普通高等教育“十一五”规划教材
PUTONG GAODENG JIAOYU SHIYIWU GUIHUA JIAOCAI

XINHAO YU XITONG FENXI

信号与系统分析

吴冰 主编

高岩 成凌飞 张炜 高娜 张丽 副主编

中国电力出版社
http://jc.cepp.com.cn

普通高等教育“十一五”规划教材
PUTONG GAODENG JIAOYU SHIYIWU GUIHUA JIAOCAI

XINHAO YU XITONG FENXI

信号与系统分析

主　编　吴　冰
副主编　高　岩　成凌飞　张　炜
　　　　高　娜　张　丽
编　写　李　辉　王泰华　王科平
　　　　王新良　张培玲　胡松华
主　审　王松林

中国电力出版社
http://jc.cepp.com.cn

内 容 提 要

本书为普通高等教育“十一五”规划教材。

全书共分九章，主要内容包括信号与系统的基本概念、连续系统的时域分析、连续系统的频率分析、连续系统的复频域分析、离散系统的 z 域分析、系统函数与频率响应特性和状态变量分析法。

本书可作为普通高等学校电气信息类、仪器仪表类及相关专业的教材，也可作为高职高专和函授教材，也可作为工程技术人员的参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

信号与系统分析/吴冰主编．—北京：中国电力出版社，2008

普通高等教育“十一五”规划教材

ISBN 978-7-5083-6316-5

Ⅰ．信… Ⅱ．吴… Ⅲ．①信号分析—高等学校—教材 ②信号系统—系统分析—高等学校—教材 Ⅳ．TN911.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 015487 号

中国电力出版社出版、发行

（北京三里河路 6 号　100044　http：//jc.cepp.com.cn）

北京市同江印刷厂印刷

各地新华书店经售

*

2008 年 3 月第一版　　2008 年 3 月北京第一次印刷

787 毫米×1092 毫米　16 开本　21 印张　511 千字

定价 31.60 元

前　言

为贯彻落实教育部《关于进一步加强高等学校本科教学工作的若干意见》和《教育部关于以就业为导向深化高等职业教育改革的若干意见》的精神，加强教材建设，确保教材质量，中国电力教育协会组织制订了普通高等教育"十一五"教材规划。该规划强调适应不同层次、不同类型院校，满足学科发展和人才培养的需求，坚持专业基础课教材与教学急需的专业教材并重、新编与修订相结合。本书为新编教材。

当今信息科学技术日新月异，以通信技术为代表的电子信息类专业知识更新尤为迅猛。培养具有国际竞争能力的高水平的信息技术人才，促进我国信息产业发展和国家信息化水平的提高，对电子信息类专业创新人才的培养、课程体系的改革、课程内容的更新提出了富有时代特色的要求。近年来，国家电工电子教学基地对电子信息类专业的技术基础课程群进行了改革与实践，探索了各课程的认知规律，确定了科学的教育思想，理顺了课程体系，更新了课程内容，融合了现代教学方法，取得了良好的效果。

随着科学技术的发展，学科互相渗透，信号与系统不仅是电子信息技术各专业的基础，而且成为自动控制、计算机、机电各专业共同需要的一门基础性课程，只是在深度和侧重点上有所不同。为此，本书全面而系统地论述了信号与系统分析的基本理论和方法。全书共分九章，每章都配有较多的精选的例题和类型各异的习题。本书最大的特点是将连续时间和离散时间信号与系统置于完全同等的重要地位，在教材体系上采取连续与离散并行的方法。这种处理有利于学生从连续与离散的对比中加深理解和掌握两种信号与系统分析的基本理论和方法。

另外本书的内容是任何从事信号处理工作所必备的基础理论知识，并且直接跟数字信号处理的基本理论和方法相衔接。因此，对于电气信息类专业来说，经过适当的取舍，作为基本教材或主要参考书也是合适的。

本书是河南理工大学信息工程系教师，具有10余年教学经验编的教师编写而成。书中，第一章的第一节至第五节由张培玲编写，第六节至第八节由张丽编写；第二章的第一节和第二节由王泰华编写，第二章的第三节由胡松华编写，第二章第四节由王新良编写；第三章第一节至第五节由河南理工大学高岩编写，第六节至第八节由张丽编写；第四章由高娜编写；第五章由成凌飞编写；第六章由王科平编写；第七章由吴冰编写；第八章第一节至第八节由李辉编写，第八章习题由高娜编写；第九章由张炜编写，本书由吴冰博士担任主编。

西安电子科技大学的王松林教授对书稿进行了全面细致的审阅，提出了许多宝贵的修改意见和建议，在此表示衷心的感谢。

在本书的编写过程中，得到了中国电力出版社编辑们、河南理工大学电气工程与自动化学院领导、教务处领导和相关专业教师的关注和支持，在此对他们表示衷心的感谢。由于编者水平有限，书中一定存在不少疏漏和不足，恳请批评指正。

编　者

2007年12月于河南理工大学

目录

第一章　信号与系统的基本概念

引言

随着近代科学技术的发展，特别是大规模集成电路的出现以及数字计算机的广泛应用，以信息技术为核心的高新技术正在迅速发展，使得信号与系统日益复杂，从而也促进了信号与系统理论研究的发展。信号与系统的理论涉及范围广泛，内容十分丰富。信号理论包括信号分析、信号处理和信号综合；在系统理论的研究中包括系统分析与系统综合两个方面。系统分析与信号分析被看成是一个整体。从信号传输的观点来看，信号通过系统后，由于系统的职能而使信号的时间特性及频率特性发生变化，从而产生新的信号。从系统响应的观点来看，系统在信号的激励下，将必然做出相应的反应，从而完成系统的职能。系统的主要任务是对信号进行传输与处理，分析系统的功能和特性必然首先涉及对信号的分析。信号分析与系统分析关系密切又各有侧重。信号分析侧重于讨论信号的表示、性质、特征；而系统分析则着眼于系统的特征、功能。系统分析的任务就是在给定系统的条件下，研究系统对于输入激励所产生的输出响应。系统综合则是在给定输入的条件下，为了获得预期的输出去设计（综合）系统的构成。本书仅限于讨论信号与系统的分析。

本章讨论有关信号与系统的定义、分类方法和基本特性；着重介绍信号的函数表示与波形表示；介绍系统的模型及系统的模拟；最后简单概括线性时不变系统的各种分析方法，以便为读者阅读全书打下基础。

第一节　信号的基本概念及分类

一、信号的基本概念

人类的社会活动离不开传递消息。从公元前 700 余年，我们的祖先利用烽火传递警报，到现代利用电报、电话、无线电广播与电视，以及日前迅速发展的以因特网（Internet 或称国际互联网）为代表的信息网络技术等进行通信，其目的都是要把某些消息借助一定形式的信号传送出去，给对方以信息。

那么，什么是信号（signal）？广义地说，信号是随时间变化的某种物理量。在通信技术中，一般将语言、文字、图像或数据等统称为消息（message），在消息中包含有一定数量的信息（information）。但是，信息一般都不是直接传送的，它必须借助于一定形式的信号如光信号、声信号、电信号等，才能远距离快速传输和进行各种处理。因而，信号是消息的表现形式，它是通信传输的客观对象，而消息则是信号的具体内容，它蕴藏在信号之中。本书将只讨论应用广泛的电信号，它通常是随时间变化的电压或电流，在某些情况下，也可以是电荷或磁通。由于信号是随时间而变化的，在数学上可以用时间 t 的函数 $f(t)$ 来表示，因此，“信号”与“函数”两个名词常常通用。

信号的特性可以从两个方面来描述，即时间特性和频率特性。信号可以写成数学表达

式，即时间 t 的函数，它具有一定的波形，因而表现出一定波形的时间特性，如出现时间的先后、持续时间的长短、重复周期的大小及随时间变化的快慢等。另一方面，通常遇到的信号在一定条件下总可以分解为许多不同频率的正弦分量，即具有一定的频率成分，因而表现为一定波形的频率特性，如含有大小不同的频率分量、主要频率分量占有不同的范围等。

信号的形式之所以不同，就是因为它们各自有不同的时间特性和频率特性，而信号的时间特性和频率特性有着对应的关系，不同的时间特性将导致不同的频率特性的出现。

二、信号的分类

对于各种信号，可以从不同的角度进行分类。

1. 确定信号和随机信号

按时间函数的确定性划分，信号可分为确定信号和随机信号两类。

确定信号（determinate signal）是指一个可以表示为确定的时间函数的信号。对于指定的某一时刻，信号有确定的值。如我们熟知的正弦信号、周期脉冲信号等。随机信号（random signal）则与之不同，它不是一个确定的时间函数，通常只知道它取某一数值的概率，如噪声信号等。

实际传输的信号几乎都具有不可预知的不确定性，因而都是随机信号。如通信系统中传输的信号带有不确定性，接收者在收到所传送的消息之前，对信息源所发出的消息是不知道的，否则，接收者就不可能由它得知任何新的消息，也就失去通信的意义。另外，信号在传输过程中难免要受到各种干扰和噪声的影响，使信号产生失真。所以，一般的通信信号都是随机信号。但是，在一定条件下，随机信号也表现出某些确定性，通常把在较长时间内比较确定的随机信号，近似地看成确定信号，使分析简化，便于工程上的应用。本课程只讨论确定信号的分析，它也是研究随机信号特性的重要基础，而对随机信号的分析是后续课程的任务。

2. 连续信号和离散信号

按照函数时间取值的连续性划分，确定信号可分为连续时间信号和离散时间信号，简称连续信号和离散信号。

连续信号（continuous signal）是指在所讨论的时间内，对任意时刻值除若干个不连续点外都有定义的信号，通常用 $f(t)$ 表示，如图 1-1 所示。

离散信号（discrete signal）是指只在某些不连续规定的时刻有定义，而在其他时刻没有定义的信号。通常用 $f(t_k)$ 或 $f(kt)$［简写为 $f(k)$］表示，如图 1-2 所示。图中信号 $f(t_k)$ 只在 t_k（$k=\cdots$，-2，-1，0，1，2，3，$\cdots$）等离散时刻才给出函数值。

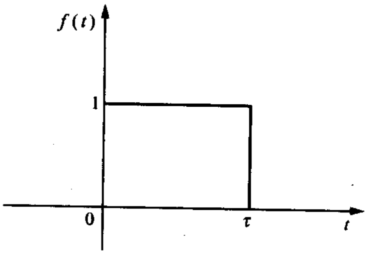

图 1-1 连续信号

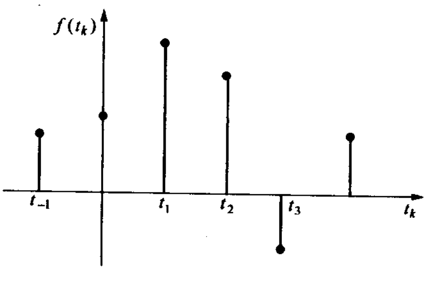

图 1-2 离散信号

3. 周期信号和非周期信号

按信号（函数）的周期性划分，确定信号又可以分为周期信号和非周期信号。

周期信号（Periodic signal）是指一个每隔一定时间，周而复始且无始无终的信号，它们的表达式可写为

$$f(t)=f(t+nT),n=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

满足此关系式的最小 T 值称为信号的周期。只要给出此信号在任一周期内的变化过程，便可确知它在任一时刻的数值。非周期信号（aperiodic signal）在时间上不具有周而复始的特性。非周期信号也可以看作为一个周期 T 趋于无穷大时的周期信号。

4. 能量信号与功率信号

信号按时间函数的可积性划分，可以分为能量信号、功率信号和非功非能信号。

信号可看作是随时间变化的电压或电流，信号 $f(t)$ 在 1Ω 的电阻上的瞬时功率为 $|f(t)|^2$，在时间区间 $(-\infty,\infty)$ 所消耗的总能量 E 和功率 P 定义为

$$E=\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}|f(t)|^2\mathrm{d}t \tag{1-1}$$

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(t)|^2\mathrm{d}t \tag{1-2}$$

式（1-1）和式（1-2）中，被积函数都是 $f(t)$ 的绝对值平方，所以信号能量 E 和信号功率 P 都是非负实数。

若信号 $f(t)$ 的能量 $0<E<\infty$，此时 $P=0$，则称此信号为能量有限信号，简称能量信号（energy signal）。

若信号 $f(t)$ 的功率 $0<P<\infty$，此时 $E=\infty$，则称此信号为功率有限信号，简称功率信号（power signal）。

信号 $f(t)$ 还可以是一个既非功率信号，又非能量信号，如单位斜坡信号。但一个信号不可能同时即是功率信号，又是能量信号。

一般说来周期信号都是功率信号，非周期信号或者是能量信号，或者是功率信号，或者即非能量信号又非功率信号。属于能量信号的非周期信号称为脉冲信号，它在有限时间范围内有一定的数值；而当 $t\to\infty$ 时，数值为 0，如图 1-3 所示。属于功率信号的非周期信号是 $|t|\to\infty$ 时仍然为有限值的一类信号，如图 1-4 所示。

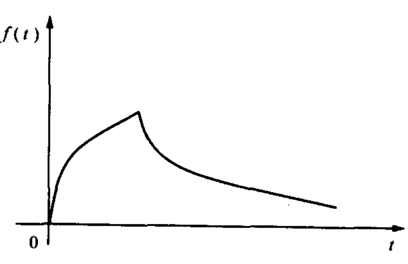

图 1-3 非周期能量信号

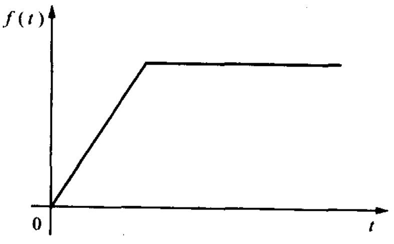

图 1-4 非周期功率信号

【例 1-1】 判断图 1-5 所示信号是否为能量信号或功率信号。

解 图 1-5 (a) 所示的信号 $f_1(t)=\mathrm{e}^{-2|t|}$

$$E=\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}(\mathrm{e}^{-2|t|})^2\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{4t}\mathrm{d}t+\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-4t}\mathrm{d}t=2\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-4t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}$$

$$P = 0$$

所以该信号为能量信号。

对于图 1 - 5 (b) 所示的信号 $f_2(t) = e^{-2t}$，则有

$$E = \lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}(e^{-2t})^2 dt = \lim_{T\to\infty} -\frac{1}{4}[e^{-4T} - e^{4T}] = \infty$$

$$P = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}E$$

利用洛必达法则可求得

$$P = \lim_{T\to\infty}\frac{e^{4T} - e^{-4T}}{8T} = \lim_{T\to\infty}\frac{e^{4T}}{8T} = \lim_{T\to\infty}\frac{4e^{4T}}{8} = \infty$$

故 $f_2(t)$ 即非能量信号又非功率信号。

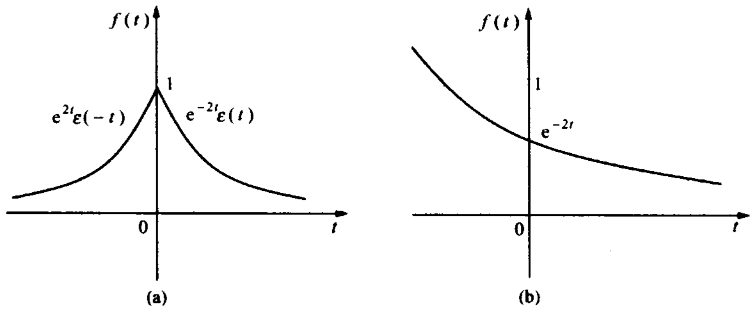

图 1 - 5 [例 1 - 1] 图

第二节 基本连续时间信号

一、单位阶跃函数

单位阶跃函数 $\varepsilon(t)$ 可以定义为

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \tag{1-3}$$

其波形如图 1 - 6 (a) 所示。注意，在 $t=0$ 时刻，单位阶跃函数是不连续的，在 $t=0$ 时刻其值不存在。同样道理，平移的单位阶跃函数 $\varepsilon(t - t_0)$ 可以定义为

$$\varepsilon(t - t_0) = \begin{cases} 1 & t > t_0 \\ 0 & t < t_0 \end{cases} \tag{1-4}$$

其波形如图 1 - 6 (b) 所示。

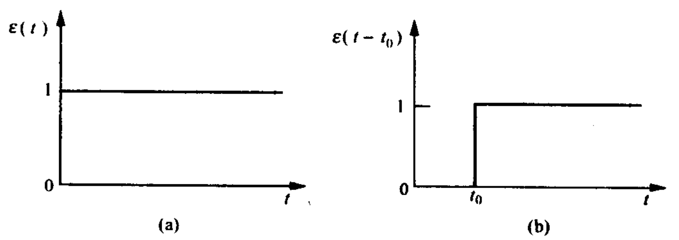

图 1 - 6 阶跃函数

(a) 单位阶跃函数；(b) 平移后的单位阶跃函数

二、单位冲激函数

单位冲激函数 $\delta(t)$，又称为狄拉克函数（δ 函数），在系统分析中极其重要。一般把 $\delta(t)$ 定义为适当选定的普通函数的极限，该函数在无限小时间间隔内具有单位面积，如图 1-7 所示。它具有以下特性：

$$\delta(t)=\begin{cases}0 & t\neq 0\\ \infty & t=0\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=1$$

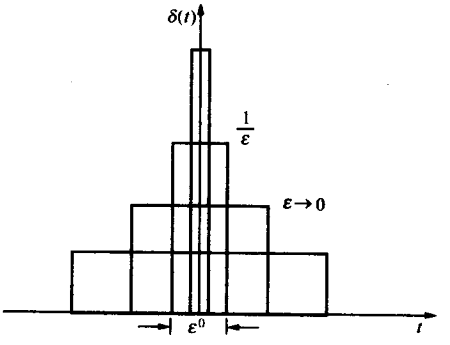

图 1-7　单位冲激函数 $\delta(t)$

$\delta(t)$ 不是普通函数，其数学上的定义为

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\delta(t)\mathrm{d}t=\varphi(0) \tag{1-5}$$

式中，$\varphi(t)$ 是一个在 $t=0$ 时刻连续的普通函数。

$\delta(t)$ 的另一种定义为

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\delta(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}\varphi(0) & a<t<b\\ 0 & a<b<t\text{ 或 }t<a<b\\ \text{未定义} & a=t\text{ 或 }b=t\end{cases} \tag{1-6}$$

注意，式（1-5）和式（1-6）是一种象征性的表达式，不应看作是普通的黎曼（Riemann）积分。在这种情况下，时常把 $\delta(t)$ 称作广义函数，$\varphi(t)$ 称作测试函数。不同类型的测试函数可以定义不同的广义函数。同样，延迟后的 δ 函数 $\delta(t-t_0)$ 可以定义为

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t=\varphi(t_0) \tag{1-7}$$

式中，$\varphi(t)$ 是一个在 $t=t_0$ 时刻连续的普通函数；$\delta(t)$ 和 $\delta(t-t_0)$ 的波形分别如图 1-8（a）、（b）所示。

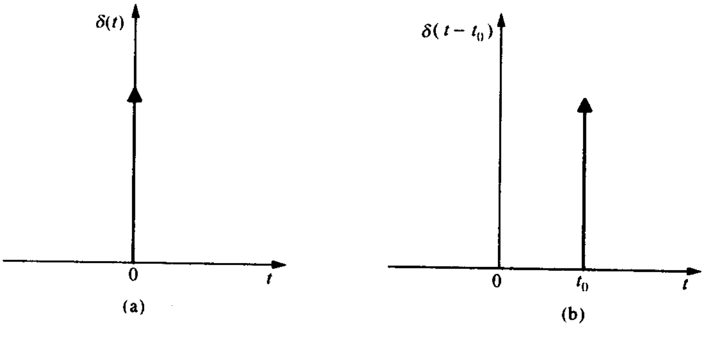

图 1-8　冲激函数

（a）单位冲激函数；（b）平移后的单位冲激函数

$\delta(t)$ 的其他特性如下：

如果 $f(t)$ 在 $t=0$ 时刻连续，则

$$\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t) \tag{1-8}$$

$$\delta(-t)=\delta(t) \tag{1-9}$$

$$f(t)\delta(t) = x(0)\delta(t) \tag{1-10}$$

如果 $f(t)$ 在 $t=t_0$ 时刻连续，则

$$f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0) \tag{1-11}$$

利用式（1-7）和式（1-9），可以将任意一个连续时间信号 $f(t)$ 表示为

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1-12}$$

广义导数：如果 $g(t)$ 是一个广义函数，其 n 阶广义导数 $g^{(n)}(t) = \mathrm{d}^n g(t)/\mathrm{d}t^n$ 可以由以下关系来定义，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) g^{(n)}(t)\mathrm{d}t = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{(n)}(t) g(t)\mathrm{d}t \tag{1-13}$$

式中，$\varphi(t)$ 是测试函数，可以微分任意多次，在某个固定间隔外消失；$\varphi^{(n)}(t)$ 是 $\varphi(t)$ 的 n 阶导数。

由式（1-13）和式（1-5），$\delta(t)$ 的导数可以定义为

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\delta'(t)\mathrm{d}t = -\varphi'(0) \tag{1-14}$$

式中，$\varphi(t)$ 是测试函数，在 $t=0$ 时刻连续，在某个固定间隔外消失，且 $\varphi'(0) = \mathrm{d}\varphi(t)/\mathrm{d}t\,|_{t=0}$。

由式（1-13）可知，$\varepsilon(t)$ 的导数就是 $\delta(t)$，即

$$\delta(t) = \varepsilon'(t) = \frac{\mathrm{d}\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t} \tag{1-15}$$

则单位阶跃函数可以表示为

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1-16}$$

注意，单位阶跃函数 $\varepsilon(t)$ 在 $t=0$ 时刻不连续。因此，式（1-15）所示的 $\varepsilon(t)$ 的导数不是一般情况下函数的导数，可以认为是广义函数情况下的广义导数。由式（1-16）可以看出，在 $t=0$ 时刻，$\varepsilon(t)$ 不存在，且由 $\varphi(t)=1$ 时的式（1-6）得

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

结果与 $\varepsilon(t)$ 的定义式（1-3）一致。

三、复指数信号

复指数信号

$$f(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t} \tag{1-17}$$

是一种重要的复数信号。根据欧拉（Euler）公式，复指数信号可以定义为

$$f(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t} = \cos\omega_0 t + \mathrm{j}\sin\omega_0 t \tag{1-18}$$

即 $f(t)$ 是一个复数信号，其实部为 $\cos\omega_0 t$，虚部为 $\sin\omega_0 t$。式（1-17）中的复指数信号 $f(t)$ 有一个重要的特性，就是其周期性。$f(t)$ 的基本周期 T_0 为

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \tag{1-19}$$

注意，对于任意的 ω_0，$f(t)$ 均为周期函数。

1. 一般复指数信号

设 $s=\sigma+\mathrm{j}\omega$ 是一个复数，则 $f(t)$ 可以定义为

$$f(t) = \mathrm{e}^{st} = \mathrm{e}^{(\sigma+\mathrm{j}\omega)t} = \mathrm{e}^{\sigma t}(\cos\omega t + \mathrm{j}\sin\omega t) \tag{1-20}$$

式中，信号 $f(t)$ 称作一般复指数信号，其实部 $e^{\sigma t}\cos\omega t$ 和虚部 $e^{\sigma t}\sin\omega t$ 都是按指数增长（$\sigma>0$）或减小（$\sigma<0$）的正弦信号，其波形分别如图 1-9（a）、（b）所示。

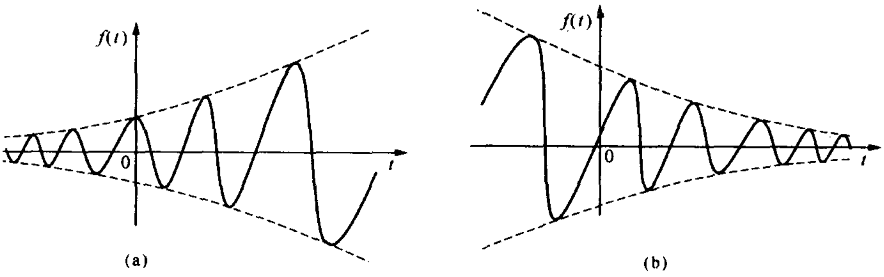

图 1-9　两种不同正弦信号

（a）指数增长的正弦信号；（b）指数减小的正弦信号

2. 实指数信号

如果 $s=\sigma$（实数），则式（1-20）简化为一个实指数信号

$$f(t) = e^{\sigma t} \tag{1-21}$$

如果 $\sigma>0$，$f(t)$ 是一个增长的指数信号；如果 $\sigma<0$，$f(t)$ 是一个减小的指数信号，其波形分别如图 1-10（a）、（b）所示。

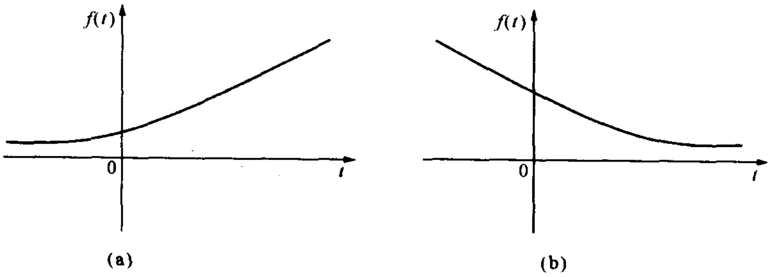

图 1-10　连续时间实指数信号

（a）$\sigma>0$；（b）$\sigma<0$

四、正弦信号

一个连续时间的正弦信号可以表示为

$$f(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta) \tag{1-22}$$

式中，A 是幅度（实数）；ω_0 是角频率，为每秒钟扫过的弧度；θ 是以弧度表示的相角。

图 1-11 所示的正弦信号 $f(t)$ 是一个周期信号，其基本周期为

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \tag{1-23}$$

基本周期 T_0 的倒数称为基本频率 f_0，单位为 Hz（赫兹）：

$$f_0 = \frac{1}{T_0} \tag{1-24}$$

由式（1-23）和式（1-24）得

$$\omega_0 = 2\pi f_0 \tag{1-25}$$

式中：ω_0 称为基本角频率。

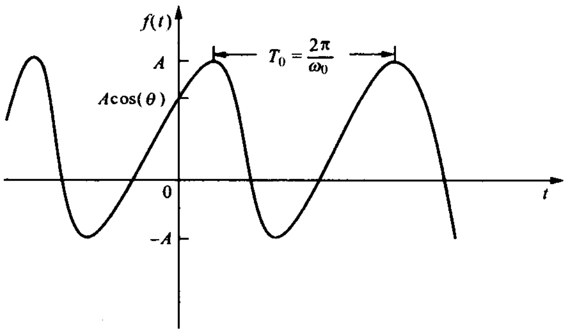

图 1-11 连续时间正弦信号

利用 Euler 公式，式（1-22）中的正弦信号可以表示为

$$A\cos(\omega_0 t+\theta)=A\mathrm{Re}\{e^{j(\omega_0 t+\theta)}\} \tag{1-26}$$

其中，Re 表示实数部分。

用 Im 表示虚数部分，则

$$A\mathrm{Im}\{e^{j(\omega_0 t+\theta)}\}=A\sin(\omega_0 t+\theta) \tag{1-27}$$

第三节 基本离散时间信号

一、单位阶跃序列

单位阶跃序列 $\varepsilon[k]$ 可以定义为

$$\varepsilon[k]=\begin{cases}1 & k\geqslant 0\\ 0 & k<0\end{cases} \tag{1-28}$$

其波形如图 1-12（a）所示。注意，在 $k=0$ 时刻，$\varepsilon[k]$ 有定义（与连续时间阶跃函数在 $t=0$ 时刻无定义不同），且等于单位值 1。同样道理，平移后的单位阶跃序列 $\varepsilon[k-n]$ 可以定义为

$$\varepsilon[k-n]=\begin{cases}1 & k\geqslant n\\ 0 & k<n\end{cases} \tag{1-29}$$

其波形如图 1-12（b）所示。

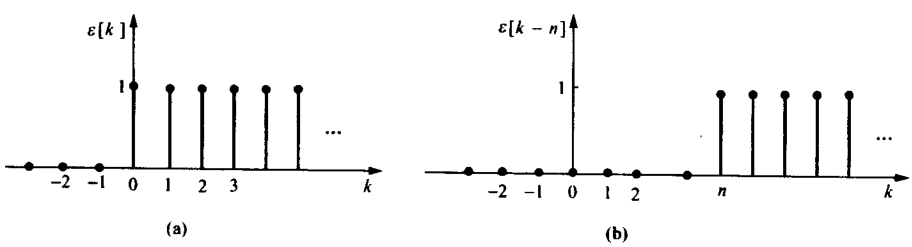

图 1-12 阶跃序列

（a）单位阶跃序列；（b）平移后的单位阶跃序列

二、单位冲激序列

单位冲激（或单位取样）序列 $\delta[k]$ 可以定义为

$$\delta[k]=\begin{cases}1 & k=0\\ 0 & k\neq 0\end{cases} \tag{1-30}$$

如图 1-13（a）所示。同样道理，平移后的单位冲激（或单位取样）序列 $\delta[k-n]$ 可以定义为

$$\delta[k-n]=\begin{cases}1 & k=n\\ 0 & k\neq n\end{cases} \tag{1-31}$$

如图 1-13（b）所示。

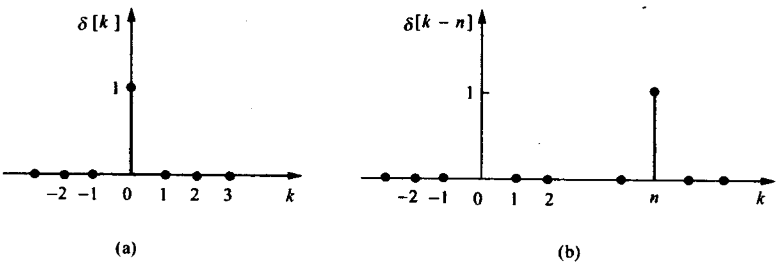

图 1-13　单位冲激序列

（a）单位冲激（取样）序列；（b）平移后的单位冲激序列

与连续时间单位冲激函数 $\delta(t)$ 不同，$\delta[k]$ 的定义在数学上并不复杂或困难。由式（1-30）和式（1-31）可以看出

$$f[k]\delta[k]=f[0]\delta[k] \tag{1-32}$$

$$f[k]\delta[k-n]=f[n]\delta[k-n] \tag{1-33}$$

这分别是式（1-10）和式（1-11）的离散时间对应式。由式（1-28）～式（1-31）可知，$\delta[k]$ 和 $\varepsilon[k]$ 的相互关系为

$$\delta[k]=\varepsilon[k]-\varepsilon[k-1] \tag{1-34}$$

$$\varepsilon[k]=\sum_{n=-\infty}^{k}\delta[n] \tag{1-35}$$

这分别是式（1-15）和式（1-16）的离散时间对应式。

利用式（1-31），任意一个序列 $f[k]$ 可以表示为

$$f[k]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f[n]\delta[k-n] \tag{1-36}$$

这正好对应连续时间信号情况下的式（1-12）。

三、复指数序列

复指数序列的形式为

$$f[k]=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_0 k} \tag{1-37}$$

根据 Euler 公式，$f[k]$ 还可以表示为

$$f[k]=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_0 k}=\cos\Omega_0 k+\mathrm{j}\sin\Omega_0 k \tag{1-38}$$

即 $f[k]$ 是一个复数序列，其实部为 $\cos\Omega_0 k$，虚部为 $\sin\Omega_0 k$。

$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_0 k}$ 的周期性：为了使 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_0 k}$ 是周期为 $N(>0)$ 的周期序列，Ω_0 必须满足以下条件：

$$\frac{\Omega_0}{2\pi}=\frac{m}{N},m\text{ 为正整数} \tag{1-39}$$

因此，对于任意的 Ω_0，序列 $e^{j\Omega_0 k}$ 不一定是周期序列，只有在 $\Omega_0/2\pi$ 是有理数时才是周期序列。注意，这个性质不同于连续时间信号 $e^{j\omega_0 t}$ 在任意 ω_0 时均为周期信号的性质。因此，如果 Ω_0 满足式（1-39）中的周期性条件，且 $\Omega_0\neq0$，N 和 m 没有公因子，则式（1-37）中序列 $f[k]$ 的基本周期 N_0 为

$$N_0=m\left(\frac{2\pi}{\Omega_0}\right) \tag{1-40}$$

离散时间复指数与连续时间复指数的另一个重要区别是，信号 $e^{j\omega_0 t}$ 随 ω_0 的不同而不同，信号 $e^{j\Omega_0 k}$ 却不是这样。

设有一个频率为（$\Omega_0+2\pi n$）的复指数序列，其中 n 为整数，则有

$$e^{j(\Omega_0+2\pi n)k}=e^{j\Omega_0 k}e^{j2\pi kn}=e^{j\Omega_0 k} \tag{1-41}$$

因为 $e^{j2\pi kn}=1$，由式（1-41）可以看出，复指数序列在频率 Ω_0 处与在（$\Omega_0\pm2\pi n$）、（$\Omega_0\pm4\pi n$）等处的值是相等的。因此，在处理离散时间指数序列时，只需要考虑以 2π 为间隔长度来选择 Ω_0。一般情况下，常使用间隔 $0\leqslant\Omega_0\leqslant2\pi$ 或 $-\pi\leqslant\Omega_0<\pi$。

一般复指数序列

最普通的复指数序列常定义为

$$f[k]=Ca^k \tag{1-42}$$

式中，C 和 a 都是普通的复指数。

注意，式（1-37）是式（1-42）在 $C=1$ 且 $a=e^{j\Omega_0}$ 时的一个特例。

实指数序列

如果式（1-42）中的 C 和 a 都是实数，则 $f[k]$ 是一个实指数序列，可以分为四种不同的情况，即 $a>1$、$0<a<1$、$-1<a<0$ 和 $a<-1$，图 1-14 所示为这四种实指数序列。注意，如果 $a=1$，$f[k]$ 就是一个常数序列；相反，$a=-1$，$f[k]$ 在 $+C$ 和 $-C$ 之间交替变化。

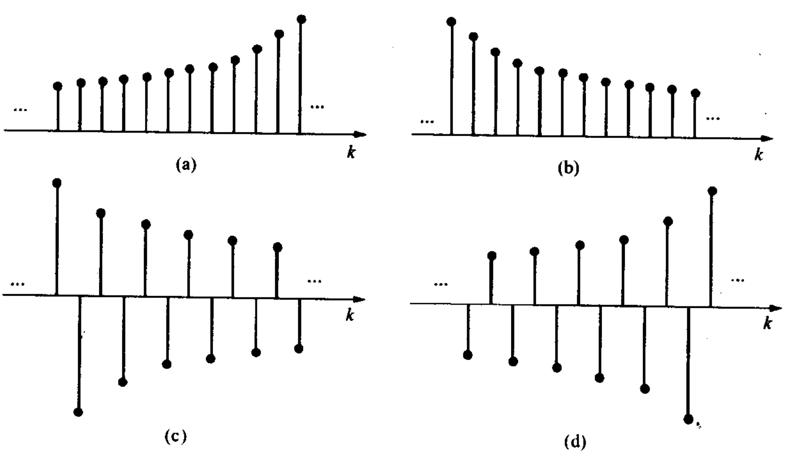

图 1-14　实指数序列

(a) $a>1$；(b) $0<a<1$；(c) $-1<a<0$；(d) $a<-1$

四、正弦序列

正弦序列可以表示为

$$f[k]=A\cos(\Omega_0 k+\theta) \tag{1-43}$$

如果 k 没有量纲，则 Ω_0 和 θ 的单位是弧度。图 1-15 所示为两个正弦序列的示例。与前

面的方法一样，式（1-43）中的正弦序列可以表示为

$$A\cos(\Omega_0 k+\theta)=A\mathrm{Re}\{e^{j(\Omega_0 k+\theta)}\} \tag{1-44}$$

与式（1-37）中复指数序列的情况一样，正弦序列也是如此，见式（1-39）和式（1-41）。如图1-15（a）所示的正弦序列是以基本周期为12的重复的周期序列，但图1-15（b）所示的序列是非周期序列。

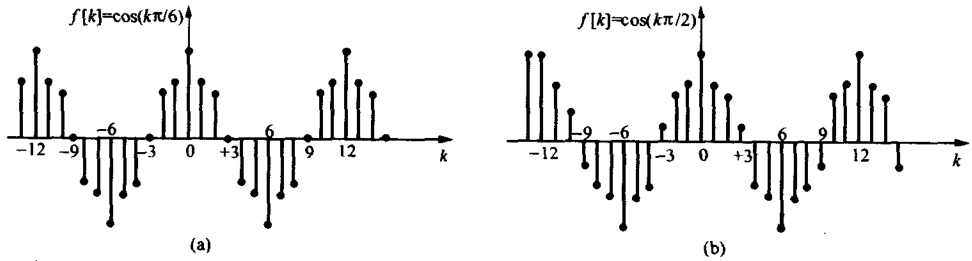

图1-15　正弦序列

(a) $f[k]=\cos(k\pi/6)$；(b) $f[k]=\cos(k\pi/2)$

第四节　信号的基本运算

一、连续信号的基本运算

1. 尺度变换（展缩）

信号的尺度变换是指将信号 $f(t)$ 变化到 $f(at)(a>0)$ 的运算。若 $0<a<1$，则 $f(at)$ 是 $f(t)$ 的扩展。若 $a>1$，则 $f(at)$ 是 $f(t)$ 的压缩。

【例1-2】 已知 $f(t)=\begin{cases}(t-2)/2 & 2\leqslant t\leqslant 4\\ 0 & 其他\end{cases}$，分别画出 $f(2t)$ 和 $f(t/2)$ 的波形。

解　运用函数的基本定义，得

$$f(2t)=\begin{cases}(2t-2)/2 & 2\leqslant 2t\leqslant 4\\ 0 & 其他\end{cases}=\begin{cases}t-1 & 1\leqslant t\leqslant 2\\ 0 & 其他\end{cases}$$

$$f(t/2)=\begin{cases}(t/2-2)/2 & 2\leqslant t/2\leqslant 4\\ 0 & 其他\end{cases}=\begin{cases}(t-4)/4 & 4\leqslant t\leqslant 8\\ 0 & 其他\end{cases}$$

$f(t)$、$f(2t)$ 和 $f\left(\frac{t}{2}\right)$的波形分别如图1-16（a）、（b）、（c）所示。

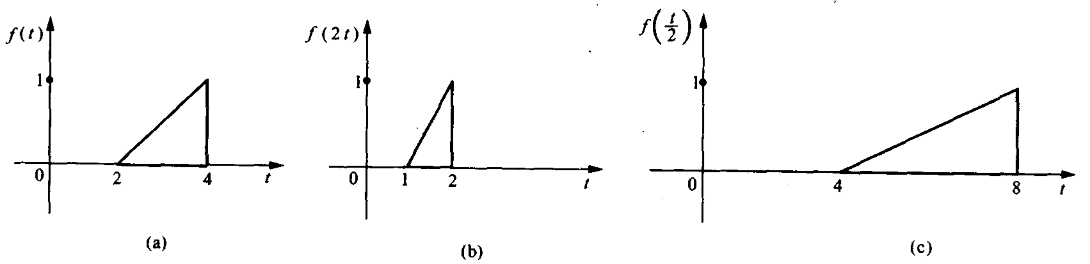

图1-16　[例1-2] 图

(a) 原信号 $f(t)$；(b) 尺度变换信号 $f(2t)$；(c) 尺度变换信号 $f\left(\frac{t}{2}\right)$