

工程电磁理论

楼仁海 符果行 肖书君 编著

国防工业出版社

内 容 简 介

本书系统地从理论及数学方法上讨论与计算时谐电磁场与电磁波，并提供较多计算实例及习题。全书共分九章：电磁场基本方程；平面波；电磁场的辅助函数；电磁波的辐射；电磁波的散射和衍射；导行电磁波；电磁振荡；导波中的解析近似法；电磁场的数值方法。

本书系1983年原电子工业部统编教材的重编，原书曾被评为部优秀教材。这次出版，作者作了大幅度调整和增补，反映了当前的水平和作者教学、科研的经验。

本书可供高等院校电子学与通信类有关专业研究生、高年级本科生学习之用，也可供有关教师及科技、工程人员参考。

工 程 电 磁 理 论

楼仁海 符果行 肖书君 编著

责任编辑 耿新暖

*

国防工业出版社出版

(北京市海淀区紫竹院南路23号)

(邮政编码 100044)

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

北京市大兴兴达印刷厂印装

*

787×1092 1/16 印张27¹/₂ 642千字

1991年5月第一版 1991年5月第一次印刷 印数：0 0 1—4 3 0 册

ISBN 7-118-00799-4/TN·141

定价：7.05元

前 言

本书是在《工程电磁理论》原版(楼仁海编著,国防工业出版社1983年出版)的基础上,根据作者使用原教材及科研的经验,综合兄弟院校的意见,并参照工科电子类研究生教材《电磁理论》编写大纲,进行了结构上的大幅度调整和内容上的增新与补充,使章节、节安排更便于教学,内容更为充实和新鲜,从而提高了全书的系统性和完整性。

本书仍依据原版的目的,是为已具有电磁场理论知识,尚需从理论及数学方法上加深学习时谐电磁场和电磁波的读者编写的,可供电子学与通信类有关专业的研究生、高年级本科生学习与科技人员参考。新版仍保持原书特色,力求理论分析简明、透彻和严格,数学方法恰当,并注重联系工程应用。

全书共分九章,系统地论述了时谐电磁场与电磁波的基本理论及所使用的数学方法——解析法、近似法和数值法,理论联系实际,把工程电磁问题中的理论分析与计算有机地结合起来,便于教学与参考。每章还选编了较多习题,供读者思考与练习,把所学数学物理方法加以运用,借以巩固理论学习,培养学生分析问题与解决问题的能力。第一至三章为电磁场与电磁波的理论基础,阐述了电磁场基本方程、平面波及其在不同媒质中的传播特性与有关参数、电磁场辅助函数及其基本应用,作为学习后面各章的基础。第四至七章包括电磁波的辐射、电磁波的散射和衍射、导行电磁波和电磁振荡,把前三章内容结合电波传播、天线工程和微波技术中的主要电磁问题,加以深化和应用。第八至九章包括电磁场的解析近似法和数值方法,以波导和微波、毫米波平面传输线中不连续结构为实例,从方法本身概念及基本原理出发,论述目前流行计算方法——模匹配法、^①横向谐振法、谱域法、变分法、准静场法、Wiener-Hopf法、耦合波理论、有限差分法、有限元法、矩量法、边界元法及直线法等解题思路、过程与技巧。电磁场重要定理和原理结合实际应用,分散安排在有关章、节中。

本书由北京理工大学楼仁海担任主编。第一章由楼仁海执笔,第二至七章由电子科技大学符果行执笔,第八至九章由北京理工大学肖书君、楼仁海执笔,全书由楼仁海校改和审定。

限于作者的学识水平,书中欠妥或错误之处在所难免,希望读者批评指正。

编著者

目 录

第一章 电磁场的基本方程	1	四、理想介质和理想导体分界面上的平行极化波	63
§ 1.1 麦克斯韦方程组及本构关系	1	五、理想介质和等离子体分界面上的平面波	63
§ 1.2 媒质分界面上的场方程——边界条件	5	习题	65
§ 1.3 时谐场中麦克斯韦方程组的表示式	7	第三章 电磁场的辅助函数	69
§ 1.4 波动方程	9	§ 3.1 电磁位函数	69
§ 1.5 能量守恒定理	10	一、矢量磁位和标量电位	69
一、坡印亭定理	10	二、矢量电位和标量磁位	71
二、动量守恒定理	12	三、赫兹矢量	72
§ 1.6 唯一性定理	14	§ 3.2 用电磁位函数表示无源区域中的场, 德拜位	76
§ 1.7 磁荷与磁流, 二重性(对偶性)	15	§ 3.3 直角坐标中的标量波函数, 平面波的合成	80
习题	18	§ 3.4 圆柱坐标中的标量波函数, 柱面波的变换	84
第二章 平面波	21	§ 3.5 球面坐标中的标量波函数, 球面波的变换	89
§ 2.1 非导电媒质中的平面波	21	§ 3.6 矢量波函数	94
§ 2.2 平面波的极化	23	§ 3.7 格林函数	100
§ 2.3 波速	26	§ 3.8 常用坐标中标量波动方程的格林函数, 等效原理	105
一、相速	26	§ 3.9 并矢格林函数	112
二、群速	29	一、并矢函数	112
三、能速	31	二、自由空间中的并矢格林函数	113
四、信号速度	34	三、互易定理	116
§ 2.4 导电媒质中的平面波	35	习题	117
§ 2.5 各向异性媒质	38	第四章 电磁波的辐射	123
一、等离子体及张量电容率	38	§ 4.1 电磁波解的积分表示式	123
二、铁氧体及张量导磁率	40	一、Stratton—Chu公式	123
§ 2.6 磁化等离子体中的平面波	44	二、辐射条件	126
一、纵向传播的波($\theta = 0$)	45	§ 4.2 惠更斯原理, 基尔霍夫公式	127
二、横向传播的波($\theta = \pi/2$)	48	§ 4.3 任意源的辐射场, 辐射矢量	130
§ 2.7 磁化铁氧体中的平面波	49	§ 4.4 电磁波解的多极展开	133
一、纵向传播的波($\theta = 0$)	50	一、电偶极辐射	134
二、横向传播的波($\theta = \pi/2$)	51	二、磁偶极辐射和电四极辐射	140
§ 2.8 非均匀媒质中的电磁波	53	§ 4.5 电磁波解的球面波展开	145
§ 2.9 分界媒质中平面波的反射和透射	57	§ 4.6 实源天线和等效源天线	149
一、不同介质分界面上的垂直极化波	59	一、半波天线	149
二、不同介质分界面上的平行极化波	60		
三、理想介质和理想导体分界面上的垂直极化波	62		

二、行波天线	152	一、基本原理	298
三、口径场量法, 口径天线	153	二、求解波导阶梯不连续性	301
§ 4.7 半空间的偶极辐射	156	三、求解微带阶梯不连续性	303
一、半空间偶极辐射场的积分形式	156	§ 8.2 横向谐振法	308
二、鞍点积分法	158	一、基本原理	308
三、半空间偶极辐射场的渐近解	160	二、求解鳍线不连续性	311
习题	161	§ 8.3 谱域法 (SDA)	316
第五章 电磁波的散射和衍射	166	一、一般谱域法原理及其应用, 求解屏蔽微带 线、槽线及共面波导 (CPW)	317
§ 5.1 汤姆逊 (Thomson) 散射和瑞利 (Rayleigh) 散射	166	二、导抗法原理及其应用, 求解多层微带线	325
§ 5.2 感应定理, 平面的散射	173	§ 8.4 变分法	328
§ 5.3 圆柱的散射	177	一、基本原理	328
§ 5.4 球的散射	183	二、经典变分法, 求解波导中相对两条窄谱 振带	330
§ 5.5 基尔霍夫衍射理论	189	三、广义变分法, 求解鳍线不连续性	337
§ 5.6 夫琅和费 (Fraunhofer) 衍射和菲 涅耳 (Fresnel) 衍射	191	§ 8.5 准静场法	341
§ 5.7 圆孔、矩形孔和狭缝衍射	194	一、基本原理	341
一、圆孔衍射	194	二、求解多层各向异性媒质的耦合带线	342
二、矩形孔衍射和狭缝衍射	197	§ 8.6 威纳-霍普夫 (Wiener-Hopf) 法	347
§ 5.8 小孔衍射	198	一、基本原理	347
§ 5.9 巴俾涅 (Babinet) 原理	206	二、求解平板波导阵列	349
习题	207	三、求解介质加载分支波导	353
第六章 导行电磁波	211	§ 8.7 耦合波理论	357
§ 6.1 柱形波导中的电磁导波	211	一、基本原理	357
§ 6.2 波型的正交性和完备性	217	二、应用举例	359
§ 6.3 规则波导的一般解	219	习题	360
§ 6.4 波导中的功率和能量	226	第九章 电磁场的数值方法	366
§ 6.5 有耗波导中的衰减和波型耦合	229	§ 9.1 有限差分法	369
§ 6.6 矩形波导	236	一、基本原理	369
§ 6.7 圆波导	244	二、实例——CPW及槽线的时域-有限差分 (TD-FD)解	372
§ 6.8 圆介质波导	250	§ 9.2 有限元法	381
习题	258	一、基本概念及简例说明	381
第七章 电磁振荡	262	二、实例——波导模的有限元分析	387
§ 7.1 谐振腔中的电磁场分析	262	§ 9.3 矩量法	393
§ 7.2 谐振腔的类型	265	一、基本原理	393
§ 7.3 矩形谐振腔	266	二、实例——波导接头问题的矩量法解	395
§ 7.4 圆柱形谐振腔	272	§ 9.4 边界元法	401
§ 7.5 球形谐振腔	276	一、基本原理	401
§ 7.6 谐振腔的激励	282	二、解题过程	405
§ 7.7 谐振腔的微扰	289	三、实例——开式谐振腔及介质谐振器的边 界元法解	410
习题	293	§ 9.5 直线法	416
第八章 导波中的解析近似法	297	一、基本原理	416
§ 8.1 模匹配法	297	二、实例——平面波导结构的直线法解	417
		习题	429
		参考文献	430

第一章 电磁场的基本方程

电磁场理论的基本方程是由 J.C. 麦克斯韦于1873年建立起来, 并于1888年由 H. 赫兹实验所证实的。麦克斯韦方程组连同媒质的本构关系构成自相一致的方程组, 解决了定解问题。对于边界及源, 微分方程不能说明问题, 麦克斯韦方程组需要边界条件加以补充。当求解某一具体电磁场问题时, 还需要明确应用哪些最少的条件来满足麦克斯韦方程组的特解, 以使它是已给具体问题的唯一解答。由麦克斯韦方程组可以很方便地推导出波动方程及能量守恒定理。引入假想的磁荷与磁流, 把磁场和电场各物理量互成对偶关系, 从数学形式上使麦克斯韦方程组及其解对称起来, 从而为磁荷, 磁流概念的应用打下理论基础。在很多工程问题中, 电磁场系时谐场, 而且任意能够具体实现的周期性或非周期性的时变场, 可以应用傅里叶变换或傅里叶级数分解成为时谐场的离散或连续频谱, 故本书着重研究时谐场。

§1.1 麦克斯韦方程组及本构关系

麦克斯韦电磁理论是依据前人的电学和磁学上的基本定律 (高斯定律、安培定律、法拉第定律和自由磁极不存在) 创建起来的。麦克斯韦的重要贡献是在安培定律中引入了称作位移电流的附加项, 从而既可科学地解释交变场中的电流连续性, 又揭示了变化的电场 (即位移电流) 可以激发磁场, 并和变化的磁场又激发电场 (法拉第定律) 在空间不断地相互转化, 预言电磁波的存在, 提出光是电磁波的学说。麦克斯韦的重要预见, 首先由赫兹的实验所证实, 修正了原先的基本定律, 创建了完善的反映电场和磁场之间以及它们和电荷、电流之间互相联系的普遍规律, 即麦克斯韦方程组, 给无线电电子技术, 特别是微波、毫米波、光纤和天线技术的发展奠定了重要的理论基础。

麦克斯韦方程组的微分形式是:

麦克斯韦-安培定律
$$\nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t} \quad (1.1-1)$$

法拉第定律
$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (1.1-2)$$

自由磁极不存在
$$\nabla \cdot B = 0 \quad (1.1-3)$$

高斯定律
$$\nabla \cdot D = \rho \quad (1.1-4)$$

- 式中 E ——电场强度 (V/m);
 D ——电通密度 (C/m²);
 H ——磁场强度 (A/m);
 B ——磁通密度 (Wb/m²);
 J ——电流密度 (A/m²);
 ρ ——电荷密度 (C/m³)。

以上各量一般都是位置和时间的函数, 可用

$$E(\mathbf{r}, t), \dots$$

表示出来。

电流密度 $\mathbf{J}$ 包含传导电流密度 $\mathbf{J}_c$ 和源电流密度 $\mathbf{J}_s$ 。取式(1.1-1)的散度, 并应用式(1.1-4), 得电流连续性方程:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (1.1-5)$$

即微分形式的电荷守恒定律。如把式(1.1-5)作为基本方程, 取式(1.1-1)的散度, 得式(1.1-4)。另外, 式(1.1-3)可取式(1.1-2)的散度而得到。可见, 以上散度关系式(1.1-3)与(1.1-4)、(1.1-5)中之一是非独立方程; 独立方程组则由麦克斯韦方程组中两个旋度关系式(1.1-1)、(1.1-2)及散度关系式(1.1-4)或电流连续性方程(1.1-5)所构成。根据实际问题, 可以选择其中之一加以应用。

麦克斯韦-安培定律式(1.1-1), 法拉第定律式(1.1-2)、电流连续性方程(1.1-5)连同洛伦兹力方程

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1.1-6)$$

构成了经典电动力学的基础, 再加上牛顿第二定律, 就可以完全确定电磁场和带电粒子的运动。式(1.1-6)中,

$\mathbf{F}$ ——洛伦兹力(N);

q ——带电粒子的电量(C);

$\mathbf{v}$ ——带电粒子的运动速度(m/s)。

麦克斯韦方程组是支配自由空间及媒质中电磁场特性的基本定律; 但是, 不管电磁波是受到衍射, 折射或散射, 该方程组没有牵涉到电磁场在媒质中所呈现的性质。我们将立足于按照媒质不同性质进行分类的本构关系, 来描述具体媒质。从数学的观点来看, 应用本构关系来补充麦克斯韦方程组的必要性, 也是很明显的。在很多电磁场问题中, 往往源是给定的, 即 $\mathbf{J}$ 及 ρ 是已知的, 而且, 它们满足电流连续性方程(1.1-5)。如果我们检查一下麦克斯韦方程组是否有足够方程来求出所需未知场量, 我们会发现四个场矢量 $\mathbf{H}$ 、 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{B}$ 及 $\mathbf{D}$ 共有十二个未知标量函数, 又前已论证的两个独立方程(1.1-1)及(1.1-2)只可以组成六个标量方程, 所缺方程正好可由媒质的本构关系来补齐, 从而场方程组就成为可解的了。

本构关系指的是与媒质电磁特性相联系的场量之间的关系。本构关系是由电磁场作用之下的媒质分子极化和磁化的机理, 并通过实验而总结出来的。

各向同性媒质的本构关系可以简单写成

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (1.1-7)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (1.1-8)$$

式中, ϵ 和 μ 分别称为媒质的电容率(或称介电常数)和导磁率, 都是实常量。因此, 场矢量 $\mathbf{E}$ 及 $\mathbf{H}$ 分别平行于 $\mathbf{D}$ 及 $\mathbf{B}$ 。在没有物质的自由空间, $\mu = \mu_0$ 及 $\epsilon = \epsilon_0$, 则

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} (\text{H/m})$$

$$\epsilon_0 \approx \frac{1}{36\pi} \times 10^{-12} (\text{F/m})$$

介质材料和磁性材料就可以分别用自由空间部分及各自材料本身部分的电磁特性, 后者即极化强度矢量 $\mathbf{P}$ 或磁化强度矢量 $\mathbf{M}$ 来加以描述, 可以写成

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (1.1-9)$$

和

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M} \quad (1.1-10)$$

$\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{M}$ 分别是介质和磁性材料的单位体积内的电偶极矩 $\mathbf{p}_e$ 和磁偶极矩 $\mathbf{p}_m$, 即

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \mathbf{p}_e}{\Delta V} \quad (\text{C/m}^2) \quad (1.1-11)$$

和

$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \mathbf{p}_m}{\Delta V} \quad (\text{A/m}) \quad (1.1-12)$$

对于线性媒质, $\mathbf{P}$ 与 $\mathbf{E}$ 成正比, $\mathbf{M}$ 与 $\mathbf{H}$ 成正比, 可分别写成

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} \quad (1.1-13)$$

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad (1.1-14)$$

式中, χ_e 和 χ_m 分别称为媒质的相对电极化率和相对磁极化率。因此, 可把式(1.1-9)和(1.1-10)分别写成

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} = (1 + \chi_e) \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (1.1-15)$$

$$\mathbf{B} = (1 + \chi_m) \mu_0 \mathbf{H} \quad (1.1-16)$$

与式(1.1-7)和(1.1-8)相比, 线性媒质的电容率和导磁率分别为

$$\epsilon = (1 + \chi_e) \epsilon_0 \quad \mu = (1 + \chi_m) \mu_0 \quad (1.1-17)$$

相对电容率和导磁率则分别为

$$\epsilon_r = \epsilon / \epsilon_0 = 1 + \chi_e \quad (1.1-18)$$

$$\mu_r = \mu / \mu_0 = 1 + \chi_m \quad (1.1-19)$$

如果 $\mathbf{E}$ 或 $\mathbf{H}$ 很大, 或者 $\mathbf{E}$ 或 $\mathbf{H}$ 的时间导数很大, 上列线性关系就有可能不成立。就媒质的磁性而言, 若 $\mu \leq \mu_0$, 媒质为抗磁性, 若 $\mu \geq \mu_0$, 媒质为顺磁性, 但两者 μ_r 均接近于 1; 铁磁性材料则 $\mu_r \gg 1$, 其值不是常数, 并与磁化过程有关。

对于各向异性媒质, 本构关系具有下列形式:

$$\mathbf{D} = \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{E} \quad (1.1-20)$$

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{H} \quad (1.1-21)$$

式中, $\boldsymbol{\epsilon}$ 和 $\boldsymbol{\mu}$ 分别称为张量电容率和张量导磁率。因此场矢量 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 就不再分别平行于 $\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{B}$ 了。若某一媒质只是电容率为张量, 而导磁率为标量, 则称为各向异性电媒质; 若某一媒质只是导磁率为张量, 而电容率为标量, 则称为各向异性磁媒质; 也有媒质兼有电和磁的各向异性。第二章中将讨论具体各向异性媒质及其中电磁波的特性。

晶体的电容率一般为对称张量, 往往可以通过坐标变换, 把对称矩阵变换为对角线矩阵。在该主坐标系中,

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{bmatrix} \quad (1.1-22)$$

其中三个坐标轴即是晶体的主轴。如果 $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z$ ，该立方晶体是各向同性的。在正方、六方及菱面晶体中，三个参数中有两个是相等的，这种晶体称为单轴晶体，其张量电容率：

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (1.1-23)$$

具有二维简并性，呈现这种各向异性的主轴称为光轴，因此，这里 z 轴即是光轴。若 $\varepsilon_z > \varepsilon$ ，称为正单轴晶体， $\varepsilon_z < \varepsilon$ ，称为负单轴晶体。在斜方、单斜及三斜晶体中，所有三个晶轴都是不相等的，即 $\varepsilon_x \neq \varepsilon_y \neq \varepsilon_z$ ，这种媒质称为双轴晶体，其光轴与主轴不重合。

在直流磁场 $B_0 = B_0 \hat{z}$ 的作用下，电子等离子体和铁氧体分别是比较典型的各向异性电媒质和磁媒质，不考虑损耗时，其张量电容率和张量导磁率分别为

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (1.1-24)$$

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & 0 \\ \mu_{21} & \mu_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.1-25)$$

对于各向同性或各向异性媒质，本构关系利用标量或张量把两个电场矢量和两个磁场矢量联系起来。在电场作用之下，这种媒质产生极化；又在磁场作用之下，这种媒质产生磁化。双各向异性媒质则提供电场和磁场间的交叉耦合。当双各向异性媒质放在电场或磁场之中，它将同时产生极化和磁化。因此，双各向异性媒质的本构关系可以表示为

$$D(\mathbf{r}, t) = \varepsilon \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \xi \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \quad (1.1-26)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \zeta \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mu \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \quad (1.1-27)$$

式中， ξ 及 ζ 称为电磁张量。运动媒质都具有双各向异性的特点，比如，在电场中的运动媒质受到磁化，而在磁场中的运动媒质受到极化。若媒质的本构方程为

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} + \xi \mathbf{H} \quad (1.1-28)$$

$$\mathbf{B} = \zeta \mathbf{E} + \mu \mathbf{H} \quad (1.1-29)$$

式中， ε 、 ξ 、 ζ 及 μ 均为标量，则这种媒质称为双各向同性媒质。

从媒质的导电性能来考虑，本构关系可表示为

$$\mathbf{J}_c = \sigma \mathbf{E} \quad (1.1-30)$$

式中， σ 为媒质的导电率 (S/m)， $\sigma = 0$ 的介质称为理想介质， $\sigma = \infty$ 的导体称为理想导体，介于这两者之间的媒质称为导电媒质。少许物质如半导体里面的整流边界，或恒定磁场中的等离子体的导电率是一个张量，在电场的作用下，本构关系可以写成

$$\mathbf{J}_c = \sigma \cdot \mathbf{E} \quad (1.1-31)$$

式中， σ 代表媒质的张量导电率。

§ 1.2 媒质分界面上的场方程

——边界条件

麦克斯韦方程组的微分形式(1.1-1)~(1.1-4)只适用于媒质的物理性质(由 ϵ , μ 和 σ 来表征)处处连续的空间。但是,电磁波经常要遇到媒质的性质在一个或多个界面处有突变的情况。因而分界面处的矢量 $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{D}$ 也会有不连续的突变。所以,对于这些面上的各点麦克斯韦方程组的微分形式已失去意义,而必需去考虑有限空间中场量之间的关系。这关系是由麦克斯韦方程组的积分形式所制约的。电磁场的边界条件即可由之而导出。

把式(1.1-1)~(1.1-5)对媒质中某一闭合面 S 所包围的体积 V 进行积分,得

$$\int_V \nabla \times \mathbf{H} dV = \int_V \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) dV \quad (1.2-1)$$

$$\int_V \nabla \times \mathbf{E} dV = - \int_V \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dV \quad (1.2-2)$$

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{B} dV = 0 \quad (1.2-3)$$

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{D} dV = \int_V \rho dV \quad (1.2-4)$$

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{J} dV = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad (1.2-5)$$

对式(1.2-1)和(1.2-2)应用矢量斯托克定理

$$\int_V (\nabla \times \mathbf{F}) dV = \oint_S (\hat{n} \times \mathbf{F}) dS \quad (1.2-6)$$

式中, $\mathbf{F}$ 代表任意位置矢量函数, $\hat{n}$ 是界面 S 的外向法线方向上的单位矢量;又对式(1.2-3)~(1.2-5)应用高斯定理

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.2-7)$$

式(1.2-1)~(1.2-5)又可写成

$$\oint_S (\hat{n} \times \mathbf{H}) dS = \int_V \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) dV \quad (1.2-8)$$

$$\oint_S (\hat{n} \times \mathbf{E}) dS = - \int_V \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dV \quad (1.2-9)$$

$$\oint_S (\hat{n} \cdot \mathbf{B}) dS = 0 \quad (1.2-10)$$

$$\oint_S (\hat{n} \cdot \mathbf{D}) dS = \int_V \rho dV \quad (1.2-11)$$

$$\oint_S (\hat{n} \cdot \mathbf{J}) dS = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad (1.2-12)$$

式(1.2-8)~(1.2-11)通称麦克斯韦方程组的积分形式。另外,麦克斯韦-安培定律和法拉第定律的积分形式通常写成

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} \quad (1.2-13)$$

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.2-14)$$

对于边界条件的推导, 式 (1.2-8) 和 (1.2-9) 用起来是比较简便的。

设一个无限小的圆盒横跨电磁性质不同的两种媒质的分界面, 其顶面和底面平行, 并与分界面平行, 见图 1-1。当电磁场从媒质 1 进入媒质 2 遇到分界面时, 场量之间的关系即边界条件即可从式 (1.2-8) ~ (1.2-12) 求得。取圆盒的顶面和底面都向分界面靠拢, 则 Δh_1 和 $\Delta h_2 \rightarrow 0$, 故只要分界面邻近的磁通密度是有限的, 便有

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} (\Delta h_1 \mathbf{B}_1 + \Delta h_2 \mathbf{B}_2) = 0$$

因此, 式 (1.2-9) 变成

$$\hat{n}_1 \times \mathbf{E}_1 + \hat{n}_2 \times \mathbf{E}_2 = 0 \quad (1.2-15)$$

此即 $\mathbf{E}$ 的切向分量的边界条件, 表明 $E_{t1} = E_{t2}$ 。

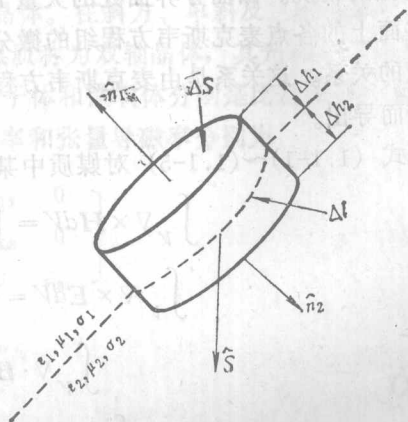


图 1-1 不同媒质的分界面

如分界面上有电荷和电流时, 应用麦克斯韦方程组必须用面电荷密度 ρ_s 和面电流密度 $\mathbf{J}_l$ 的概念, 去代替体电荷密度和电流密度 $\mathbf{J}$, 因为后者在分界面上是奇异的。 ρ_s 和 $\mathbf{J}_l$ 的定义分别为

$$\rho_s = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} (\rho_1 \Delta h_1 + \rho_2 \Delta h_2) \quad (\text{C/m}^2) \quad (1.2-16)$$

$$\mathbf{J}_l = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} (\mathbf{J}_1 \Delta h_1 + \mathbf{J}_2 \Delta h_2) \quad (\text{A/m}) \quad (1.2-17)$$

因此, 由式 (1.2-8) 求得 $\mathbf{H}$ 的切向分量的边界条件是

$$\hat{n}_1 \times \mathbf{H}_1 + \hat{n}_2 \times \mathbf{H}_2 = \mathbf{J}_l, \quad \text{即 } H_{t1} - H_{t2} = J_l \quad (1.2-18)$$

又由式 (1.2-10) 有

$$\oint_S (\hat{n} \cdot \mathbf{B}) dS = (\hat{n}_1 \cdot \mathbf{B}_1 + \hat{n}_2 \cdot \mathbf{B}_2) \Delta S = 0$$

因此, $\mathbf{B}$ 的法向分量的边界条件是

$$\hat{n}_1 \cdot \mathbf{B}_1 + \hat{n}_2 \cdot \mathbf{B}_2 = 0, \quad \text{即 } B_{n1} = B_{n2} \quad (1.2-19)$$

由式 (1.2-11) 又有

$$\oint_S (\hat{n} \cdot \mathbf{D}) dS = (\hat{n}_1 \cdot \mathbf{D}_1 + \hat{n}_2 \cdot \mathbf{D}_2) \Delta S = \rho_s \Delta S$$

故 $\mathbf{D}$ 的法向分量的边界条件是

$$\hat{n}_1 \cdot \mathbf{D}_1 + \hat{n}_2 \cdot \mathbf{D}_2 = \rho_s, \quad \text{即 } D_{n1} - D_{n2} = \rho_s \quad (1.2-20)$$

通过圆盒表面 (顶面, 底面和侧面) 的电流, 由式 (1.2-12) 有

$$\begin{aligned} \oint_S \hat{s} \cdot (\mathbf{J}_1 \Delta h_1 + \mathbf{J}_2 \Delta h_2) dl + (\hat{n}_1 \cdot \mathbf{J}_1 + \hat{n}_2 \cdot \mathbf{J}_2) \Delta S \\ = - \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial t} \Delta h_1 + \frac{\partial \rho_2}{\partial t} \Delta h_2 \right) \Delta S \end{aligned} \quad (1.2-21)$$

为了求出式 (1.2-21) 的极限值, 我们必须引进两维散度 (即表面散度), 它定义为

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_S (\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{F}) dl}{\Delta S} \quad (1.2-22)$$

式中, $\hat{\mathbf{s}}$ 是圆盒侧面的外向法线上的单位矢量, 当 Δh_1 , Δh_2 和 $\Delta S \rightarrow 0$ 时, 式 (1.2-21) 变成

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_l + (\hat{\mathbf{n}}_1 \times \mathbf{J}_1 + \hat{\mathbf{n}}_2 \times \mathbf{J}_2) = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t} \quad (1.2-23)$$

此即 $\mathbf{J}$ 的切向分量的边界条件。为了便于查看与比较, 我们把这些结果与经常遇到的两种特殊情况的边界条件列于表 1-1。完全导体指的是导电率 $\sigma \rightarrow \infty$, 因而内部不存在电磁场的媒质。

表 1-1 边界条件

麦克斯韦方程组	一般边界条件	媒质 I, II 非完全导体	媒质 II 是完全导体
$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\hat{\mathbf{n}}_1 \times \mathbf{H}_1 + \hat{\mathbf{n}}_2 \times \mathbf{H}_2 = \mathbf{J}_l$	$\hat{\mathbf{n}}_1 \times \mathbf{H}_1 + \hat{\mathbf{n}}_2 \times \mathbf{H}_2 = 0$	$\hat{\mathbf{n}}_1 \times \mathbf{H}_1 = \mathbf{J}_l$
$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\hat{\mathbf{n}}_1 \times \mathbf{E}_1 + \hat{\mathbf{n}}_2 \times \mathbf{E}_2 = 0$	$\hat{\mathbf{n}}_1 \times \mathbf{E}_1 + \hat{\mathbf{n}}_2 \times \mathbf{E}_2 = 0$	$\hat{\mathbf{n}}_1 \times \mathbf{E}_1 = 0$
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\hat{\mathbf{n}}_1 \cdot \mathbf{B}_1 + \hat{\mathbf{n}}_2 \cdot \mathbf{B}_2 = 0$	$\hat{\mathbf{n}}_1 \cdot \mathbf{B}_1 + \hat{\mathbf{n}}_2 \cdot \mathbf{B}_2 = 0$	$\hat{\mathbf{n}}_1 \cdot \mathbf{B}_1 = 0$
$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$	$\hat{\mathbf{n}}_1 \cdot \mathbf{D}_1 + \hat{\mathbf{n}}_2 \cdot \mathbf{D}_2 = \rho_f$	$\hat{\mathbf{n}}_1 \cdot \mathbf{D}_1 + \hat{\mathbf{n}}_2 \cdot \mathbf{D}_2 = \rho_f$	$\hat{\mathbf{n}}_1 \cdot \mathbf{D}_1 = \rho_f$
$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$	$\nabla \cdot \mathbf{J}_l + \hat{\mathbf{n}}_1 \cdot \mathbf{J}_1 + \hat{\mathbf{n}}_2 \cdot \mathbf{J}_2 = -\frac{\partial \rho_f}{\partial t}$	$\hat{\mathbf{n}}_1 \cdot \mathbf{J}_1 + \hat{\mathbf{n}}_2 \cdot \mathbf{J}_2 = -\frac{\partial \rho_f}{\partial t}$	$\hat{\mathbf{n}}_1 \cdot \mathbf{J}_1 = -\frac{\partial \rho_f}{\partial t}$

§ 1.3 时谐场中麦克斯韦方程组的表示式

对于单一频率的稳态电磁波, 常称单色波或连续波 (CW), 单色波的电磁场乃时谐场。由于 (1) CW 波的假设可以消除麦克斯韦方程组中的时间因子, 从而大大简化了数学表示式与运算; (2) 一旦 CW 情况得解, 并对频域现象得到深刻理解, 即可应用傅里叶理论研究时域现象; (3) CW 表示可以覆盖电磁波的整个频谱, 因此, 彻底理解 CW 或时谐场情况, 对于研究所有电磁波现象是很重要的。

对于具有角频率 ω 的时谐场, 下面采用

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[\mathbf{E}(\mathbf{r})e^{j\omega t}] \quad (1.3-1)$$

式中, Re 代表复量的实部, 而 $e^{j\omega t}$ 是本书中习用的时间因子。电场矢量 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 则变成与时间无关而仅是位置函数的复矢量。另外, 值得提出的是, 在本书中我们将不采用不同符号把时域中实量, 比如 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ 与频域中复量比如 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 加以区分。然而, 通过上下文, 它们的含义应该是很清楚的。有可能混淆的情况, 我们会明显地把复场量仅用 $\mathbf{r}$ 的函数来表示, 而实时域场用 $\mathbf{r}$ 及 t 的函数表示出来。

相似定义可以应用到其他场量, 只要在式 (1.3-1) 中, $\mathbf{E}$ 代之以 $\mathbf{H}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{D}$ 、 $\mathbf{J}$ 及 ρ 就可以了。把 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ 及 $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ 代入式 (1.1-1), 得

$$\operatorname{Re}\{[\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) - \mathbf{J}(\mathbf{r}) - j\omega \mathbf{D}(\mathbf{r})]e^{j\omega t}\} = 0 \quad (1.3-2)$$

该式对于全部时间 t 都是成立的。当方括号中复量的实部乘以 $e^{j\omega t}$ 的所有值等于零时, 复量本身必须等于零。这是显而易见的, 我们可以认为 $\operatorname{Re}\{Ce^{j\omega t}\} = 0$, 式中 $C = C_R - jC_I$ 代表 C_R 及 C_I 都是实数的复量。设 $\omega t = 0$, 则 $C_R = 0$ 。设 $\omega t = -\pi/2$, 则 $C_I = 0$ 。因此, $C = 0$ 。从而我们可以断言

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega \mathbf{D} \quad (1.3-3)$$

同理, 麦克斯韦方程组的其他各式可写成

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{B} \quad (1.3-4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.3-5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (1.3-6)$$

还有, 电流连续性方程可写成

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -j\omega \rho \quad (1.3-7)$$

上面各式已省写自变量 $\mathbf{r}$ 。

边界条件和式 (1.2-15)、(1.2-18)~(1.2-20) 及 (1.2-23) 中给出的形式是恒同的, 这里只是诸场量代之以复量而已。

值得重视的是, 复场矢量系实场矢量的方便表示形式。如要恢复实空-时相依场矢量, 我们只要把复量乘以 $e^{j\omega t}$ 并取其部, 如式 (1.3-1) 所示。

时谐场情况下, 本构元素一般系复量。对于导电媒质, 麦克斯韦方程 (1.3-3) 可以写成

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega \mathbf{D} + \mathbf{J}_e + \mathbf{J}_s \quad (1.3-8)$$

如考虑 $\mathbf{J}_e = \sigma \cdot \mathbf{E}$, $\mathbf{D} = \varepsilon \cdot \mathbf{E} + \xi \cdot \mathbf{H}$ 的双各向异性媒质, 则

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega \left[\varepsilon \cdot \mathbf{E} - \frac{j}{\omega} \sigma \right] \cdot \mathbf{E} + j\omega \xi \cdot \mathbf{H} + \mathbf{J}_s$$

从而我们可以定义一个张量电容率

$$\varepsilon_n = \varepsilon - \frac{j}{\omega} \sigma \quad (1.3-9)$$

它是一个由媒质的导电率所引起的复量。比如, 当 ε 及 σ 皆属各向同性而为实数时, 导电率 σ 则构成复电容率 $\varepsilon - \frac{j}{\omega} \sigma$ 的虚部。

很多媒质在时变场情况下, 时间色散是常见的现象。比如, 当频率从静态增加到光频范围时, 水滴的电容率从 $80\varepsilon_0$ 下降到近乎 $1.8\varepsilon_0$ 。之所以下降的原因在于具有永久偶极矩的水分子的排列成行, 在光频上要比缓变场大大地无效了。再举另一个例子, 等离子体媒质是由自由电子和正离子组成的中性电离气体。由于离子比电子要重得多, 我们可以假设, 仅需考虑自由电子与电磁波间的相互作用。设电子等离子体所包含的电子的密度为 N , 电子质量为 $9.1 \times 10^{-31} \text{kg}$, 又电荷 $q = -1.6 \times 10^{-19} \text{C}$ 。在外加电磁波的场的作用下, 一个电子所受的洛伦兹力 $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \approx q\mathbf{E}$ (当 $v/c \ll 1$)。又由牛顿第二定律有 $q\mathbf{E} = d(m\mathbf{v})/dt = j\omega m\mathbf{v}$ 。电子所引起的体电流 $\mathbf{J}_p = Nq\mathbf{v}$ 。故式 (1.3-3) 可以写成

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega \mathbf{D} + \mathbf{J}_p + \mathbf{J}_s = j\omega \varepsilon(\omega) \mathbf{E} + \mathbf{J}_s$$

式中

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 \left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right] \quad (1.3-10)$$

又等离子体频率 ω_p 定义为

$$\omega_p = \sqrt{\frac{Nq^2}{m\varepsilon_0}} \approx 56.4\sqrt{N} \quad (1.3-11)$$

式 (1.3-10) 明显地表示出来等离子体电容率 $\varepsilon(\omega)$ 的色散性质, 并且 $\varepsilon(\omega)$ 总是小于 ε_0 。

回旋媒质的本构关系将在第二章中导出。

平时用得较多的导电媒质和磁性媒质的电磁性质分别可以简化表示为复量形式, 即

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon' - j\varepsilon'' \quad (1.3-12)$$

$$\mu(\omega) = \mu' - j\mu'' \quad (1.3-13)$$

实部分别代表媒质的电容率和导磁率, 虚部分别代表媒质极化和磁化过程中损耗因子。

§1.4 波动方程

在 §1.1 中曾指出, 麦克斯韦的重要贡献是在安培定律中引入了称作位移电流的附加项, 揭示了变化的电磁场具有波动的性质。这种以波动形式传播的电磁场, 通称为电磁波。下面我们就从麦克斯韦方程组去找出电磁场随时间和空间而变化的关系——波动方程。

在线性、均匀、各向同性媒质中, 麦克斯韦方程组可写成

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.4-1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (1.4-2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (1.4-3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \quad (1.4-4)$$

取式 (1.4-1) 的旋度并利用式 (1.4-2), 得

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = \nabla \times \mathbf{J} \quad (1.4-5)$$

同样, 取式 (1.4-2) 的旋度并利用式 (1.4-1), 得

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\mu \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \quad (1.4-6)$$

利用矢量恒等式

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{F} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}$$

并考虑到式 (1.4-3) 及 (1.4-4), 式 (1.4-5) 及 (1.4-6) 变成

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = -\nabla \times \mathbf{J} \quad (1.4-7)$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{\rho}{\varepsilon} \right) \quad (1.4-8)$$

式 (1.4-7) 及 (1.4-8) 即称为电磁场量的非齐次波动方程, 表明电磁场以波的形式运动变化, 而电荷和电流是电磁波的源。在无源区域, 它们变为齐次波动方程:

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.4-9)$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.4-10)$$

这表明, 电磁波离开波源之后, 在无耗媒质中, 即使波源消失之后, 根据能量守恒定律, 波将永远向前传播。

在稳态正弦场源的激发之下, 式 (1.4-7) 及 (1.4-8) 化为非齐次亥姆霍兹方程:

$$\nabla^2 \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = -\nabla \times \mathbf{J} \quad (1.4-11)$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = j\omega\mu\mathbf{J} + \nabla\left(\frac{\rho}{\varepsilon}\right) \quad (1.4-12)$$

式中, $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \omega/v$ 称为传播常数或波数; $v = 1/(\mu\varepsilon)^{1/2}$ 即电磁波在媒质中的传播速度。

在无源区域中, 式 (1.4-11) 及 (1.4-12) 变成齐次亥姆霍兹方程:

$$\nabla^2 \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = 0 \quad (1.4-13)$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0 \quad (1.4-14)$$

应当注意的是, 满足麦克斯韦方程组的场必然满足波动方程; 但是满足波动方程并不一定满足麦克斯韦方程 (1.3-5) 或 (1.3-6)。通常先由亥姆霍兹方程 (1.4-13) 或 (1.4-14) 求出磁场或电场, 再由麦克斯韦方程去求另一场量。从而, 所求电磁场必然是实际存在的。

§ 1.5 能量守恒定理

一、坡印亭定理

能量守恒定理可由麦克斯韦方程组很方便地推导出来。用 $\mathbf{H}$ 点乘式 (1.1-2) 并用 $\mathbf{E}$ 点乘式 (1.1-1), 两者相减并利用矢量恒等式 $\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H}$, 可得坡印亭定理:

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \quad (1.5-1)$$

式中, 坡印亭矢量

$$\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (1.5-2)$$

解释为功率流密度 (W/m^2), $\mathbf{H} \cdot (\partial \mathbf{B} / \partial t) + \mathbf{E} \cdot (\partial \mathbf{D} / \partial t)$ 代表所贮电能及磁能的时间变化率, 式 (1.5-1) 的右方系电流 $\mathbf{J}$ 所供给的功率。如考虑一个封闭面 S 所包围的空间 V 涉及的功率流和电磁场贮能之间的关系, 由式 (1.5-1), 坡印亭定理可写成

$$\int_V \left(\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \right) dV = -\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = -\oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.5-3)$$

式中应用了散度定理。以上推导并未针对具体媒质而言, 所以, 式 (1.5-1) 和 (1.5-3) 适用于一般媒质。为了进一步加以解释, 我们来研究均匀、线性、各向同性媒质中的情况。由于 ε 及 μ 是标量, 而且不是时间或场强的函数, 因此

$$\frac{1}{2} \frac{\partial (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E})}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial (\epsilon \mathbf{E}^2)}{\partial t} = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H})}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial (\mu \mathbf{H}^2)}{\partial t} = \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

从而坡印亭定理式 (1.5-1) 和 (1.5-3) 又可分别写成

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{P} = -p \quad (1.5-4)$$

和

$$\int_V \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}}{2} \right) + \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \right] dV = - \oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.5-5)$$

式 (1.5-4) 中, W 代表总贮存能量, $\mathbf{P}$ 代表坡印亭功率密度矢量, $-p = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$ 代表外界供给的功率。而在式 (1.5-5) 中, 左方第一、二项分别代表区域 V 中贮存的磁场能量和电场能量的时间增长率, 即总贮存能量的时间增长率。第三项代表 V 中的欧姆功率损耗, 倘若 $\mathbf{J}$ 是传导电流; 或代表用来加速电荷所需的功率, 倘若 $\mathbf{J}$ 是运流电流; 又如 V 中有能源的话, $\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$ 是负值, 代表流出的功率。其净能差额必须由区域 V 的外部来供给。而右方这一项即代表单位时间内通过封闭面 S 流进区域 V 中的能量。所以, 从区域 V 流出封闭面 S 的总功率必定是它的负值, 等于 $\oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}$ 。

在 § 1.3 中, 麦克斯韦方程组的复数形式的求得, 是在承认这些方程系线性偏微分方程的前提下进行的。在时变坡印亭定理式 (1.5-1) ~ (1.5-5) 中, 涉及场矢量的乘积, 因此是非线性的。所以, 在时谐场中, 要想求得复坡印亭定理, 那就不能简单地用 $j\omega$ 去代替 $\partial/\partial t$ 了, 而步骤还是类似的。下面来加以分析与推导。

用 $\mathbf{H}^*$ 点乘式 (1.3-4) 并用 $\mathbf{E}$ 点乘式 (1.3-3) 的复共轭, 两者相减并利用矢量恒等式 $\mathbf{H}^* \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H}^* = \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)$, 可得复坡印亭定理:

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = -j\omega (\mathbf{H}^* \cdot \mathbf{B} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^*) - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}^* \quad (1.5-6)$$

而复坡印亭矢量定义为

$$\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \quad (1.5-7)$$

值得注意的是, 就坡印亭定理而论, $\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*$ 并非数学上唯一可定义的量。我们可以把任意一个旋度场 $\nabla \times \mathbf{A}$ 与 $\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*$ 相加, 也不会改变式 (1.5-6) 的成立。然而从物理意义上来说, 复矢量 $\mathbf{P}$ 已被确定为复功率密度矢量。

式 (1.5-6) 中 $\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}^* = \mathbf{E} \cdot (\mathbf{J}_c^* + \mathbf{J}_s^*)$, 第一部分由于欧姆电流 $\mathbf{J}_c$, 第二部分由于自由电流 $\mathbf{J}_s$ 。我们可以把式 (1.5-6) 重新写成

$$-\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_s^* = \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) + \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_c^* + j\omega (\mathbf{H}^* \cdot \mathbf{B} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^*) \quad (1.5-8)$$

如考虑一个封闭面 S 所包围的空间 V 涉及的复功率流和电磁贮能之间的关系, 并应用散度定理, 复坡印亭定理式 (1.5-8) 又可以写成

$$\int_V -\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_s^* dV = \oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot d\mathbf{S} + \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_c^* dV + \int_V j\omega (\mathbf{H}^* \cdot \mathbf{B} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^*) dV \quad (1.5-9)$$

表明, 由 $\mathbf{J}_s$ 供给 V 的复功率 $(-\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_s^*)$ 等于通过封闭面 S 流出 V 的复坡印亭功率 $(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)$, 加上消耗在 V 中的复功率 $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_c^*)$, 再加上贮存在 V 中的复电磁能量。

为了将复矢量应用到包含有功率关系的问题, 我们可以采用平均功率的概念。

复场矢量 $E(\mathbf{r})$ 和 $H(\mathbf{r})$ 可以用两个实矢量来表示, 写成

$$E(\mathbf{r}) = E_R(\mathbf{r}) + jE_I(\mathbf{r}) \quad (1.5-10)$$

$$H(\mathbf{r}) = H_R(\mathbf{r}) + jH_I(\mathbf{r}) \quad (1.5-11)$$

场矢量的瞬时值则为

$$E(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[E(\mathbf{r})e^{j\omega t}] = E_R \cos \omega t - E_I \sin \omega t \quad (1.5-12)$$

$$H(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[H(\mathbf{r})e^{j\omega t}] = H_R \cos \omega t - H_I \sin \omega t \quad (1.5-13)$$

由式 (1.5-7) 得复坡印亭矢量为

$$P(\mathbf{r}) = E \times H^* = E_R \times H_R + E_I \times H_I + j(E_I \times H_R - E_R \times H_I) \quad (1.5-14)$$

瞬时坡印亭矢量 $P(\mathbf{r}, t)$ 则定义为

$$P(\mathbf{r}, t) = E(\mathbf{r}, t) \times H(\mathbf{r}, t) \quad (1.5-15)$$

把式 (1.5-12) 和 (1.5-13) 代入, 得

$$P(\mathbf{r}, t) = E_R \times H_R \cos^2 \omega t + E_I \times H_I \sin^2 \omega t - (E_R \times H_I + E_I \times H_R) \sin \omega t \cos \omega t \quad (1.5-16)$$

显而易见, 式 (1.5-16) 丝毫不是由场矢量规则与式 (1.5-4) 联系起来, 瞬时坡印亭矢量 $P(\mathbf{r}, t)$ 乃是依赖于时间的实矢量。为了要把 $P(\mathbf{r})$ 与 $P(\mathbf{r}, t)$ 联系起来, 我们必须消掉 $P(\mathbf{r}, t)$ 中的时间依赖关系。这可由时间平均过程来完成, 即时均坡印亭矢量

$$\begin{aligned} P_{av} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d(\omega t) P(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} [E_R \times H_R + E_I \times H_I] \\ &= \frac{1}{2} \text{Re}[P(\mathbf{r})] = \frac{1}{2} \text{Re}[E \times H^*] \end{aligned} \quad (1.5-17)$$

式中, 第一个等式定义成 $P(\mathbf{r}, t)$ 的时间平均值, 第二个等式可由式 (1.5-16) 得到, 最后一个等式则得自式 (1.5-14)。因此, 当复坡印亭功率矢量 $P(\mathbf{r}) = E \times H^*$ 已知时, 取其实数的一半, 即等于瞬时坡印亭矢量的时间平均值, 如式 (1.5-17) 所示。这一规则通常适用于任意两个矢量场量的乘积。

二、动量守恒定理

电磁场不仅具有能量和能量流, 而且具有动量和动量流。我们可以从坡印亭矢量的时间变化率和麦克斯韦方程组中的两个旋度方程入手, 导出电磁场及其源系统的动量守恒定律。下面首先讨论自由空间中存在电磁场 (E, H) 和连续分布源 (ρ, J) 系统的情况。

式 (1.5-2) 给出坡印亭矢量

$$P = E \times H$$

因此

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (E \times H) = \frac{\partial E}{\partial t} \times H + E \times \frac{\partial H}{\partial t} \quad (1.5-18)$$

把两个旋度方程 (1.1-1) 及 (1.1-2) 中的关系代入上式, 可得

$$\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial P}{\partial t} = \mu_0 (\nabla \times H) \times H - J \times \mu_0 H - \epsilon_0 E \times (\nabla \times E)$$