研究生(非数学类)数学系列规划教材

应用泛函分析

FUNCTIONAL ANALYSIS

程曹宗◎主编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

本书共分5章。第1章简明介绍实变函数的基础知识，为后面各章作一些铺垫；第2章介绍距离空间、线性赋范空间和内积空间；第3章介绍线性算子与线性泛函；第4章介绍有界线性算子的谱与紧算子；第5章介绍广义函数。第2章至第5章，着重介绍了泛函分析的基本知识，力求简明、严谨与系统性，力求主线清晰、易学易懂。各章配有习题，书后配有习题答案与提示。

本书可作为理工科院校研究生或高年级本科生教材。也可供科技工作者参考。

图书在版编目（CIP）数据

应用泛函分析/程曹宗主编. —北京：机械工业出版社，2007.11

研究生（非数学类）数学系列规划教材

ISBN 978-7-111-22930-8

Ⅰ. 应… Ⅱ. 程… Ⅲ 泛函分析-研究生-教材 Ⅳ 0177

中国版本图书馆CIP数据核字（2007）第183925号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号 邮政编码100037）
策划编辑：郑 丹 责任编辑：张继宏 责任校对：程俊巧
封面设计：王伟光 责任印制：邓 博
北京京丰印刷厂印刷
2008年1月第1版·第1次印刷
169mm×239mm·6 25印张·240千字
标准书号：ISBN 978-7-111-22930-8
定价：15.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
销售服务热线电话：（010）68326294
购书热线电话：（010）88379639 88379641 88379643
编辑热线电话：（010）88379711

序

近年来，我国研究生教育有很大发展。随着国家经济建设的多方面需求和科学技术的飞速进步，高校研究生的数学课不仅规模上均有所扩大，而且在内容上需要不同程度的更新。在加强基础课教学的同时，为了适应不同专业的发展，也需要开设一些新课程。数学教师们经过多年的教学实践，为适应研究生教育发展的新形势，在教学改革方面做了许多努力和尝试，包括在教学基础上编写了不少研究生数学教材。这些教材的出版，对于进一步改进研究生数学教育，提高年轻教员的素质和加强各专业的数学知识和能力，无疑是十分有益的。

机械工业出版社多年来对高等学校的数学教育非常重视，在编译国内外数学教材等方面做了许多有益的工作。北京高教学会数学研究会也十分关注研究生的数学教育和培养，在组织北京地区教师编写教材方面花了很大力气。北京地区高校资源丰富，联系密切，在教学改革和相互交流促进方面有好的基础和条件。另一方面，北京地区研究生人数多，专业面广，改进研究生数学教学的任务也十分重要和迫切。这次机械工业出版社和北京高教学会数学研究会联手，组织编写一批非数学专业的研究生教材，对于加强和改进研究生数学教育是一件十分有益的事情。我希望今后能把这项工作持续地做下去，使研究生得到更好的数学教育，使数学成为他们从事科学研究的一种重要的工具和思考方式，在今后各种不同工作领域中发挥作用，产生出高水平和创新性的科学研究与应用成果。

冯克勤

2007 年 9 月于清华园

前　言

大学微积分课程主要介绍定义在欧氏空间上的实函数（或看成欧氏空间到实数空间的映射）的解析性质。而讨论抽象空间、定义在抽象空间上的函数和抽象空间到抽象空间的映射的性质，则成为泛函分析课程的主要内容。泛函分析是一门体系庞大、抽象严谨、应用广泛的较新的数学分支。它运用和结合代数、拓扑的方法，发展了经典的分析学。随着科学技术的发展，许多工程技术和理论问题很难用经典分析的框架去刻画，泛函分析则成为处理这类问题的有力的工具和方法。也正因为如此，愈来愈多的理工科本科生和研究生选修泛函分析课程。

近几年已有各类泛函分析教材相继出版。一类是为理科学生撰写的，假定读者具有良好的拓扑学和实分析等数学基础，多适用于重点大学理科专业；一类是为工科学生撰写的，由于学时和基础知识的限制，在内容的完整性和严谨性上往往被弱化。我们这本讲义想写成一本供工科院校的研究生和一般院校的理科专业高年级本科生或研究生使用的教材。假定读者仅具备微积分和线性代数的基础知识。为此，本书第 1 章简明介绍了实变函数的基础知识，为后面各章作一些铺垫。第 2 章介绍距离空间、线性赋范空间和内积空间；第 3 章介绍线性算子与线性泛函；第 4 章介绍有界线性算子的谱与紧算子；第 5 章介绍广义函数。由于第 1 章仅作为预备知识，我们不追求它的完整性，受篇幅的限制，一些结论只作了阐述而未给出证明，对于已具备实变函数论基础知识的读者，本章可以略去不学。第 2 章至第 5 章，着重介绍了泛函分析的基本知识，力求简明、严谨与系统性，力求主线清晰、易学易懂。书中有些繁冗的定理的证明和应用举例，放在书后附录中或用 * 号作了标记，这部分内容可选讲或留给读者查阅、自学。各章配有习题，书后配有习题答案与提示。

本教材是在北京高教学会数学研究会和机械工业出版社的组织帮助下，由北京工业大学程曹宗、李云章，北京交通大学汪成咏和北方工业大学李沍岸共同完成的。第 1 章由李沍岸执笔，第 2 章由李云章执笔，第 3 章由汪成咏执笔，第 4 章和第 5 章由程曹宗执笔。全书由程曹宗统稿，其中李云章帮助修改校对了第 1 章初稿。中国科学院数学与系统科学研究院冯德兴教授仔

细审阅了书稿，提出了宝贵的意见。这本教材的出版得到北京市教育教学研究项目，北京工业大学课程建设和教学研究经费的支持，在此一并表示衷心的感谢！

由于学识水平所限，书中难免存在这样或那样的错误和不足，诚恳希望专家、同行及读者批评指正。

编　者

2007 年 2 月于北京

目　录

第 1 章　实变函数基础

黎曼（B. Riemann）积分在近代数学中具有奠基性地位，它在解决类似于求几何体的体积，非匀速运动的路程，以及非均匀物体的质量等实际问题中起到极其重要的作用。黎曼积分是通过（对积分区域）分割、（对被积函数值）近似、求和、取极限来定义的。但黎曼积分有其自身的局限性，譬如，积分区域一般要求是连通的集合（或它们的并集），被积函数一般要求是连续函数或是间断点不能太多的函数，积分与极限等运算交换顺序只有在较强的附加条件下才可进行。实变函数论的一个中心内容是勒贝格（H. Lebesgue）积分，它是黎曼积分的推广，这种推广不但扩大了可积函数类，而且使积分运算更加灵活。在以后各章中所涉及的积分多是指勒贝格积分。为此，本章在介绍集合、测度、可测集及可测函数的基础上，介绍勒贝格积分的概念及基本性质。另外，还将简单地介绍 l^p 与 L^p 空间。由于本章是作为本书的预备知识，受篇幅限制，内容上不求全面系统，一些结论将不加证明直接给出，其证明可查阅有关实变函数论教科书。

1.1　集合及其运算

1. 集合的概念

具有确定内容或适合一定条件的事物的全体称为**集**或**集合**，其中的每个事物称为它的**元素**。微积分中的实数集、连续函数集、给定函数的定义域等都是集合。我们通常用大写字母表示集合，如 A、B、C 等。用小写字母表示元素，如 a、b、c 等。设 A 是一个集合，若 a 是 A 的元素，则称 a **属于** A，记作 $a\in A$；若 a 不是 A 的元素，则称 a **不属于** A，记作 $a\notin A$。若一个集合不含任何元素，则我们称其为**空集**，记作 $\varnothing$。

设 A、B 是两个集合。若对任意 $x\in A$，有 $x\in B$，则称 A 是 B 的**子集**，记作 $A\subset B$，或称 B **包含** A，记作 $B\supset A$；若 $A\subset B$，但 $A\neq B$，则称 A 是 B 的**真子集**。显然，空集是任何集合的子集。

2. 集合运算

设 A、B 是两个集合，定义 A 与 B 的**并集**（简称并）为

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B\}$$

A 与 B 的**交集**（简称交）为

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\in B\}$$

A 与 B 的**差集**（简称差，记作 $A\backslash B$ 或 $A-B$）为

$$A-B=\{x \mid x \in A \text{ 但 } x \notin B\}$$

如果我们研究某个问题限定在一个大的集合 X 中进行，所研究的其他集合 A 都是 X 的子集。此时，我们称集合 X 为**全集**或**基本集**。称 $X\backslash A$ 为 A 的**余集**或**补集**，记作 A^c 或 CA。

集合运算的法则：设 A、B、C 为任意三个集合，则有

(1) 交换律　$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

(2) 结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

(3) 分配律　$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$；

(4) 对偶(de Morgan)律　$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$，$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$。

集合的交并运算可以推广到集族的情形。设 $\{A_\alpha \mid \alpha\in I\}$ 是一个集族。定义

$$\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha=\{x \mid \exists\alpha\in I,\ x\in A_\alpha\},\qquad \bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha=\{x \mid \forall\alpha\in I,\ x\in A_\alpha\}$$

相应的 de Morgan 律可推广为

$$\left(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha\right)^c=\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha^c,\qquad \left(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha\right)^c=\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha^c$$

1.2 映射与集合的基数

1. 映射

定义 1.1　设 X、Y 是两个非空集合，若依一定的法则 f，对每个 $x\in X$，在 Y 中有唯一确定的元素 y 与之对应，则称 f 为从 X 到 Y 的**映射**，记作 f: $X\to Y$，并将 x 与 y 的关系写成 $y=f(x)$。这时称 y 为 x（在映射 f 下）的**像**；称 x 为 y（在映射 f 下）的一个**原像**；称集合 X 为映射 f 的**定义域**；称集合

$$f(X)=\{f(x) \mid x\in X\}$$

为映射 f 的**值域**；对集合 $A\subset X$，$B\subset Y$，分别称

$$f(A)=\{f(x) \mid x\in A\},\ f^{-1}(B)=\{x\in X \mid f(x)\in B\}$$

为 A（在映射 f 下）的**像**，B（在映射 f 下）的**原像**。

定义 1.2　给定映射 f: $X\to Y$。若 $f(X)=Y$，则称 f 为 **X 到 Y 上的映射**或**满射**；若对任意 $x_1, x_2\in X$ 满足 $x_1\neq x_2$，有 $f(x_1)\neq f(x_2)$，则称 f 为**单射**；若映射 f 既是单射，又是满射，则称 f 为**双射**（或**一一映射**）。

设 f 是 X 到 Y 的单射，则由定义，对每个 $y\in f(X)$，有唯一的 $x\in X$，使 $f(x)=y$，于是，我们可定义 f 的**逆映射** f^{-1}: $f(X)\to X$ 为：对每个 $y\in f(X)$，规定 $f^{-1}(y)=x$。

给定两个映射 g: $X\to Y$ 和 f: $Y\to Z$，定义它们的**复合映射** $f\circ g$: $X\to Z$ 为

$$f\circ g(x)=f[g(x)]\quad (x\in X)$$

2. 集合的基数

集合分两类：有限集与无限集。只含有有限个元素的集合称为**有限集**，不是有限集的集合称为**无限集**。特别地，空集是有限集，元素个数为0。显然两个非空有限集 A 与 B 元素个数相等的充分必要条件是存在双射 $f: A\to B$。本节将利用双射对集合分类，从而对集合的元素个数进行比较。

定义1.3 设 A，B 为两个非空集，若存在双射 $f: A\to B$，则称 A 与 B **对等**，记作 $A\sim B$。

定理1.1 对任何集合 A、B、C，均有

(1) 自反性：$A\sim A$；

(2) 对称性：若 $A\sim B$，则 $B\sim A$；

(3) 传递性：若 $A\sim B$，$B\sim C$，则 $A\sim C$。

根据定理1.1，我们可把彼此对等的集合归作一类。这样任何集合必属于某一类。我们把两个彼此对等的集合称为具有相同的**基数**(亦称**势**)，用 $\overline{\overline{A}}$ 表示集合 A 的基数。当 A 是有限集时，$\overline{\overline{A}}$ 即为 A 的元素个数。

定义1.4 设 A、B 是两个集合，如果 A 不和 B 对等，但存在 B 的真子集 B^*，有 $A\sim B^*$，则称 A 比 B 有较小的基数(B 比 A 有较大的基数)并记为 $\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}$。

定理1.2 (Bernstein 定理) 设 A、B 是两个非空集合，如果存在 $S\subset A$，$T\subset B$，使 $A\sim T$，$B\sim S$，则 $A\sim B$。

注 利用基数的说法是：设 $\overline{\overline{A}}\leqslant\overline{\overline{B}}$，$\overline{\overline{B}}\leqslant\overline{\overline{A}}$，则 $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$。

推论 若 $A\subset B$，则 $\overline{\overline{A}}\leqslant\overline{\overline{B}}$。

定义1.5 如果集 A 与自然数集 $\mathbb{N}$ 对等，就称它为**可数集**(**可列集**)。

显然，可数集 A 可以排成一个无穷序列的形式：

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$$

例1.1 正偶数集 A 是可数集。因为映射 $f(\mathbb{N}\to A)$：$n\to 2n$ 是双射。

例1.2 有理数集 $\mathbb{Q}$ 是可数集。

证 事实上，把非零的有理数 a 写成既约分数的形式 $a=p/q$，$q>0$，$p\neq 0$，把和 $n=|p|+q$ 称为 a 的模。现规定0的模为1，很明显，模为 n 的有理数的个数是有限的，于是把一切有理数按模递增编组，其模相同的编在同一组，最后再依次把这些有理数逐个编号，但重复者除去不计。这样，每一个有理数得到了一个确定的号码。因而建立了有理数集与自然数集之间的一一对应，这就证明了有理数集的可数性。证毕。

定理1.3 任何无限集必含有可数子集。

证 设 A 是一无限集，可以从中取出一个元 a_1。由于 A 为无限集，$A-\{a_1\}$ 非空，从而可从其中取出 a_2，同理，又可从 $A-\{a_1, a_2\}$ 中取出 a_3，等等。按归纳

法，可得到 A 的一个可数子集 $\{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$。证毕。

定理 1.4 设 $A_i(i=1, 2, 3, \cdots)$ 是有限或可数集，则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 是有限或可数集。

证 只需证明当 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 是无限集时，$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 是可数集。设

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, \cdots\} \\
A_2 &= \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, \cdots\} \\
A_3 &= \{a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34}, \cdots\} \\
A_4 &= \{a_{41}, a_{42}, a_{43}, a_{44}, \cdots\} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 可按对角线排成

$$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{13}, a_{22}, a_{31}, \cdots$$

其中，若后面某元素不存在，则跳过去排其他元素，若后面某元素与前面某一元素重复，则删去之。因此 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 是可数集。证毕。

推论 设 $A_i(i=1, 2, 3, \cdots)$ 是有限或可数集，至少有一个 A_i 是可数集，则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 是可数集。

注 定理 1.4 与其推论中某些 A_i 可以是 $\varnothing$，故定理 1.4 与其推论对有限个集合的并也成立。

定理 1.5 区间 $[0, 1]$ 是不可数集。

证 用反证法。假定区间 $[0, 1]$ 是可数的，把 $[0, 1]$ 中的点编号为 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$，把闭区间 $[0, 1]$ 三等分，则显见 $[0, 1/3]$ 与 $[2/3, 1]$ 中总有一个区间不含有 x_1，用 I_1 表示这个闭区间。把 I_1 三等分，在它的左右两个闭子区间中总有一个不含有 x_2，用 I_2 表示这个闭子区间。同样，把 I_2 三等分，可得不含有 x_3 的一个闭区间 I_3，等等。据归纳法，便得到一列闭区间 $\{I_n\}$。由作法知 $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$ 且 $x_n \notin I_n$，$n=1, 2, 3, \cdots$。由于 I_n 的长度为 $1/3^n$ 趋于 0，利用下节的区间套定理（定理 1.8），存在点 $\xi \in I_n (n=1, 2, 3, \cdots)$，由于 $x_n \notin I_n$，故 ξ 不会是任一个 x_n，但 ξ 又是 $[0, 1]$ 中的点，出现了矛盾。这表明区间 $[0, 1]$ 是不可数的。证毕。

推论 1 全体实数所成集合 $\mathbb{R}$ 是一个不可数集合。

推论 2 若用 c 表示全体实数所成集合 $\mathbb{R}$ 的基数，用 a 表示全体自然数所成集合的基数，则 $c > a$。

以后称 c 为**连续基数**。

定理 1.6 任意区间均具有连续基数 c。

定理 1.7 n 维欧氏空间$\mathbb{R}^n$具有连续基数 c。

证明留做练习。

1.3 实数基本定理

在微积分课程中，我们介绍了关于实数集的确界原理和数列的单调有界定理，给出了数列的柯西收敛准则。这三个命题以不同方式反映了实数集$\mathbb{R}$ 的一种特性，通常称为实数的完备性或实数的连续性。有关实数集完备性的基本定理，除上述三个外，还有区间套定理、聚点定理和有限覆盖定理，在本小节中将阐述这三个基本定理。事实上，这些定理是彼此等价的，但限于篇幅，我们不去证明。

1. 闭区间套定理

定义 1.6 设闭区间列$\{[a_n, b_n]\}$具有如下性质：

(1) $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$, $\quad n=1, 2, \cdots$,

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$,

则称$\{[a_n, b_n]\}$为**闭区间套**，或简称**区间套**。

定理 1.8（区间套定理） 若$\{[a_n, b_n]\}$是一个区间套，则存在唯一的$\xi \in \mathbb{R}$，使$\xi \in [a_n, b_n]$, $n=1, 2, \cdots$。

注 区间套定理中要求各个区间都是闭区间，才能保证定理的结论成立。对于开区间列，如$\left\{\left(0, \dfrac{1}{n}\right)\right\}$，虽然其中各个开区间也是前一个包含后一个，且$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n} - 0\right) = 0$，但不存在属于所有开区间的公共点。

2. 聚点定理与有限覆盖定理

定义 1.7 设$\varnothing \neq S \subset \mathbb{R}$，$\xi \in \mathbb{R}$。若$\xi$ 的任何邻域内都含有 S 中无穷多个点，则称ξ 为点集 S 的一个**聚点**。

例如，点集 $S = \left\{(-1)^n + \dfrac{1}{n}\right\}$有两个聚点 $\xi_1 = -1$ 和 $\xi_2 = 1$；点集 $S = \left\{\dfrac{1}{n}\right\}$只有一个聚点 $\xi = 0$；又若 S 为开区间(a, b)，则(a, b)内每一点以及端点 a、b 都是 S 的聚点；而正整数集没有聚点，$\mathbb{R}$ 的任何有限子集也没有聚点。

定理 1.9（Weierstrass 聚点定理） 实数轴上的任一有界无限点集 S 至少有一个聚点。

定义 1.8 设 S 为实数轴上的点集，H 为开区间的集合（即 H 的每一个元素都是形如(α, β)的开区间）。若 S 中任何一点都含在 H 中至少一个开区间内，则称 H 为 S 的一个**开覆盖**，或称 H 覆盖 S。若 H 中开区间的个数是无限（有限）的，则称 H 为 S 的一个**无限开覆盖**（**有限开覆盖**）。

定理 1.10（有限覆盖定理） 设 H 为闭区间 $[a, b]$ 的一个开覆盖，则从 H 中可选出有限个开区间来覆盖 $[a, b]$。

注 定理结论对开区间则不一定成立。例如，开区间集合

$$\left\{\left(\frac{1}{n+1}, 1\right)\right\} \quad (n=1, 2, \cdots)$$

构成了开区间 $(0, 1)$ 的一个开覆盖，但不能从中选出有限个开区间覆盖 $(0, 1)$。

1.4 勒贝格外测度与可测函数

1. 勒贝格外测度与可测集

"测度"是 $\mathbb{R}^1$ 中长度、$\mathbb{R}^2$ 中面积、$\mathbb{R}^3$ 中体积概念的推广。对 $\mathbb{R}^n$ 中一个一般的点集，它是否有测度？怎样定义其测度？本节将讨论这一问题。另外，从本节开始，所考虑的点集均指 $\mathbb{R}^n$ 中的点集，除非特殊声明。本节先从有界点集的内、外测度出发定义有界可测集，接着定义一般可测集，然后讨论可测集的性质。为此，我们先扩充实数集，我们称 $\pm\infty$ 为**非正常实数**（$+\infty$ 也常写作 ∞），通常的实数则称为有限实数。关于包含 $\pm\infty$ 在内的实数运算作如下规定：
$(+\infty)(+\infty)=(-\infty)(-\infty)=+\infty$，$(+\infty)(-\infty)=(-\infty)(+\infty)=-\infty$，
$0(\pm\infty)=(\pm\infty)0=0$

对任意有限实数 a

$$a+(\pm\infty)=(\pm\infty)+a=(\pm\infty)-a=a-(\mp\infty)=\pm\infty$$

$$(\pm\infty)+(\pm\infty)=\pm\infty, \quad \frac{a}{\pm\infty}=0$$

对任意有限实数 $a>0$（或 <0）

$$a(\pm\infty)=(\pm\infty)a=\frac{\pm\infty}{a}=\pm\infty\,(\text{或}\mp\infty)$$

反之，$(\pm\infty)-(\pm\infty)$，$(\pm\infty)+(\mp\infty)$，$\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$，$\dfrac{\pm\infty}{\mp\infty}$，$\dfrac{a}{0}$，$\dfrac{\pm\infty}{0}$ 都认为是无意义的。为叙述方便，我们引入 $\mathbb{R}^n$ 中开区间的概念。集 $I\subset\mathbb{R}^n$ 称为**开区间**是指存在 $-\infty\leqslant a_i<b_i\leqslant\infty$，$1\leqslant i\leqslant n$ 使

$$I=\{(x_1, x_2, \cdots, x_n)\in\mathbb{R}^n \mid a_i<x_i<b_i, i=1, 2, \cdots, n\}$$

定义 I 的体积为

$$|I|=(b_1-a_1)(b_2-a_2)\cdots(b_n-a_n)$$

特别地，若 $b_i-a_i<\infty\ (1\leqslant i\leqslant n)$，则称 I 为**有限开区间**。另外，我们规定空集 $\varnothing$ 为开区间，其体积 $|\varnothing|=0$。

定义 1.9 设 E 为 $\mathbb{R}^n$ 中任一点集，对于每一列覆盖 E 的开区间，$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} I_i\supset E$，

作出它的体积和$\mu=\sum_{i=1}^{\infty}|I_i|$（$\mu$可以等于$\infty$，不同的区间列一般有不同的$\mu$），所有这一切的$\mu$组成一个下方有界的数集，它的下确界（由$E$完全决定）称为$E$的**勒贝格外测度**，简称$L$**外测度或外测度**，记为$m^*E$，即

$$m^*E=\inf_{E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i}\sum_{i=1}^{\infty}|I_i|$$

例1.3 设E是一有限或可数集，则$m^*E=0$。

例1.4 对于区间I有$m^*I=|I|$。

定理1.11 外测度具有下列性质：

(1) $m^*E\geqslant 0$；当E为空集时，则$m^*E=0$；

(2) 设$A\subset B$，则$m^*A\leqslant m^*B$（单调性）；

(3) $m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}m^*A_i$（次可数可加性）。

定义1.10 设E为$\mathbb{R}^n$中有界集，I为任一包含E的有限开区间，则称$|I|-m^*(I-E)$为E的**内测度**，记为m_*E。

注 m_*E与I的选择无关，$m_*E\leqslant m^*E$。

定义1.11 设E为$\mathbb{R}^n$中的一个集合。当E是有界集时，若$m_*E=m^*E$，则称E是L**可测**的；当E是无界集时，若对任何有限开区间I，集$E\cap I$都是L可测的，则称E是L**可测**的。对于L可测集E，我们称m^*E为它的L**测度**，记为mE，L可测集简称为**可测集**。

下面我们给出一个更简洁的等价定义，它使用起来比定义1.11更方便。

定义1.12 设E为$\mathbb{R}^n$中点集，若对任一点集T都有

$$m^*T=m^*(T\cap E)+m^*(T\cap E^c)$$

则称E是L可测的，称m^*E为它的L测度，记为mE。

定理1.12 集合E可测的充分必要条件是对于任意$A\subset E$，$B\subset E^c$，总有

$$m^*(A\cup B)=m^*A+m^*B$$

证 必要性 取$T=A\cup B$，则

$$m^*(A\cup B)=m^*T=m^*(T\cap E)+m^*(T\cap E^c)=m^*A+m^*B$$

充分性 对于任意T，令$A=T\cap E$，$B=T\cap E^c$，则$A\subset E$，$B\subset E^c$，且$T=A\cup B$，因此

$$m^*T=m^*(A\cup B)=m^*A+m^*B=m^*(T\cap E)+m^*(T\cap E^c)$$

证毕。

定理1.13 E可测的充分必要条件是E^c可测。

由定义1.12知定理成立。

定理 1.14 设 E_1、E_2 都可测，则 $E_1 \cup E_2$ 可测，并且当 $E_1 \cap E_2 = \varnothing$ 时，对于任意集合 T 总有 $m^*[T\cap(E_1\cup E_2)] = m^*[T\cap E_1] + m^*[T\cap E_2]$。

推论 设 $E_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 都可测，则 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i$ 也可测，并且当 $E_i \cap E_j = \varnothing$ $(i \neq j)$ 时，对于任意集合 T 总有

$$m^*\left[T\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)\right] = \sum_{i=1}^{n} m^*(T\cap E_i)$$

定理 1.15 设 E_1、E_2 都可测，则 $E_1 \cap E_2$ 也可测。

证 因 $E_1\cap E_2 = ((E_1\cap E_2)^c)^c = (E_1^c \cup E_2^c)^c$，由定理 1.13 及定理 1.14 可知结论成立。证毕。

定理 1.16 设 $\{E_i\}$ 是一列可测集，则 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i$ 也是可测集，且当 E_i 互不相交时有

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} mE_i$$

上述定理及推论表明：可测集关于可数并、交、差运算是封闭的，L 测度具有可数可加性。

前面我们已经定义了可测集，那么到底哪些集合是可测的？我们给出下列定理。

定理 1.17

(1) 外测度为零的集合是可测集，我们称之为零测集；

(2) 零测集之任何子集仍为零测集；

(3) 有限个或可数个零测集之并仍为零测集。

定理 1.18 区间 I 都是可测集，且 $mI = |I|$。

定理 1.19 直线上任一非空开集都可以唯一表示为有限个或可数个互不相交的开区间的并；当 $n>1$ 时，$\mathbb{R}^n$ 中的任一非空开集都可以表示为可数个互不相交的半开半闭（例如左开右闭）区间的并，不过这种表示法没有唯一性。

由定理 1.19，定理 1.18 与定理 1.13，我们有下面定理：

定理 1.20 开集、闭集都是可测集。

我们指出重要的一类集，它以开集、闭集为对象，作至多可列次或并或交的运算，所得到的集统称为**伯勒尔**（Borel）**集**。

定理 1.21 伯勒尔集都是可测集。

伯勒尔集中有这样的集值得注意，一种是可表示为可列个开集的交，称为 G_δ **集**；另一种是可表示为可列个闭集的并，称为 F_σ **集**。它们可用来构造任意可测集的测度。即有：

定理 1.22 设 E 是可测集，则存在 G_δ 集 G 与 F_σ 集 F，满足 $F\subset E\subset G$ 且

$$mE = mG = mF$$

最后指出，不可测集是存在的，但限于篇幅，不再赘述。

2. 可测函数

下面我们介绍一类比连续函数更广泛的函数类，它是勒贝格积分理论中最基本的函数类。若无特殊声明，今后提到的函数都是指定义在$\mathbb{R}^n$中某点集上的实函数，可以取$+\infty$或$-\infty$为函数值。

设E是一个可测集，$f(x)$是定义在E上的实函数，记

$$E[f>a] = \{x \mid x \in E,\ a < f(x) \leqslant \infty\}$$

需要注意，它是E的一个子集。下面用到的记号$E[f \geqslant a]$，$E[a \leqslant f < b]$等均照此理解。

定义 1.13 设f是定义在可测集E上的实函数。若对每一个有限实数a，集$E[f>a]$恒可测(L可测)，则称f是定义在E上的(L)**可测函数**。

定理 1.23 设f是定义在可测集E上的实函数，下列任一个条件都是f在E上(L)可测的充分必要条件：

(1) 对任何有限实数a，$E[f \geqslant a]$都可测；

(2) 对任何有限实数a，$E[f < a]$都可测；

(3) 对任何有限实数a，$E[f \leqslant a]$都可测；

(4) 对任何有限实数a，$b(a<b)$，$E[a \leqslant f < b]$都可测(但充分性要假定$|f(x)| < \infty$)。

证 因$E[f<a] = E - E[f \geqslant a]$，$E[f \leqslant a] = E - E[f>a]$，故前三个条件中，只要证明$f$可测的充分必要条件是条件(1)成立即可。注意到

$$E[f \geqslant a] = \bigcap_{n=1}^{\infty} E\left[f > a - \frac{1}{n}\right]$$

$$E[f > a] = \bigcup_{n=1}^{\infty} E\left[f \geqslant a + \frac{1}{n}\right]$$

由第一式知：f可测时条件(1)成立，由第二式知：条件(1)成立时f可测。

再注意到

$$E[a \leqslant f < b] = E[f \geqslant a] - E[f \geqslant b]$$

$$E[f \geqslant a] = \bigcup_{n=1}^{\infty} E[a \leqslant f < a+n]$$

知f可测的充分必要条件是条件(4)成立。证毕。

例 1.5 定义在零测集上的任意实函数均为可测函数。

由零测集的子集总是可测集直接得到结论。

由此知，任意改变函数在一个确定的零测集上的值对函数的可测性不发生影响。

例 1.6 设 $E=[0,1]$，在 E 上定义狄里克雷函数如下：

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数}\\ 0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$$

由于对任意有限实数 a，集 $E[f>a]$ 为下述三个集之一：E(当 $a<0$)，E 中有理点集(当 $0\leqslant a<1$)与空集(当 $a\geqslant 1$)。它们都是可测集。故 $D(x)$ 是 E 上的可测函数。

例 1.7 区间 $[a,b]$ 上的单调函数是可测函数。

证明留做练习。

定义 1.14 设 E 为 $\mathbb{R}^n$ 中点集，定义在 E 上的实函数 $f(x)$ 称为在 $x_0\in E$ 连续，如果 $y_0=f(x_0)$ 有限，而且对于 y_0 的任一邻域 $V(y_0)$，存在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$，使得 $f(U(x_0)\cap E)\subset V$，即只要 $x\in E$ 且 $x\in U(x_0)$ 时，便有 $f(x)\in V(y_0)$。如果 $f(x)$ 在 E 中每一点都连续，则称 $f(x)$ 在 E 上**连续**。

定义 1.15 设 $f(x)$ 的定义域 E 可分为有限个互不相交的可测集 $E_1, E_2, \cdots, E_n$，$E=\bigcup\limits_{i=1}^{n}E_i$，使 $f(x)$ 在每个 E_i 上都等于某个常数 c_i，则称 $f(x)$ 为**简单函数**。

我们用 $\chi_{E_i}(x)$ 表示 E_i 的特征函数，即当 $x\in E_i$ 时 $\chi_{E_i}(x)=1$；当 $x\notin E_i$ 时 $\chi_{E_i}(x)=0$。则上述简单函数 $f(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}c_i\chi_{E_i}(x)$。

例 1.8 可测集 E 上的连续函数是可测函数。

证 若 f 是连续函数，设 $x\in E[f>a]$，则由连续性假设，存在 x 的某邻域 $U(x)$ 使 $U(x)\cap E\subset E[f>a]$。因此，令 $G=\bigcup\limits_{x\in E[f>a]}U(x)$，则 $E[f>a]\subset G\cap E\subset E[f>a]$，从而 $E[f>a]=G\cap E$，但 G 是开集(它是一族开集之并)，而 E 为可测集，故其交仍为可测集。证毕。

定理 1.24 (1) 设 $f(x)$ 是可测集 E 上的可测函数，而 $E_1\subset E$ 为可测子集，则 $f(x)$ 看作定义在 E_1 上的函数时，它是 E_1 上的可测函数；

(2) 设 $f(x)$ 是定义在有限个可测集 $E_i(i=1,2,3,\cdots,n)$ 的并集 $E=\bigcup\limits_{i=1}^{n}E_i$ 上，且 $f(x)$ 在每个 E_i 上都可测，则 $f(x)$ 在 E 上也可测。

证 (1) 对于任何有限数 a，$E_1[f>a]=E_1\cap E[f>a]$，由假设知等式右边是可测集。

(2) E 是可测集，而且对于任何有限数 a，有 $E[f>a]=\bigcup\limits_{i=1}^{n}E_i[f>a]$，由假设知等式右边是可测集。证毕。

例 1.9 任何简单函数都是可测函数。

证 事实上，定义在可测集上的常值函数显然是可测的，由定理 1.24 便知任

何简单函数都是可测函数，证毕。

推论1 设$\{f_n(x)\}$是E上一列(或有限个)可测函数，则$\mu(x)=\inf_n f_n(x)$与$\lambda(x)=\sup_n f_n(x)$都是可测函数。

证 由于$E[\mu\geqslant a]=\bigcap_n E[f_n\geqslant a]$，$E[\lambda\leqslant a]=\bigcap_n E[f_n\leqslant a]$而得证。证毕。

推论2 设$\{f_n(x)\}$是E上一列可测函数，则

$$F(x)=\underline{\lim}_{n\to\infty}f_n(x),\ G(x)=\overline{\lim}_{n\to\infty}f_n(x)$$

在E上可测，特别当$F(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$存在时，它也在$E$上可测。

证 由于

$$F(x)=\underline{\lim}_{n\to\infty}f_n(x)=\sup_{n\in\mathbf{N}}\left(\inf_{m\geqslant n}f_m(x)\right),\ G(x)=\overline{\lim}_{n\to\infty}f_n(x)=\inf_{n\in\mathbf{N}}\left(\sup_{m\geqslant n}f_m(x)\right)$$

重复应用定理1.24的推论1命题即得证。证毕。

我们已经知道简单函数都是可测函数，因此由定理1.24的推论2知简单函数列的极限函数也是可测函数。反之有：

定理1.25 设$f(x)$是可测集E上的可测函数，则$f(x)$总可以表示成一列简单函数$\{\varphi_n(x)\}$的极限函数，而且还可做到$|\varphi_1(x)|\leqslant|\varphi_2(x)|\leqslant\cdots$。

证 (1) $f(x)\geqslant 0$情形。对每个自然数n，定义

$$\phi_n(x)=\begin{cases}\dfrac{k}{2^n}, & 若\dfrac{k}{2^n}\leqslant f(x)<\dfrac{k+1}{2^n}\quad (k=0,1,2,\cdots,n2^n-1)\\ n, & 若f(x)\geqslant n\end{cases}$$

则$\phi_n(x)$为E上的简单函数，且不难证明$\phi_n(x)\leqslant\phi_{n+1}(x)$，$n=1,2,3,\cdots$。我们证明$\lim_{n\to\infty}\phi_n(x)=f(x)$。若$f(x_0)=\infty$，则$\varphi_n(x_0)=n\to\infty\ (n\to\infty)$；若$f(x_0)<\infty$，则有自然数$N$，使$f(x_0)<N$，从而当$n\geqslant N$时，$|f(x_0)-\varphi_n(x_0)|<1/2^n$，所以当$n\to\infty$时，$\varphi_n(x_0)\to f(x_0)$。

(2) 一般情形。令

$$f_+(x)=\max\{f(x),0\},\ f_-(x)=\max\{-f(x),0\}$$

则$f_+(x)$，$f_-(x)$都是非负可测函数，而$f(x)=f_+(x)-f_-(x)$，$|f(x)|=f_+(x)+f_-(x)$，分别对$f_+(x)$，$f_-(x)$作出相应的简单函数列$\{\varphi_n^+(x)\}$，$\{\varphi_n^-(x)\}$，则$\varphi_n(x)=\varphi_n^+(x)-\varphi_n^-(x)$，$n=1,2,3,\cdots$，即为所求。证毕。

由此得到：函数$f(x)$在E上可测的充分必要条件是$f(x)$总可以表示成一列简单函数$\{\varphi_n(x)\}$的极限函数，其中$|\varphi_1(x)|\leqslant|\varphi_2(x)|\leqslant\cdots$。

推论 在可测集E上定义的两个可测函数的和、差、积、商(假定运算有意义)都是可测的。

定义1.16 如果命题S在集E上除了某个零测度子集外处处成立，则说命题