21世纪高等农林院校数学基础课规划教材

高等数学

经管类

陈绩馨　主编

厦门大学出版社
XIAMEN UNIVERSITY PRESS

21世纪高等农林院校数学基础课规划教材

高等数学

经管类

陈绩馨　主编

O13
Ch33

厦门大学出版社
XIAMEN UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学:经管类/陈绩馨主编. —厦门:厦门大学出版社,2007.7
ISBN 978-7-5615-2783-2

Ⅰ.高…　Ⅱ.陈…　Ⅲ.高等数学-高等学校-教材　Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 087251 号

厦门大学出版社出版发行
(地址:厦门大学　邮编:361005)
http://www.xmupress.com
xmup@public.xm.fj.cn
南平市武夷美彩印中心印刷
2007 年 7 月第 1 版　2007 年 7 月第 1 次印刷
开本:787×960　1/16　印张:33.75　插页:2
字数:577 千字　印数:0 001-5 000 册
定价:42.00 元

前　　言

高等数学是大学课程中一门重要的基础课，是经济、管理类专业的一门必修的公共基础理论课. 学好这门课程，对于培养社会所需要的高级经济技术和工程管理人才，有着十分重要的意义. 在大学数学中，高等数学是重要的基础与起点，它不仅在自然科学领域中已有非常广泛的应用，而且近几十年来它也不断地应用于社会、经济、人文等领域，成为这些领域的一个重要的研究工具. 通过本课程的学习，可以逐步培养学生的抽象概括问题的能力、逻辑推理的能力、自学的能力、较熟练运算的能力，以及综合运用所学知识分析问题和解决问题的能力，为学生学习后续课程和进一步获得近代管理技术知识奠定必要的数学基础.

本书参照教育部高教司颁发的《经济数学基础》大纲，在认真研究同类教材的基础上，针对经济、管理类学生的特点，取长补短而编写的. 本书针对性强，表述确切，思路清楚，由浅入深，直观形象，通俗易懂，并注意数学思想与数学方法的论述. 例题具有典型性，既便于教师教学，更利于学生自学. 同时，本书编者结合多年的数学教学经验，将高等数学和经济学的有关内容进行了有机结合，并精选历年考研真题，供学生复习、总结和考研之用.

书中 ※ 部分作为选学内容，教师可根据不同专业特点进行取舍. 本书的习题按节配置，遵循循序渐进的原则，既注意基本概念、基本理论和方法，又注意加强经济学和其他方面应用性习题的配置. 每章后配置综合练习题，以检查学习效果，并为学生考研复习等方面提供有效的帮助.

本书第五、六、七、八、九、十一章由陈绩馨执笔，第一、二、三、四、十章由薛凌霄执笔. 全书由陈绩馨统稿定稿.

在本书的编写过程中，得到了宁正元教授的大力支持和鼓励，阙树福、张朝阳、温永仙、王秀丽、李德新、姜永等老师提供了许多宝贵的意见和建议，在此谨表诚挚的谢意. 本书在编写过程中参阅了大量相关书籍和论文，特向有关作者表示衷心地感谢！

由于编者水平有限，加之时间比较仓促，教材中一定存在不妥之处，希望专家、同行和读者批评指正，使本书在教学实践中不断完善.

编　者

2007.2 于福州

目录

第一章 ▶▶▶

函　　数

函数是数学中最重要的也是最基本的一个概念.在中学数学中,我们已经学习过常量、变量以及变量之间的依赖关系(即所谓的函数关系).在学习这些知识的基础上,我们将进一步阐明函数的一般定义,总结已学过的一些函数及其性质,并介绍一些经济学中的常用函数.

§1.1　函数

一、函数的概念

在客观世界中,往往同时有几个变量共同变化着.但这几个变量并不是孤立地在变化,而是相互联系,遵循一定的规律变化着.其中一个量变化时,另外的量也跟着变化;前者的值一确定,后者的值也就随之而唯一地确定.如:在几何中,圆的面积 A 是随着半径 r 的变化而变化的,其变化规律是 $A=\pi r^2$.当半径 r 在区间 $(0,+\infty)$ 内任意取定一个值时,由上式就可以确定面积 A 的相应数值.又如:图 1-1 是气象站的温度记录仪在一昼夜间自动画成的气温曲线.该曲线表示当日气温 T 是随着时间 t 的变动而变化的.对这一天 0 点到 24 点之间的任一时刻 t_0,气温 T 都有一个确定的值 T_0 与它对应,尽管这个对应规律很难用一个式子精确地表达出来.现实世界中广泛存在于变量之间的这种类型的相依关系,正是函数概念的客观背景.下面给出函数的定义.

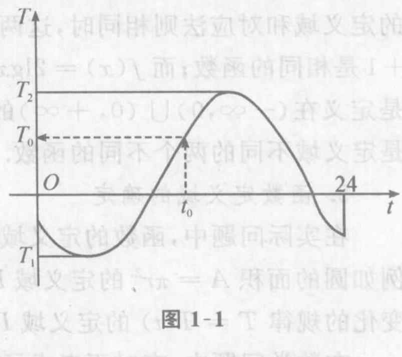

图 1-1

1. 函数的定义

定义 1.1　设有两个变量 x 和 y,D 是一个给定的数集,如果对于每个数 $x\in D$,变量 y 按照对应规律 f 总有一个确定的数值和它对应,则称变量 y 是变量 x 的函数,记作

$$y=f(x)$$

数集 D 称为这个函数的**定义域**,x 称为**自变量**,y 称为**因变量**.

2. 值域

若任取一数值 $x_0 \in D$，函数 $f(x)$ 有确定的对应值 $f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 有定义. $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 在点 x_0 的**函数值**，记为

$$f(x_0)、y\mid_{x=x_0} \text{ 或 } y = y_0$$

全体函数值组成的数集，称为函数的**值域**，记为

$$W = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$$

3. 对应规律的表示

定义 1.1 中的 f 反映自变量 x 与因变量 y 的对应规律，对应规律还可以用 F、g、φ、h 等记号表示，这时的函数就记为 $F(x)$、$g(x)$、$\varphi(x)$、$h(x)$ 等，有时为简化符号，也将 y 是 x 的函数记为 $y = y(x)$，等号左边的 y 是因变量，等号右边的 y 是对应法则.

4. 确定函数的要素

函数定义中涉及定义域 D，对应法则 f 和值域 W. 若定义域 D 和对应法则 f 确定了，则这个函数的值域 W 就确定了. 因此，定义域 D 和对应法则 f 是确定函数的两个要素. 至于自变量和因变量用什么字母表示是无关紧要的. 当两个函数的定义域和对应法则相同时，这两个函数就是相同的，例如，$y = 2x+1$ 与 $z = 2t+1$ 是相同的函数；而 $f(x) = 2\lg x$ 是定义在 $(0, +\infty)$ 的函数关系，$g(x) = \lg x^2$ 是定义在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 的函数关系，因此，$f(x) = 2\lg x$ 与 $g(x) = \lg x^2$ 是定义域不同的两个不同的函数.

5. 函数定义域的确定

在实际问题中，函数的定义域就是使实际问题有意义的自变量的值的全体. 例如圆的面积 $A = \pi r^2$ 的定义域 $D = (0, +\infty)$；某天一昼夜的气温 T 随时间 t 变化的规律 $T = T(t)$ 的定义域 $D = [0, 24]$.

在数学问题中，有时不考虑函数的实际意义，而抽象地研究用算式表达的函数，这时我们约定：函数的定义域就是使函数表达式有意义的自变量的值的全体. 例如，函数 $f(x) = \lg(1-x)$ 的定义域是 $D = (-\infty, 1)$；$f(x) = \dfrac{\sqrt{16-x^2}}{x-1} + \ln(x+3)$ 的定义域是 $D = (-3, 1) \cup (1, 4]$.

6. 单值函数

对于自变量 x 在定义域内每取一个值，因变量 y 有且只有一个值与它对应，这类函数称为**单值函数**. 我们还会遇到另一种情况，即当自变量 x 在定义域内任取一个确定的值时，因变量 y 有多个值与它对应，这类函数称为**多值函数**.

例如，$y = \text{arcsin}x$ 是多值函数，而对于 $y = \text{arcsin}x$ 规定 $y \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ 时

就变成了单值函数.

以后凡是没有特别说明时，函数都是指单值函数.

7. 邻域

为了阐述函数的局部性态，还经常用到邻域的概念，它是由某点附近的所有的点组成的集合.

定义 1.2 设 a 和 δ 是两个实数，且 $\delta>0$，实数集 $\{x \mid |x-a|<\delta\}$，称为**点 a 的 δ 邻域**，记作 $U(a,\delta)$，点 a 称为这**邻域的中心**，δ 称为这**邻域的半径**，它在数轴上表示以点 a 为中心，长度为 2δ 的对称开区间，如图 1-2 所示.

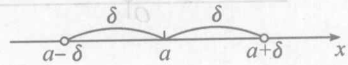

图 1-2

有时用到的邻域需要把邻域中心去掉.

实数集 $\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$，称为**点 a 的去心 δ 邻域**，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，这里 $0<|x-a|$ 就表示 $x\neq a$.

为了说明函数在点的一侧附近的情况，还要用到左、右邻域的概念.

开区间 $(a-\delta,a)$ 称为点 a 的**左 δ 邻域**，$(a,a+\delta)$ 称为点 a 的**右 δ 邻域**，a 的任意一个左(右)δ 邻域简称为 a 的**左(右)邻域**.

二、函数的表示法

函数的表示法是指表示函数对应规律的方法. 函数的表示法通常有三种：**解析法、图像法、列表法**. 用得较多的是解析法，除此以外，有时还直接用语句来反映一个函数. 用解析法表示函数，也是多种多样的，如分段表示法、参数表示法和方程表示法等等.

下面着重介绍一下分段函数.

三、分段函数

如：函数 $y=f(x)=|x|=\begin{cases} x, & \text{当 } x\geqslant 0 \\ -x, & \text{当 } x<0 \end{cases}$ 称为**绝对值函数**. 表示当 x 取不同区间内的数值时，函数用不同的式子来表示. 如 $x=1>0$ 时，由 $f(x)=x$ 计算得到 $f(1)=1$；当 $x=-2<0$ 由 $f(x)=-x$ 计算得到 $f(-2)=-2$，如图 1-3.

像这样的一个函数要用几个式子表示. 这种在自变量的不同变化范围中，对应法则用不同式子来表示的函数，通常称为**分段函数**.

例 1 函数 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases} 1, & \text{当 } x>0 \\ 0, & \text{当 } x=0 \\ -1, & \text{当 } x<0 \end{cases}$ 称为**符号函数**. 它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $W=\{-1,0,1\}$，图形如图 1-4 所示. 对于任何实数 x，下列关系成立：

$$x = \operatorname{sgn} x \cdot |x|.$$

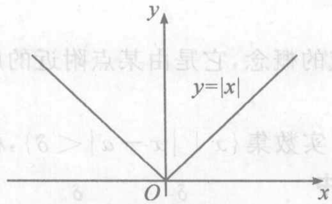

图 1-3

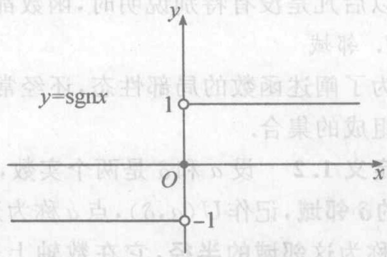

图 1-4

从图 1-3 和图 1-4 可看出，分段函数的图形是由若干段曲线组成的，各曲线可能相连接，也可能断开.

例 2　某市出租车按如下规定收费：当行驶里程不超过 3 km 时，一律收起步费 10 元；当行驶里程超过 3 km 时，除起步费外，对超过 3 km 且不超过 10 km 的部分，按每千米 2 元计费，对超过 10 km 的部分，按每千米 3 元计费. 试写出车费 C 与行驶里程 s 之间的函数关系.

解　以 $C = C(s)$ 表示这个函数，其中 s 的单位是 km，C 的单位是元. 按上述规定，当 $0 < s \leqslant 3$ 时，$C = 10$；当 $3 < s \leqslant 10$ 时，$C = 10 + 2(s - 3) = 2s + 4$；当 $s > 10$ 时，$C = 10 + 2(10 - 3) + 3(s - 10) = 3s - 6$. 或写成：

$$C(s) = \begin{cases} 10, & 0 < s \leqslant 3 \\ 2s + 4, & 3 < s \leqslant 10 \\ 3s - 6, & s > 10 \end{cases}$$

$C(s)$ 就是一个分段函数.

例 3　设 x 为任一实数，不超过 x 的最大整数称为 x 的**整数部分**，记为 $[x]$，如 $\left[\frac{1}{3}\right] = 0$，$[\sqrt{3}] = 1$，$[-\pi] = -4$，$[2] = 2$. 若把 x 看成变量，则函数

$$y = [x]$$

的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$. 值域 $W = Z$. 它的图形如图 1-5 所示，这个图形称为**阶梯曲线**. 在 x 为整数值处，图形发生跳跃，跃度为 1，这个函数也是分段函数，称为**取整函数**.

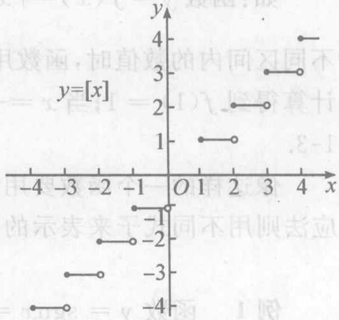

图 1-5

又如邮资的计费办法，个人所得税的收取办法等都是用分段函数表示.

注

(1) 分段函数是用几个式子合在一起来表示一个函数，而不是表示几个函数；

(2) 它的定义域是各个表示式的定义域的**并集**；

(3) 求自变量为 x_0 的函数值时，先要看 x_0 属于哪个表示式的定义域，然后按这个表示式计算 x_0 所对应的函数值.

习题 1－1

1. 将点 3 的 $\frac{1}{5}$ 邻域用集合表示.

2. 判断下列各对函数是否相同，并说明理由.

(1) $f(x)=|x|$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}$；(2) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x+2}$ 与 $g(x)=x-2$；

(3) $f(x)=\sin x$ 与 $g(x)=\sqrt{1-\cos^2 x}$；(4) $f(x)=3\lg x$ 与 $g(x)=\lg x^3$.

3. 求下列函数的定义域

(1) $f(x)=\sqrt{x+3}+\dfrac{1}{1-x^2}$；(2) $f(x)=\arcsin\dfrac{x-2}{3}$；

(3) $f(x)=2^{\frac{1}{\sqrt{x}}}+\dfrac{1}{1-\lg x}$；(4) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & |x|\leqslant 1\\ x^2-1, & 1<|x|<2\end{cases}$.

4. 已知 $y=f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，求下列函数的定义域

(1) $f(x^2)$； (2) $f(x+1)$； (3) $f(\lg x)$； (4) $f(\sin x)$.

5. 设 $f\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x^2}{1+x^4}$，求 $f(x)$.

6. 设分段函数 $f(x)=\begin{cases}1-2x, & 若|x|\leqslant 1\\ x^2+1, & 若|x|>1\end{cases}$. 求下列函数值 $f(0)$，$f(-1)$，$f\left(\dfrac{3}{2}\right)$.

7. 设 $g(x)=\dfrac{x+1}{x+5}$，求 $g(-1)$，$g(0)$，$g\left(\dfrac{1}{x}\right)$，$g\left(\dfrac{x+1}{x+5}\right)$.

§1.2 函数的几种基本特性

函数的基本特性主要包括奇偶性、单调性、周期性和有界性.

一、函数的奇偶性

定义 1.3　设函数 $y = f(x)$ 的定义域关于原点对称，如果对于定义域中的任一个 x，都有

$$f(-x) = -f(x)$$

则称 $y = f(x)$ 为**奇函数**；如果对于定义域中的任一个 x 有

$$f(x) = f(-x)$$

则称 $y = f(x)$ 为**偶函数**.不是奇函数也不是偶函数的函数，称为**非奇非偶函数**.

奇函数的图形关于原点对称，偶函数的图形关于 y 轴对称，如图 1-6(a)、(b).

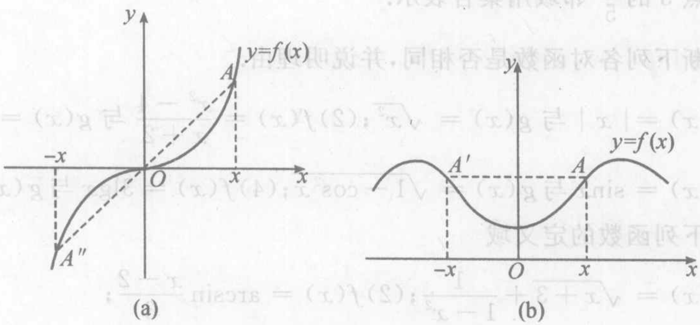

图 1-6

例如，$f(x) = x^3$ 是奇函数，$f(x) = x^2$ 是偶函数，$f(x) = x^2 + x^3$ 是非奇非偶函数.

二、函数的单调性

定义 1.4　设 x_1 和 x_2 为区间 (a,b) 内的任意两个数，若当 $x_1 < x_2$ 时函数值 $f(x_1)$ 及 $f(x_2)$ 满足

$$f(x_1) < f(x_2)$$

则称该函数在区间 (a,b) 内**单调增加**，或称**递增**；若当 $x_1 < x_2$ 时有

$$f(x_1) > f(x_2)$$

则称该函数在区间 (a,b) 内**单调减少**，或称**递减**.

函数的递增、递减统称为函数是**单调的**.从几何直观来看，递增就是当自变量 x 自左向右变化时，函数的图像上升；递减就是当自变量 x 自左向右变化时，函数的图像下降[如图 1-7(a)、(b)].

例如，函数 $f(x) = x^2$ 在区间 $[0, +\infty)$ 内是单调增加的，在区间 $(-\infty, 0)$ 是单调减少的，在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内不是单调的.

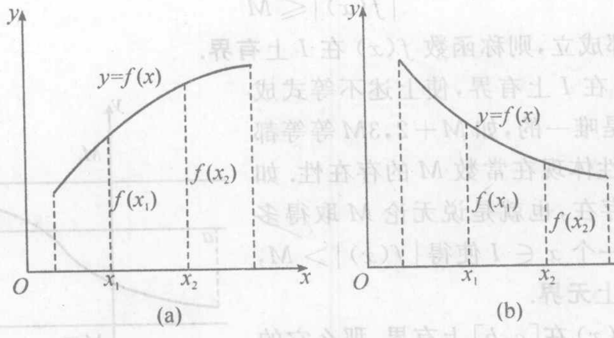

图 1-7

三、函数的周期性

定义 1.5　对于函数 $f(x)$，如果存在一个正数 l，使得对于定义域内的任何 x 值，$x \pm l$ 仍在定义域内，且关系式

$$f(x+l)=f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$ 为**周期函数**，l 称为 $f(x)$ 的**周期**，通常我们说周期函数的周期是指**最小正周期**.

图 1-8 表示周期为 l 的一个周期函数，在每个长度为 l 的区间上，函数图形有相同的形状.

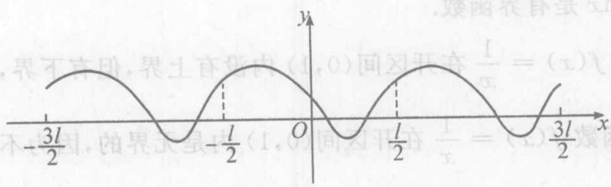

图 1-8

例如，函数 $\sin x$，$\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数；函数 $\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

四、函数的有界性

定义 1.6　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $I \subset D$. 如果存在数 M_1，使得

$$f(x) \leqslant M_1$$

对任一 $x \in I$ 都成立，则称函数 $f(x)$ 在 I 上有**上界**，而 M_1 称为函数 $f(x)$ 在 I 上的一个上界. 如果存在数 M_2，使得

$$f(x) \geqslant M_2$$

对任一 $x \in I$ 都成立，则称函数 $f(x)$ 在 I 上有**下界**，而 M_2 称为函数 $f(x)$ 在 I 上的一个下界. 如果存在正数 M，使得