，但毕竟我们的水平有限，错误难免，我们真诚希望广大读者多多指教。

编者

2008年3月

目录

第一章　函数与极限

1.1　内容提要

一、函数

1. 函数的定义

设 D 为一个非空实数集，若存在一个对应规则 f，使每一个 $x\in D$，都有一个确定的实数 y 与之对应，则称对应规则 f 为定义在 D 上的一个函数关系，或称变量 y 是变量 x 的函数，记作 $y=f(x)$，$x\in D$.

x 称为自变量，y 称为因变量；D 称为函数 f 的定义域，记作 D_f；y 的全体数值组成的集合称为函数 f 的值域，记作 Z_f.

2. 函数的两要素(定义域与对应规则)

(1)函数定义域的求法

所谓定义域，即使函数关系式在实数范围内有意义的 x 的变化范围.

①$y=\dfrac{1}{\varphi(x)}$，则 $\varphi(x)\neq 0$(分式函数，分母不等于零).

②$y=\sqrt[2n]{\varphi(x)}$，则 $\varphi(x)\geqslant 0$(偶次根式函数，被开方非负).

③$y=\log_a\varphi(x)$，则 $\varphi(x)>0$(对数函数，真数大于零).

④$y=\arcsin\varphi(x)$，$y=\arccos\varphi(x)$，则 $|\varphi(x)|\leqslant 1$.

⑤$y=\tan\varphi(x)$，则 $\varphi(x)\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k\in Z$.

⑥$y=\cot\varphi(x)$，则 $\varphi(x)\neq k\pi, k\in Z$.

⑦$y=f_1(x)\oplus f_2(x)$，则 $D_{f_1}\cap D_{f_2}$(多个函数，取交集).

⑧$y=\begin{cases} f_1(x), x\in D_1 \\ f_2(x), x\in D_2 \end{cases}$，则 $D_1\cup D_2$(分段函数，取并集).

⑨反函数的定义域为直接函数的值域.

(2)对应规则(求函数值)

①$f(x_0)=f(x)|_{x=x_0}$.

②求 $f(x)$，有变量代换法和配方法.

3. 函数的基本性质

(1)有界性

设函数 $f(x)$在区间 I 上有定义，若 $\exists M>0$，使得 $\forall x\in I$，恒有

$|f(x)|\leqslant M$,

则称 $f(x)$在 I 上有界；若不存在这样的 M，则称 $f(x)$在 I 上无界.

常见的有界函数有：

$|\sin x|\leqslant 1, |\cos x|\leqslant 1, x\in(-\infty,+\infty)$.

$|\arcsin x|\leqslant\frac{\pi}{2}, |\arccos x|\leqslant\pi, x\in[-1,1]$.

$|\arctan x|<\frac{\pi}{2}, |\mathrm{arccot}x|<\pi, x\in(-\infty,+\infty)$. $|\mathrm{arctna}x|<\frac{\pi}{2}, |\mathrm{arccot}x|<\pi$

$\left|\frac{x}{1+x^2}\right|\leqslant\frac{1}{2}, x\in(-\infty,+\infty)$.

(2)单调性

设函数 $f(x)$在区间 I 上有定义，若 $\forall$，$x_1,x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $\forall x_1,x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，

$$f(x_1)<f(x_2)(\text{或 } f(x_1)>f(x_2)),$$

则称 $f(x)$在 I 上单调增加(或单调减少).

注意：若 $f(x)$在定义域 D 上单调增加(或单调减少)，则称 $f(x)$为单调函数，否则称 $f(x)$为非单调函数.

若 $\forall x_1,x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2)(\text{或 } f(x_1)\geqslant f(x_2)),$$

则称 $f(x)$在 I 上单调不减(或单调不增).

(3)奇偶性

设函数 $f(x)$在关于原点对称的区间 I 上有定义，若 $\forall x\in I$，恒有

$$f(-x)=f(x)(\text{或 } f(-x)=-f(x)),$$

则称 $f(x)$ 为偶函数(或奇函数).

偶函数的图形关于 y 轴(即 $x=0$)对称. 常见的偶函数有 x^{2n}, $|x|$, $\cos x$, C, $\cdots$, $f(x)+f(-x)$, $\cdots$.

奇函数的图形关于原点对称. 常见的奇函数有 x^{2n+1}, $\sin x$, $\tan x$, $\cot x$, $\arcsin x$, $\cdots$, $f(x)-f(-x)$, $\ln(\sqrt{1+x^2}\pm x)$, $\cdots$.

奇±奇=奇;偶±偶=偶;奇×奇=偶;偶×偶=偶;奇×偶=奇.

(4)周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,若 $\exists$ 常数 $T>0$,使得 $\forall x\in D$,且 $x+T\in D$,恒有

$$f(x+T)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为周期函数,使上式成立的最小正数 T 称为函数 $f(x)$ 的周期.

常见周期函数的周期为:

$A\sin(\omega x+\theta)$, $A\cos(\omega x+\theta)$, 周期 $T=\dfrac{2\pi}{|\omega|}$;

$A\tan(\omega x+\theta)$, $A\cot(\omega x+\theta)$, 周期 $T=\dfrac{\pi}{|\omega|}$;

$|\sin x|$, $|\cos x|$, 周期 $T=\pi$.

4. 反函数

设函数 $y=f(x)$ 的值域为 Z_f,若 $\forall y\in Z_f$,从关系式 $y=f(x)$ 可确定一个 x 值,则变量 x 是变量 y 的函数,记为

$$x=\varphi(y).$$

$\varphi(y)$ 称为函数 $y=f(x)$ 的反函数,记作 $y=f^{-1}(x)$.

反函数的求法是:

$y=f(x)\xrightarrow{\text{解出}}x=\varphi(y)\xrightarrow{\text{改写}}y=\varphi(x)$.

注意:(1)直接函数 $y=f(x)$ 的图形与 $x=\varphi(y)$ 的图形重合;$y=f(x)$ 的图形与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于 $y=x$ 对称.

(2)一一对应函数必存在反函数,且反函数也一一对应.

(3)直接函数与反函数的定义域与值域互换.

5. 复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f,而函数 $u=\varphi(x)$ 值域为 Z_φ,若 $D_f\cap Z_\varphi\neq\Phi$,则称 $y=f[\varphi(x)]$ 为复合函数.

x 称为自变量,y 称为因变量,u 为中间变量.

6. 基本初等函数

(1)幂函数: $y=x^u$, u 为任意实数.

(2)指数函数：$y=a^x, a>0, a\neq 1$.

(3)对数函数：$y=\log_a x, a>0, a\neq 1$.

(4)三角函数：$y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$.

(5)反三角函数：$y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$.

7. 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算或有限次复合而成的用一个式子表示的函数，称为初等函数.

8. 分段函数

若一个函数在其定义域内，对应于不同的区间有不同的函数表达式，则该函数称为分段函数.

常见的分段函数有：

取整函数：y 为不超过 x 的最大整数，记为 $y=[x]$.

一般分段函数非初等函数.

9. 常见的经济函数

(1)成本函数 $C(x)$

成本是产量 x 的函数，它由固定成本 C_0 和变动成本 $C_1(x)$ 组成，即：

$$C(x)=C_0+C_1(x).$$

$\overline{C(x)}=\dfrac{C(x)}{x}$ 称为平均成本，即单位产品的成本.

(2)收益函数 $R(x)$

收益是销售量(即需求量)x 的函数，若产品单价为 p，则 $R(x)=px$，其中 p 可为常数，也可为 x 的函数.

$\overline{R(x)}=\dfrac{R(x)}{x}$ 称为平均价格，即单位产品的收益.

(3)利润函数 $L(x)$

在产销平衡条件下，$L(x)=R(x)-C(x)$，其中 x 是产量＝销量＝需求量.

所谓“盈亏平衡点”，即收益与成本相等时的产量，即 $L(x)=R(x)-C(x)=0$ 时的 x.

(4)需求函数 $Q(p)$

在不考虑其他因素影响的前提下，需求量 Q 是价格 p 的函数，称为需求函数，记为 $Q=f(p)$，一般需求函数是价格的减函数.

(5)供给函数 $Q(p)$

在不考虑其他因素影响的前提下，供给量 Q 是价格 p 的函数，称为供给函数，记为 $Q=g(p)$，一般供给函数是价格的增函数.

二、极限

1. 数列的极限

(1)定义

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A.\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists$正整数 N，当 $n>N$ 时，恒有 $|a_n-A|<\varepsilon$.

(2)性质

①唯一性：若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=B$，则 $A=B$.

②有界性：若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，则$\{a_n\}$有界.

③单调有界准则：单调增且有上界或单调减且有下界的数列必有极限.

④夹逼准则：设有三个数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$，若 $a_n\leqslant b_n\leqslant c_n$，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=A$，则$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=A$.

(3)重要极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$.

2. 函数的极限

(1)定义

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A.\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists$正实数 M，当 $|x|>M$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A.\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

(2)左右极限

左极限：$f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A.\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<x_0-x<\delta$(即 $x_0-\delta<x<x_0$)时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

右极限：$f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A.\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<x-x_0<\delta$(即 $x_0<x<x_0+\delta$)时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

(3)性质(下面以 $x\to x_0$ 表示 $x\to x_0$ 或 $x\to\infty$)

①唯一性：若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=B$，则 $A=B$.

②局部有界性：若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则$\exists x_0$ 的 δ 邻域$U_0(x_0,\delta)$，$f(x)$在$U_0(x_0,\delta)$内有界.

③保号性：若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>0$(或 $A<0$)，则 $\exists U_0(x_0,\delta)$，在 $U_0(x_0,\delta)$ 内 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$).

④保号性推论：若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且 $f(x)\geqslant0$(或 $f(x)\leqslant0$)，则 $A\geqslant0$(或 $A\leqslant0$).

⑤夹逼准则：若在 $U_0(x_0,\delta)$ 内，有 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$，

$\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$,则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

⑥运算法则:

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A,\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$,则:

(i) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\pm B$.

(ii) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\cdot B$.

特别地,$\lim\limits_{x\to x_0}[c\cdot f(x)]=c\cdot\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=cA$.

$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^n=[\lim\limits_{x\to x_0}f(x)]^n=A^n$,$n$为自然数.

(iii) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=\dfrac{A}{B},B\neq0$.

(4)定理

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A.\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$.

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A.\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

(5)重要极限

①$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

特点:(i) $\dfrac{0}{0}$型未定式.

(ii) $\dfrac{\sin\Delta}{\Delta},\Delta\to0$.

②$\lim\limits_{x\to\Delta}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

特点:(i) 1^∞型未定式.

(ii) $(1+\Delta)^{\frac{1}{\Delta}},\Delta\to0$.

3. 无穷小量与无穷大量

(1)无穷小量

① 定义:

以零为极限的变量,称为无穷小量.

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0.\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,当$0<|x-x_0|<\delta$时,恒有$|f(x)|<\varepsilon$.

②性质

(i)有限个无穷小量的和、差、积仍为无穷小量.

(ii)有界函数与无穷小量的乘积仍为无穷小量.

(iii) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A.\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha,\lim\limits_{x\to x_0}\alpha=0.$

③比较

设$\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0$，

(i)若$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$，则称当 $x\to x_0$ 时，$\alpha(x)$是$\beta(x)$的高阶无穷小量，记为$\alpha(x)=o(\beta(x))$.

(ii)若$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c, c\neq 0,1$，则称当 $x\to x_0$ 时，$\alpha(x)$与$\beta(x)$是同阶无穷小量，记为$\alpha(x)=O(\beta(x))$.

(iii)若$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$，则称当 $x\to x_0$ 时，$\alpha(x)$与$\beta(x)$是等价无穷小量，记为$\alpha(x)\sim\beta(x)$.

(iv)若$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$，则称当 $x\to x_0$ 时，$\alpha(x)$是$\beta(x)$的低阶无穷小量.

④等价替换

若当 $x\to x_0$ 时，$\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$，$\beta(x)\sim\beta_1(x)$，且$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$存在，则$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$.

常用的等价形式有：

当 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x$，$\arcsin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$\arctan x\sim x$，$\ln(1+x)\sim x$，$e^x-1\sim x$，$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$，$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$.

当 $f(x)\to 0$ 时，$\sin f(x)\sim f(x)$，$\arcsin f(x)\sim f(x)$，$\tan f(x)\sim f(x)$，$\arctan f(x)\sim f(x)$，$\ln(1+f(x))\sim f(x)$，$e^{f(x)}-1\sim f(x)$，$1-\cos f(x)\sim\dfrac{f^2(x)}{2}$，$(1+f(x))^\alpha-1\sim\alpha f(x)$.

(2)无穷大量

当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$的绝对值无限增大.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty.\Leftrightarrow\forall M>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有$|f(x)|>M$.

(3)无穷大量与无穷小量的关系

当 $x\to x_0$ 时，若 $f(x)$为无穷大量，则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷小量；

若 $f(x)$为无穷小量，且 $f(x)\neq 0$，则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷大量.

4.极限的计算

(1)代入法——利用极限的四则运算法则.

(2)消去“零因子”法——通过因式分解.

(3)消去“∞因子”法——通过分子、分母同除最高阶无穷大.

(4)有理化法——分子或分母有理化去掉平方根.

(5)利用两个重要极限.

(6)利用无穷小量性质.

(7)利用等价无穷小量替换.

(8)利用变量代换.

(9)利用左、右极限——求分段函数分界点处的极限.

(10)利用洛必达法则.(第三章学习)

(11)利用导数定义.(第二章学习)

(12)利用定积分定义.(第五章学习)

(13)利用级数收敛的必要条件.(第七章学习)

5.极限的证明

(1)利用极限的分析定义.

(2)利用极限存在准则(夹逼准则,单调有界准则).

三、连续

1.函数连续性概念

(1)$f(x)$在点x_0处连续的几个等价定义

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$(用于判断点$x_0$处连续性).

$\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,当$|x-x_0|<\delta$时,恒有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$(用于证明点$x_0$处连续性).

$\Leftrightarrow\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$(用于验证区间$(a,b)$内连续性).

$\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$(用于判断分段函数分界点$x_0$处连续性).

(2)$f(x)$在区间连续的定义

(i)$f(x)$在内(a,b)内连续:若$f(x)$在(a,b)内每一点连续.

(ii)$f(x)$在$[a,b]$上连续:若$f(x)$在(a,b)内连续,且在$x=a$处右连续(即$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=f(a)$),在$x=b$处左连续(即$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=f(b)$),记为$f(x)\in C_{[a,b]}$.

2.间断点

(1)定义