“十一五”高职高专公共基础课规划教材

高等数学

（经管类）

■ 宋蔡健 陈燕 主编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

“十一五”高职高专公共基础课规划教材

高等数学（经管类）

宋蔡健　陈　燕　主　编
朱建国　副主编

机　械　工　业　出　版　社

本书是根据教育部《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》和中国职业技术教育学会数学教学研究会(高职)研讨确定的经济管理类专业高职数学的内容体系、教学体系等整体教学方案而编写的.

考虑到高职教育、特别是两年制高职教育的特点，全书始终贯彻“在基础课的教学中，以应用为目的，以必须、够用为度”的精神，以“掌握概念、强化应用、培养技能”为重点，对传统的教学内容进行了一定的删减，使内容精练、结构合理、切合学生实际.

本书可供高职高专院校，特别是两年制高职高专院校经济管理类师生使用.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 经管类/宋蔡健，陈燕主编. —北京：机械工业出版社，2005.7

“十一五”高职高专公共基础课规划教材

ISBN 7-111-16859-3

Ⅰ.高... Ⅱ ①宋 ②陈 Ⅲ 高等数学—高等学校：技术学校—教材 Ⅳ 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 074400 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

策划编辑：宋学敏 责任编辑：徐永杰 版式设计 霍永明

责任校对：张晓蓉 封面设计：王伟光 责任印制 陶 湛

北京铭成印刷有限公司印刷

2005 年 8 月第 1 版第 1 次印刷

1000mm × 1400mm B5 · 7 125 印张 · 276 千字

定价：19.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

本社购书热线电话(010)68326294

前　言

目前，我国的高等职业教育正面临进一步发展的契机，为了适应高职高专培养高等技术应用型人才的需要，急需编写适用的、具有特色的教材，特别是编写适合两年制高职高专的教材．我们根据教育部《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》和中国职业技术教育学会数学教学研究会（高职）研讨确定的经济管理类专业高职数学的内容体系、教学体系等整体教学方案编写了本教材．

本教材力求贯彻“以应用为目的，以必须、够用为度”和“少而精”原则，注重讲清概念，减少理论证明，注重学生基本运算能力和分析问题、解决问题能力的培养，内容精练、结构合理、切合学生实际、通俗易懂．既便于教师教，又便于学生学，努力体现两年制高职高专教育的特色．

本教材参考学时为108学时．

本教材可供高职高专院校，特别是两年制高职高专院校经济管理类师生使用。

本教材共7章，分别由宋蔡健（第1、2章）、陈燕（第3、4章）、朱建国（第5、6、7章）编写，全书由宋蔡健任第一主编、陈燕任第二主编，朱建国任副主编．

本教材由南京师范大学涂荣豹教授主审，对此，我们表示衷心感谢！

由于我们的经验不足，水平有限，书中难免存在不妥之处，敬请广大师生、读者批评指正．

编　者

目　录

第二篇 线性代数

第一篇 微积分

第 1 章 函数、极限与连续

函数是近代数学的基本概念之一. 微积分是以函数为主要研究对象的一门数学课程. 极限是贯穿微积分始终的一个重要概念，它是这门课程的基本推理工具，连续则是函数的一个重要性态，连续函数是微积分研究的主要对象. 在这一章将介绍函数、极限与连续的基本知识.

1.1 函数

函数是微积分研究的对象. 在这里我们不是对已经学习过的函数概念进行简单地重复，而是要从全新的视角来对它进行描述并重新分类.

1.1.1 函数的概念

在同一个自然现象或经济问题中，常常出现多个变量，这些变量之间往往不是互相独立的，而是存在着确定的依赖关系，一个量或一些量的变化会引起另一个量或另一些量的变化. 如果这些影响是确定的，是依照某一规则的，那么我们说这些变量之间存在着函数关系.

例如，生产某种产品的固定成本为 9600 元，每生产一件产品，成本增加 80 元，那么这种产品的总成本 y 与产量 x 的关系可用下面的式子表示为

$$y=80x+9600$$

当产量 x 取任何一个合理的值时，成本 y 有确定的值和它对应，我们说成本 y 是产量 x 的函数.

定义 1.1 设 x 和 y 是两个变量，若当变量 x 在非空数集 D 内任取一数值时，变量 y 依照某一规则 f 总有一个确定的数值与之对应，则称变量 y 为变量 x 的**函数**，记作 $y=f(x)$. 这里，x 称为**自变量**，y 称为**因变量**或**函数**. f 是函数符号，它表示 y 与 x 的对应规则. 有时函数符号也可以用其他字母来表示，如 $y=g(x)$ 或 $y=\varphi(x)$ 等.

D 称为函数的**定义域**，相应的 y 值的集合则称为函数的**值域**.

当自变量 x 在其定义域内取定某确定值 x_0 时，因变量 y 按照所给函数关系 $y=f(x)$ 求出的对应值 y_0 叫做当 $x=x_0$ 时的函数值，记作$y\big|_{x=x_0}$或$f(x_0)$.

例 1 已知$f(x)=x^2-2x+3$. 求$f(0)$，$f(-1)$，$f(-2)$，$f(t+1)$.

解 $f(0)=0^2-2\times0+3=3$

$f(-1)=(-1)^2-2\times(-1)+3=6$

$f(-2)=(-2)^2-2\times(-2)+3=11$

$f(t+1)=(t+1)^2-2(t+1)+3=t^2+2$

例 2 求下列函数的定义域.

(1) $f(x)=\dfrac{5}{2x^2+3x}$　　(2) $f(x)=\sqrt{16-x^2}$

(3) $f(x)=\lg(5x-11)$　　(4) $f(x)=\arccos(2x-5)$

(5) $f(x)=\lg(5x-11)-\arccos(2x-5)$

解 (1) 在分式$\dfrac{5}{2x^2+3x}$中，分母不能为零，所以 $2x^2+3x\neq0$ 解得 $x\neq-\dfrac{3}{2}$ 且 $x\neq0$，即定义域为

$$\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)\cup\left(-\frac{3}{2},0\right)\cup(0,+\infty)$$

(2) 在偶次根式中，被开方式必须大于等于零，所以有 $16-x^2\geqslant0$，解得 $-4\leqslant x\leqslant4$ 即定义域为$[-4,4]$.

(3) 在对数式中，真数必须大于零，所以有 $5x-11>0$，解得 $x>\dfrac{11}{5}$，即定义域为$\left(\dfrac{11}{5},+\infty\right)$.

(4) 反正弦或反余弦中的式子的绝对值必须小于等于1，所以有 $-1\leqslant2x-5\leqslant1$，解得 $2\leqslant x\leqslant3$，即定义域为$[2,3]$.

(5) 该函数为(3)、(4)两例中函数的代数和，此时函数的定义域应为(3)、(4)两例中定义域的交集，即$\left(\dfrac{11}{5},+\infty\right)\cap[2,3]=\left(\dfrac{11}{5},3\right]$.

在实际应用问题中，除了要根据解析式子本身来确定自变量的取值范围以外，还要考虑到变量的实际意义，一般来说，经济变量往往取正值，即变量都是大于零的.

1.1.2 函数的表示法

常用的函数表示法有解析法(又称公式法)、表格法和图形法. 表格法使用方便，如各种统计报表、函数表，缺点是不能完全反映两个变量之间的关系. 图

示法使函数的变化直观醒目，缺点是不够准确和完整. 解析法的优点是简明、准确，便于运算和分析，是微积分中常用的方法.

1.1.3 分段函数

有些函数虽然也是数学式子表示，但是它们在定义域的不同范围具有不同的表达式. 这样的函数叫做分段函数，分段函数在数学上和经济问题中都会经常遇到.

例 3 旅客乘坐火车可免费携带不超过 20kg 的物品，超过 20kg 而不超过 50kg 的部分每公斤交费 0.20 元，超过 50kg 部分每公斤交费 0.3 元，则运费与携带物品重量的函数关系可用下面的形式给出

$$y=\begin{cases}0, & x\in[0,20]\\ 0.2(x-20), & x\in(20,50]\\ 0.2(50-20)+0.3(x-50), & x\in(50,+\infty)\end{cases}$$

例 4 设函数

$$y=f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x>0\\ 2, & x=0\\ 3x, & x<0\end{cases}$$

当 x 取$(0,+\infty)$内的值时，y 的值由关系式 $y=x^2+1$ 来计算；当 $x=0$ 时，$y=2$；当 x 取$(-\infty,0)$内的值时，y 的值由关系式 $y=3x$ 来计算. 如 $f(3)=3^2+1=10$，$f(-5)=3\times(-5)=-15$. 它的图像如图 1-1 所示.

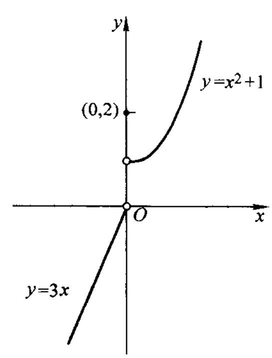


图 1-1

注意：分段函数是由几个关系式合起来表示一个函数，而不是几个函数. 对于自变量 x 在定义域内的某个值，分段函数 y 只能确定惟一的值. 分段函数的定义域是各段自变量取值集合的并集.

例 5 设函数

$$f(x)=\begin{cases}\cos x, & -4\leqslant x\leqslant 1\\ 2, & 1\leqslant x\leqslant 5\\ 5x-1, & x\geqslant 5\end{cases}$$

求 $f(\pi)$，$f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$，$f(5.5)$及函数的定义域.

解 因为 $\pi\in[1,5]$，所以 $f(\pi)=2$；因为 $-\dfrac{\pi}{2}\in[-4,1]$，所以 $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=0$；因为 $5.5\in[5,\infty)$，所以 $f(5.5)=5\times5.5-1=26.5$；函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-4,+\infty)$.

1.1.4 函数的基本性态

1. 函数的单调性

定义 1.2 如果函数 $y=f(x)$ 对区间 (a,b) 内的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是**单调增加的**；当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是**单调减少的**.

单调增加函数与单调减少函数统称为**单调函数**.

单调增加函数的图像是沿 x 轴正向逐渐上升的，如图 1-2 所示；单调减少函数的图像是沿 x 轴正向逐渐下降的，如图 1-3 所示.

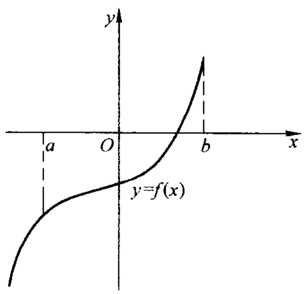


图 1-2

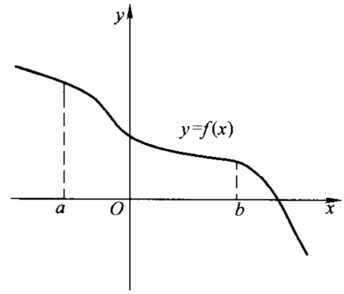


图 1-3

例 6 验证函数 $y=5x-3$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增加的.

证明 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内任取两点 $x_1<x_2$，于是 $f(x_1)-f(x_2)=(5x_1-3)-(5x_2-3)=5(x_1-x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，所以 $y=5x-3$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增加的.

2. 函数的奇偶性

定义 1.3 设函数 $y=f(x)$ 在集合 D 上有定义，如果对任意的 $x\in D$，恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；如果对任意的 $x\in D$，恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.

由定义可知，对任意的 $x\in D$，必有 $-x\in D$，否则，$f(-x)$ 没有意义. 因此函数具有奇偶性时，其定义域必定是关于原点对称的.

对于偶函数，因 $f(-x)=f(x)$，点 $P(x,f(x))$ 如果是曲线上的一个点，则它关于 y 轴的对称点 $Q(-x,f(x))$，也是曲线上的点. 所以，偶函数的图像是对称于 y 轴的，如图 1-4 所示.

对于奇函数，因 $f(-x)=-f(x)$，点 $P(x,f(x))$ 如果是曲线上的一个点，则它关于原点的对称点 $Q(-x,-f(x))$，也是曲线上的点. 所以，奇函数的图像是对称于原点的，如图 1-5 所示.

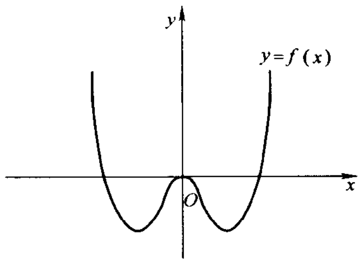


图 1-4

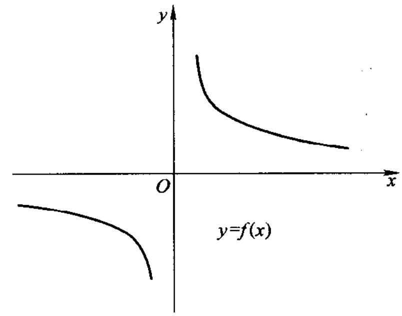


图 1-5

例 7 判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=x^3\cos x$ (2) $f(x)=x(1-x)$

(3) $f(x)=\begin{cases}1-e^{-x}, & x\leqslant 0\\ e^x-1, & x\geqslant 0\end{cases}$

解 (1) 因为 $f(-x)=(-x)^3\cos(-x)=-x^3\cos x=-f(x)$, 所以 $f(x)=x^3\cos x$ 为奇函数.

(2) 因为 $f(-x)=(-x)[1-(-x)]=-x(1+x)\neq f(x)$, (也不等于 $-f(x)$), 所以 $f(x)=x(1-x)$ 为非奇非偶函数.

(3)因为

$$f(-x)=\begin{cases}1-e^{-(-x)}, & -x\leqslant 0\\ e^{(-x)}-1, & -x\geqslant 0\end{cases}=\begin{cases}1-e^{x}, & x\geqslant 0\\ e^{-x}-1, & x\leqslant 0\end{cases}=\begin{cases}-(e^x-1), & x\geqslant 0\\ -(1-e^{-x}), & x\leqslant 0\end{cases}=-f(x),$$

所以

$$f(x)=\begin{cases}1-e^{-x}, & x\leqslant 0\\ e^x-1, & x\geqslant 0\end{cases}\text{ 为奇函数.}$$

3. 函数的有界性

定义 1.4 设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义, 若存在一个正数 M, 对任意的 $x\in(a,b)$ 时, 恒有 $|f(x)|\leqslant M$, 则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是有界的. 如果不存在这样的正数 M, 则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内是**无界的**.

例如, 因为当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时, 恒有 $|\sin x|\leqslant 1$, 所以 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界函数, 而 $f(x)=\tan x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内不是有界函数.

有的函数可能在定义域的某一部分有界, 而在另一部分无界.

例如, $f(x)=\tan x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$ 上是有界的, 而在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内是无界的,

因此，我们说一个函数是有界的或者无界的，应同时指出其自变量的相应范围.

4. 函数的周期性

定义 1.5 对于函数 $y=f(x)$，如果存在正数 a，使 $f(x)=f(x+a)$ 恒成立，则称此函数为**周期函数**. 满足这个等式的最小正数 a 称为**函数的周期**. 例如 $y=\sin x$ 是周期函数，周期为 2π.

1.1.5 反函数

设某种商品的单价为 p，销售量为 x，则收入 y 是 x 的函数

$$y=px$$

如果给定了销售量 x，则可以通过关系 $y=px$ 确定销售总收入 y，这种由销售量确定销售总收入的关系称为销售总收入是销售量的函数. 但是反过来，如果给定了销售总收入 y，则可以由关系 $x=\dfrac{y}{p}$ 确定销售量 x，这种由销售总收入确定销售量的关系称为销售量是销售总收入的函数. 我们称后一函数 $\left(x=\dfrac{y}{p}\right)$ 是前一函数 $(y=px)$ 的反函数，或者说它们互为反函数.

定义 1.6 设 $y=f(x)$ 是 x 的函数，其值域为 $\mathbf{R}$，如果对于 $\mathbf{R}$ 中的每一个 y 值，都有一个确定的且满足 $y=f(x)$ 的 x 值与之对应，则得到一个定义在 $\mathbf{R}$ 上的以 y 为自变量，x 为因变量的新函数，我们称它为 $y=f(x)$ 的**反函数**，记作 $x=f^{-1}(y)$，并称 $y=f(x)$ 为**直接函数**.

由定义可知，单调函数一定有反函数. 由于人们习惯于用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，所以通常把 $x=f^{-1}(y)$ 改写为 $y=f^{-1}(x)$.

求反函数可以分为两步：第一步从 $y=f(x)$ 解出 $x=f^{-1}(y)$；第二步交换字母 x 和 y.

例 8 求 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$ 的反函数.

解 由 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$ 得到 $x=\log_2\left(\dfrac{y}{1-y}\right)$，交换 x 和 y 的位置，即得所求的反函数 $y=\log_2\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$，其定义域为 $(0,1)$.

可以证明，函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

1.1.6 基本初等函数及其图形

我们在中学学习过的幂函数 $y=x^a$（a 为任意实数）；指数函数 $y=a^x$（$a>0$，且

$a\neq 1$)；对数函数 $y=\log_a x$($a>0$,且 $a\neq 1$)；三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$ 和反三角函数 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$ 等 5 类函数统称为基本初等函数. 它们的图形分别如图 1-6 所示.

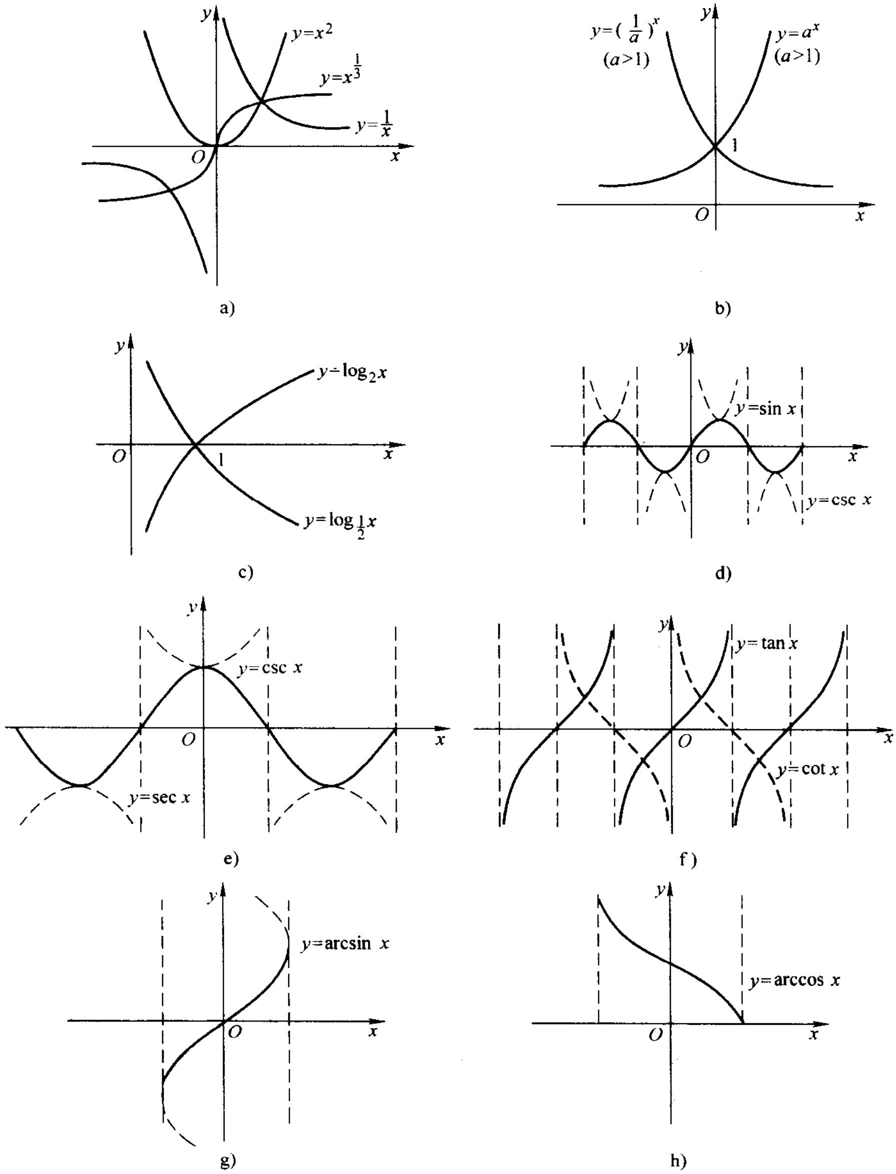
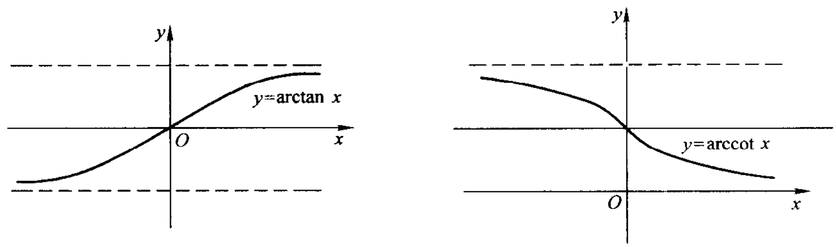


图 1-6



i) j)

图 1-6(续)

1.1.7 复合函数与初等函数

1. 复合函数

在经济活动中，我们会遇到这样的问题：一般来说成本 C 可以看作是产量 q 的函数，而产量 q 又是时间 t 的函数，时间 t 通过产量 q 间接影响成本 C，那么成本 C 仍然可以看作时间 t 的函数，C 与 t 的这种函数关系称作一种复合的函数关系.

定义 1.7 设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，u 是 x 的函数 $u=\varphi(x)$. 如果 D 表示 $\varphi(x)$的定义域或者是定义域的一部分，当 x 在 D 上取每一个值时，所对应的 u 使 $f(u)$有定义，则称 y 是 x 的复合函数，记作

$$y=f[\varphi(x)]$$

其中，x 是自变量，u 称作中间变量.

必须指出：

（1）不是任何两个函数拼凑在一起都能成为一个复合函数的，例如 $y=\ln u$ 和 $u=x-\sqrt{x^2+1}$就不能构成复合函数，因为 $u=x-\sqrt{x^2+1}$的值域是 $u<0$，而 $y=\ln u$的定义域是 $u>0$，前者函数的值域完全没有被包含在后者函数的定义域中.

（2）复合函数不仅可以有一个中间变量，还可以有多个中间变量，这些中间变量是经过多次复合产生的.

（3）复合函数通常不一定是由纯粹的基本初等函数复合而成，而更多地是由基本初等函数经过四则运算形成的简单函数构成的，这样，复合函数的合成和分解往往是对简单函数而言的.

例 9 试求函数 $y=u^2$ 与 $u=\cos x$ 构成的复合函数.

解 将 $u=\cos x$ 代入 $y=u^2$ 中，即为所求的复合函数 $y=\cos^2 x$.

例 10 设 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$，$\varphi(x)=\sqrt{\sin x}$，求 $f[\varphi(x)]$，$\varphi[f(x)]$.

解 （1）求 $f[\varphi(x)]$ 时，应将 $f(x)$ 中的 x 视为 $\varphi(x)$，因此

$$f[\varphi(x)]=\frac{1}{1+\sqrt{\sin x}}$$

（2）求 $\varphi[f(x)]$ 时，应将 $\varphi(x)$ 中的 x 视为 $f(x)$，因此

$$\varphi\left[f(x)\right]=\sqrt{\sin\frac{1}{1+x}}$$

例 11 指出下列复合函数是由哪些简单函数复合而成的.

（1）$y=(3x+5)^{10}$　　　　（2）$y=\sqrt{\log_a(\sin x+2^x)}$

解 （1）$y=(3x+5)^{10}$ 是由 $y=u^{10}$ 和 $u=3x+5$ 复合而成的.

（2）$y=\sqrt{\log_a(\sin x+2^x)}$ 是由 $y=\sqrt{u}$，$u=\log_a v$，$v=\sin x+2^x$ 复合而成的.

2. 初等函数的定义

由基本初等函数及常数经过有限次地四则运算和有限次地复合而成，并用一个数学式子表示的函数统称初等函数.

例如，$y=\sqrt{\ln 5x-3^x-\sin^2 x}$，$y=\dfrac{\sqrt[3]{2x}+\tan 3x}{x^2\sin x-2^{-x}}$ 等等，都是初等函数. 而 $y=1+x+x^2+x^3+\cdots$ 不满足有限次运算，$y=\begin{cases}3^x, & x\geqslant 0\\ x^2, & x<0\end{cases}$ 不是一个解析式子表达的，因此都不是初等函数.

1.2 极限的概念

1.2.1 数列的极限

1. 数列

无穷多个按一定规则排列的一串数 u_1，u_2，u_3，…，u_n，…称作数列，简记作 $\{u_n\}$. 其中的每一项称为数列的项，第 n 项 u_n 称为一般项或通项.

例如：（1）$\{u_n\}$：2，$\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{4}{3}$，…，$1+\dfrac{1}{n}$，…，为单调递减数列，且是有界的.

（2）$\{u_n\}$：0，$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{3}{4}$，…，$1-\dfrac{1}{n}$，…，是单调递增数列，也是有界的.

（3）$\{u_n\}$：1，-1，1，-1，…，$(-1)^{n-1}$，…，是有界数列，但不单调.

（4）$\{u_n\}$：1，4，9，…，n^2，…，是单调递增且无界的数列.

(5) $\{u_n\}$: -1, -2, -3, $\cdots$, $-n$, $\cdots$, 是单调递减且无界的数列;

(6) $\{u_n\}$: -1, 2, -3, 4, $\cdots$, $(-1)^n n$, $\cdots$, 既不是单调又不是有界的数列.

数列可以看作是定义域为全体正整数的函数.

2. 数列的极限

观察上面的几个数列可以发现, 当 n 趋于无穷大时, 它们的变化趋势是不相同的. 数列(1)和数列(2), 当 n 无限变大时, 都会趋于某一个常数, 这样的数列, 我们称它是有极限的.

定义 1.8 对于数列 $\{u_n\}$, 如果当 n 无限变大时, u_n 趋于一个常数 A, 则称当 n 趋于无穷大时, 数列 $\{u_n\}$ 以 A 为极限, 记作

$$\lim_{n\to\infty} u_n = A \quad 或 \quad u_n \to A(n\to\infty)$$

亦称数列 $\{u_n\}$ 收敛于 A; 如果数列 $\{u_n\}$ 没有极限, 就称 $\{u_n\}$ 是发散的.

1.2.2 函数的极限

1. $x\to\infty$ 时函数的极限

定义 1.9 如果当 $x\to+\infty$ 时, 函数 $f(x)$ 趋于一个常数 A, 则称当 $x\to+\infty$ 时函数 $f(x)$ 以 A 为极限, 记作

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A \quad 或 \quad f(x)\to A(x\to+\infty)$$

如果当 $x\to-\infty$ 时, 函数 $f(x)$ 趋于一个常数 A, 则称当 $x\to-\infty$ 时函数 $f(x)$ 以 A 为极限, 记作

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A \quad 或 \quad f(x)\to A(x\to-\infty)$$

如果当 $|x|$ 无限增大时, 函数 $f(x)$ 趋于一个常数 A, 则称当 $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 以 A 为极限, 记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \quad 或 \quad f(x)\to A(x\to\infty)$$

例 1 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$.

解 函数的图像如图 1-7 所示. 当 $x\to+\infty$ 时, $\dfrac{1}{x^2}$ 无限变小, 函数值趋于 1; $x\to-\infty$ 时, 函数值同样趋于 1, 所以有

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = 1$$

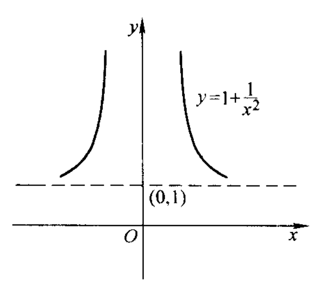


图 1-7

例 2 求 $\lim\limits_{x\to-\infty} 3^x$.

解 当 $x\to-\infty$ 时, $3^x\to 0$, 即 $\lim\limits_{x\to-\infty} 3^x = 0$.

2. 当 $x \to x_0$ 时函数的极限

考察函数 $f(x)=2x+1$，当 x 分别从左边和右边趋于 $\frac{1}{2}$ 时的变化情况，见表 1-1.

表 1-1 $f(x)$ 当 $x \to \frac{1}{2}$ 时的变化情况

x	0	0.1	0.3	0.4	0.49	…	0.5	…	0.51	0.6	0.9	1
y	1	1.2	1.6	1.8	1.98	…	2	…	2.02	2.2	2.8	3

不难看出，$f(x)$ 无限地趋于常数 2. 我们称，当 $x \to \frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 的极限是 2.

定义 1.10 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域内有定义，如果当 $x \to x_0$ 时，$f(x)$ 趋于一个常数 A，则称当 $x \to x_0$ 时，$f(x)$ 以 A 为极限，记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x)=A \quad 或 \quad f(x) \to A(x \to x_0)$$

亦称当 $x \to x_0$ 时，$f(x)$ 的极限存在，否则称当 $x \to x_0$ 时，$f(x)$ 的极限不存在.

3. 左极限和右极限

定义 1.11 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的右侧的某个邻域（点 x_0 本身可以除外）内有定义，当 x 从 x_0 右侧趋于 x_0 时，$f(x)$ 趋于一个常数 A，则称 A 是当 x 趋于 x_0 时，$f(x)$ 在 x_0 点的右极限，记作

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x)=A \quad 或 \quad f(x) \to A(x \to x_0^{\ +})$$

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 左侧的某个邻域（点 x_0 本身可以除外）内有定义，当 x 从 x_0 左侧趋于 x_0 时，$f(x)$ 趋于一个常数 A，则称 A 是当 x 趋于 x_0 时，$f(x)$ 在 x_0 点的左极限，记作

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x)=A \quad 或 \quad f(x) \to A(x \to x_0^-)$$

定理 1.1（极限存在的充分必要条件） $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=A$ 的充分必要条件是

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x)=A=\lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

即左、右极限都存在且相等.

例 3 试求函数 $f(x)=\begin{cases} x+1, & -\infty<x<0 \\ x^2, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1, & x>1 \end{cases}$ 在 $x=0$ 和 $x=1$ 处的极限.

解 (1) 因为

$$\lim_{x \to 0^-} f(x)=\lim_{x \to 0^-}(x+1)=1$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x)=\lim_{x \to 0^+} x^2=0$$