通用版

NEW

高中新课程导读丛书

数学

必修 4

主编：李尚辉

湖南文艺出版社

高中新课程导读丛书

数　学 必修4

主编：李尚辉

编者：何　涌　龙伏强

湖南文艺出版社

图书在版编目（CIP）数据

高中新课程导读丛书．数学．4：必修/李尚辉主编．
长沙：湖南文艺出版社，2008．2
ISBN 978-7-5404-4092-3

Ⅰ.高… Ⅱ.李… Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料
Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 017272 号

高中新课程导读丛书

数学必修 4

李尚辉　主编

责任编辑：徐应才

湖南文艺出版社出版、发行

（长沙市雨花区东二环一段 508 号　邮编：410014）

网址：www.hnwy.net

湖南省新华书店经销

湖南新华印刷集团有限责任公司(邵阳)印刷

*

2008 年 2 月第 1 版第 1 次印刷

开本：787×1092mm　1/16　印张：9

字数：200,000

ISBN 978-7-5404-4092-3

定价：12.00 元

目　录

第一章　三角函数

第二章　平面向量

第三章　三角恒等变换

第一章　三角函数

1.1　任意角和弧度制

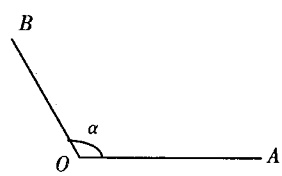
课标解读

1. 结合实例，认识概念的推广的必要；
2. 了解引进弧度制的作用和意义；
3. 初步学会在平面坐标系中讨论任意角，并能熟练写出与已知角终边相同的角的集合；
4. 体会弧度也是一种度量角大小的单位；
5. 了解任意角的概念和弧度制，能进行弧度与度的互化.

第1讲　任意角

知识要点

1. 角可以看成平面内一条射线绕着端点从一个位置旋转到另一个位置所成的图形. 如图 1.1－1，一条射线由原来的位置 OA，绕着它的端点 O 按逆时针方向旋转到终止位置 OB，就形成角 α. 旋转开始时的射线 OA 叫做角的始边，OB 叫终边，射线的端点 O 叫做叫 α 的顶点.



1.1－1

2. 我们把按逆时针方向旋转所形成的角叫正角，按顺时针方向旋转所形成的角叫负角，如果一条射线没有作任何旋转，我们称它形成了一个零角.

3. 角的顶点与原点重合，角的始边与 x 轴的非负半轴重合. 那么，角的终边（除端点外）在第几象限，我们就说这个角是第几象限角.

4. 所有与角 α 终边相同的角，连同角 α 在内，可构成一个集合，$S=\{\beta \mid \beta=\alpha+k\cdot 360°, k\in\mathbf{Z}\}$，即任一与角 α 终边相同的角，都可以表示成角 α 与整数个周角的和.

课程探究

1. 用扳手拧螺母、跳水运动员身体旋转，说明旋转第二周、第三周……，则形成了更大范围内的角；自行车车轮、螺丝扳手等按不同方向旋转时成不同的角，这些角显然超出了我们已有的认识范围，本节课将在已掌握 0°～360°角的范围基础上，重新给出角的定义.

2. 用旋转的方法定义角以后，根据旋转的方向定义了角的正负，旋转的圈数得到角的绝对值的大小，这样角的范围就由初中的 0°～360°推广到了现在的－∞～＋∞. 即把角的概念推广到了任意角.

3. 引入象限角是为了以后研究角和三角函数的方便，角的顶点与原点重合，角的始边与 x 轴的非负半轴重合. 那么，角的终边在第几象限，这个角是第几象限角. 这样的角称为象限角，当角的终边落在坐标轴上时我们常称之为轴上角，从这个角度上说角常分为象限

角和轴上角两类.

4. x 轴上的角：$\{\alpha|\alpha=k180°,k\in\mathbf{Z}\}$

y 轴上的角：$\{\alpha|\alpha=k180°+90°,k\in\mathbf{Z}\}$

第一象限角：$\{\alpha|k360°<\alpha<k360°+90°,k\in\mathbf{Z}\}$

第二象限角：$\{\alpha|k360°+90°<\alpha<k360°+180°,k\in\mathbf{Z}\}$

第三象限角：$\{\alpha|k360°+180°<\alpha<k360°+270°,k\in\mathbf{Z}\}$

第四象限角：$\{\alpha|k360°+270°<\alpha<k360°+360°,k\in\mathbf{Z}\}$

方法整合 »»»

【例 1】 设 $E=\{$小于 90°的角$\}$，$F=\{$锐角$\}$，$G=\{$第一象限的角$\}$，$M=\{$小于 90°但不小于 0°的角$\}$，那么有 （ ）

A. $F\subsetneqq G\subsetneqq E$　　B. $F\subsetneqq E\subsetneqq G$　　C. $M\subsetneqq (E\cap G)$　　D. $G\cap M=F$

【分析】 角的范围扩大了，小于 90°的角可以是负角，第一象限的角可以超过 360°，而锐角是大于 0°小于 90°的角.

【答案】 D.

【例 2】 写出终边在 x 轴的负半轴上的角的集合.

【分析】 要求这些角的集合，根据终边相同的角的表示法，关键只要找出符合这个条件的一个角即 α，然后在后面加上 $k\times360°$ 即可.

解 ∵在 0°～360°间，终边在 x 轴负半轴上的角为 180°，∴终边在 x 轴负半轴上的所有角构成的集合是 $\{\beta\mid\beta=180+k\times360°,\ k\in\mathbf{Z}\}$

【例 3】 在 0°～360°间，找出与下列各角终边相同的角，并判定它们是第几象限角.

（1）－12℃；（2）660°；（3）－950°08′.

解 （1）∵ $-120°=240°-360°$

∴与－120°角终边相同的角是 240°角，它是第三象限的角；

（2）∵ $660°=300°+360°$

∴与 660°终边相同的角是 300°，它是第四象限的角；

（3）$-950°08'=129°52'-3\times360°$

所以与－950°08′角终边相同的角是 129°52′，它是第二象限角.

【点悟】

（1）的草式

$$\begin{array}{r} -1 \\ 360°\overline{)\,-120°} \\ \underline{-360°} \\ 240° \end{array}$$

（2）的草式

$$\begin{array}{r} 1 \\ 360°\overline{)\,660°} \\ \underline{360°} \\ 300° \end{array}$$

（3）的草式

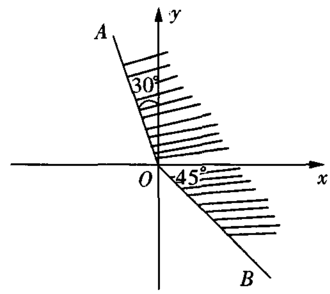
$$\begin{array}{r} -3 \\ 360°\overline{)\,-950°08'} \\ \underline{-1080°} \\ 129°52' \end{array}$$

总结： 草式写在草稿纸上，正的角度除以 360°，按通常除去进行；负的角度除以 360°，商是负数，它的绝对值应比被除数为其相反数时相应的商大 1，以使余数为正值.

【例 4】 如图，终边落在 OA 位置时的角的集合是________；终边落在 OB 位置，且在 $[-360,360]$ 内的角的集合是________；终边落在阴影部分(含边界)的角的集合是____________.

【答案】 $\{\alpha|\alpha=k\cdot360°+120°,k\in\mathbf{Z}\}$；$\{-45°,225°\}$；$\{\alpha|k\cdot360°-45°<\alpha<k\cdot360°+$

$120°, k \in \mathbf{Z}\}$.



课外延伸

【问题】若 α 是第二象限角，则 2α，$\frac{\alpha}{2}$，$\frac{\alpha}{3}$分别是第几象限的角？

【分析】α 是第二象限角，如何表示？由 α 的范围再去推出关于α 的其他角的范围.

解 (1) ∵α 是第二象限角，∴$90°+k\times360°<\alpha<180°+k\times360°(k\in\mathbf{Z})$

∴$180°+k\times720°<2\alpha<360°+k\times720°$

∴2α 是第三或第四象限的角，或角的终边在 y 轴的非正半轴上.

(2) ∵$k\cdot180°+45°<\frac{\alpha}{2}<k\cdot180°+90(k\in\mathbf{Z})$，

处理:先将 k 取几个具体的数看一下($k=0,1,2,3\cdots$)，再归纳出以下规律：

当 $k=2n(n\in\mathbf{Z})$时，$n\cdot360°+45°<\frac{n}{2}<n\cdot360°+90°(k\in\mathbf{Z})$，$\frac{\alpha}{2}$是第一象限的角；

当 $k=2n+1(n\in\mathbf{Z})$时，$n\cdot360°+225°<\frac{\alpha}{2}<n\cdot360°+270°(k\in\mathbf{Z})$，$\frac{\alpha}{2}$是第三象限的角.

∴$\frac{\alpha}{2}$是第一或第三象限的角.

(3) 同样可以得到：$\frac{\alpha}{3}$是第一或第二或第四象限的角.

进一步求$-\alpha$ 是第几象限的角.

【答案】$-\alpha$ 是第三象限的角.

【小结】要注意某一区间内的角和象限角的区别，象限角是由无数各区间角组成的；另外要学会正确运用不等式进行角的表述同时要会以 k 取不同的值讨论型如$\theta=\alpha+k\cdot120°(k\in\mathbf{Z})$ 所表示的角所在的象限.

自主练习

一、选择题

1. 若 α 是第二象限角，则$-\alpha$ 是 ( )

A. 第一象限角 B. 第二象限角 C. 第三象限角 D. 第四象限角

2. 已知角 α 的顶点与直角坐标系的原点重合，始边与 x 轴的正半轴重合，若 α 与β 的终边相互垂直，那么 ( )

A. $\beta=\alpha+90°$ B. $\beta=k\cdot360°+\alpha+90°$ ($k\in\mathbf{Z}$)

C. $\beta=\alpha\pm90°$ D. $\beta=k\cdot360°+\alpha\pm90°$ ($k\in\mathbf{Z}$)

3. 下列各组的两个角中，终边不相同的一组是 ( )

A. $-31°$与 $689°$ B. $540°$与$-900°$

C. $120°$与 $620°$ D. $-120°$与 $960°$

4. 下列角中终边与 $330°$相同的角是 ( )

A. $30°$ B. $-30°$ C. $630°$ D. $-630°$

5. 若角 α，β 的终边相同，则 $\alpha-\beta$ 的终边在 ( )

A. x 轴的正半轴上 B. y 轴的正半轴上

C. x 轴的负半轴上 D. y 轴的负半轴上

二、填空题

6. 与 $-400°$ 的角的终边相同的角的集合是________.

7. 在 $-360°$ 到 $720°$ 之间与 $-730°$ 终边相同的角是________.

8. 与 $-850°$ 终边相同的角在第________象限，其中最小的正角是________，最大的负角是________.

9. 与 $-1778°$ 角的终边相同且绝对值最小的角是________.

三、解答题

10. 判断下列各角终边所在的象限.

(1) $3540°$

(2) $-1352°$

11. 如果角 α 与 $x+45°$ 具有同一条终边，角 β 与角 $x-45°$ 具有同一条终边，求 α 与 β 的关系.

12. 若 $A=\{\alpha \mid k\cdot 360°+60°<\alpha<k\cdot 360°+270°, k\in \mathbf{Z}\}$，集合 $B=\{\alpha \mid k\cdot 360°-120°<\alpha<k\cdot 360°, k\in \mathbf{Z}\}$，求集合 $A\cap B$，$A\cup B$.

13. 若 4α 与 $20°$ 的终边相同，求适合不等式 $-360°\leqslant\alpha<0°$ 的角 α 的集合.

第 2 讲　弧度制

知识要点

1. 弧度制—另一种度量角的单位制；

2. 长度等于半径长的圆弧所对的圆心角叫做 1 弧度角，记作 1rad，或 1 弧度，或 1（单位可以省略不写）；

3. 正角的弧度数是正数，负角的弧度数是负数，零角的弧度数是 0；

4. 角 α 的弧度数的绝对值 $|\alpha|=\frac{l}{r}$（l 为弧长，r 为半径）；

5. 抓住：$360°=2\pi\text{rad}$　$\therefore 180°=\pi\text{rad}$

$\therefore 1°=\frac{\pi}{180}\text{rad}\approx 0.01745\text{rad}$

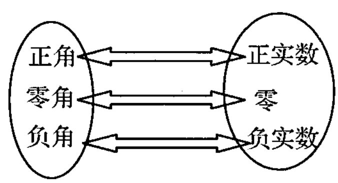
$1\text{rad}=\left(\frac{180}{\pi}\right)°\approx 57.30°=57°18'$.

课程探究

1. 用角度制和弧度制来度量零角，单位不同，但数量相同（都是 0）；

用角度制和弧度制来度量任一非零角，单位不同，量数也不同.

2. 应确立如下的概念：角的概念推广之后，无论用角度制还是弧度制都能在角的集合与实数的集合之间建立一种一一对应的关系.



任意角的集合　　　　实数集 R

3. 由公式：$|\alpha|=\frac{l}{r}\Rightarrow l=r\cdot|\alpha|$

4. 终边在 x 轴上的角的集合 $S_1=\{\beta|\beta=k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$

终边在 y 轴上的角的集合 $S_2=\{\beta|\beta=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$

终边在坐标轴上的角的集合 $S_3=\{\beta|\beta=\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$

5. 特殊角的度数与弧度数的对应表：

度	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$	$270°$	$360°$
弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

方法整合

【例 1】把 67°30′化成弧度.

解　$67°30'=\left(67\dfrac{1}{2}\right)°$　　$\therefore 67°30'=\dfrac{\pi}{180}\text{rad}\times 67\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{8}\pi\text{rad}.$

【例 2】把$\dfrac{3}{5}\pi$rad 化成度.

解　$\dfrac{3}{5}\pi\text{rad}=\dfrac{3}{5}\times 180°=108°$

【说明】1. 度数与弧度数的换算也可借助“计算器”《中学数学用表》进行；

2. 今后在具体运算时，“弧度”二字和单位符号“rad”可以省略，如：3 表示 3rad.

【例 3】直径为 20 cm 的圆中，求下列各圆心所对的弧长：(1) $\dfrac{4\pi}{3}$；(2) 165°.

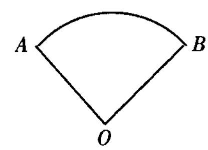
【分析】弧长计算公式为：$l=r\cdot|\alpha|$，要计算弧长只要知道弧所对的圆心角的弧度及半径即可.

解　$\because r=10$ cm

所以 (1) $l=\alpha\cdot r=\dfrac{4\pi}{3}\times 10=\dfrac{40\pi}{3}$ (cm)

(2) $165°=\dfrac{\pi}{180}\times 165$ (rad) $=\dfrac{11\pi}{12}$rad　$\therefore l=\dfrac{11\pi}{12}\times 10=\dfrac{55\pi}{6}$ (cm)

【例 4】如图，已知扇形 AOB 的周长是 6 cm，该扇形的中心角是 1 弧度，求该扇形的面积.



【分析】因为扇形面积可以用：$S=\dfrac{1}{2}rl$ 进行计算，所以关键是得到它的弧的长度和半径.

解　设扇形的半径为 r，弧长为 l，则有$\begin{cases}2r+l=6\\ \dfrac{l}{r}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}r=2\\ l=2\end{cases}$

$\therefore$扇形的面积 $S=\dfrac{1}{2}rl=2$ (cm)^2

【例 5】将下列各角化成 0 到 2π 的角加上 $2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 的形式：

(1) $\dfrac{19}{3}\pi$；　　(2) $-315°$.

解　$\dfrac{3}{19}\pi=\dfrac{\pi}{3}+6\pi$

$-315°=45°-360°=\dfrac{\pi}{4}-2\pi$

【说明】当已知角是弧度制给出时，只要把前 π 的分数变带分数即可看出；若是角度给出的，先用第一讲中的方法写成 $k\cdot 360°+\alpha$，$0°\leqslant\alpha 360°$，$k\in\mathbf{Z}$ 的形式即可.

课外延伸

【问题】圆的一段弧长等于该圆外切正三角形的边长，则这段弧所对圆心角的弧度数是多少？

【探究】圆心角弧度数等于该圆心角所对的弧的长度与该圆半径的比，若令此圆半径为r，则它的外切正三角形的边长为$2\sqrt{3}r$；

∵$2\sqrt{3}r\div r=2\sqrt{3}$，所以此圆心角的弧度数为$2\sqrt{3}$.

自主练习

一、选择题

1. 把$\frac{\pi}{12}$化为角度制表示等于　　　　(　)

A. $10°$　　B. $15°$　　C. $12°$　　D. $24°$

2. 把$22.5°$化为弧度制表示等于　　　　(　)

A. $\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{\pi}{6}$　　C. $\frac{\pi}{7}$　　D. $\frac{\pi}{8}$

3. 如果1弧度的圆心角所对的弦长为2，那么这个圆心角所对的弧长为　　　　(　)

A. $\frac{1}{\sin 0.5}$　　B. $\sin 0.5$　　C. $2\sin 0.5$　　D. $\tan 0.5$

4. 扇形周长为6，面积为2，则其圆心角的弧度数是　　　　(　)

A. 1或4　　B. 1或2　　C. 2或4　　D. 1或5

二、填空题

5. 把下列各角从度化为弧度：

(1) $12°=$________.　　(2) $75°=$________.

(3) $-210°=$________.　　(4) $1200°=$________.

6. 把下列各角从弧度化为度：

(1) $\frac{3}{10}\pi=$________.　　(2) $-\frac{5\pi}{2}=$________.

(3) $\frac{5\pi}{6}=$________.　　(4) $-\frac{4\pi}{3}=$________.

7. 用弧度制写出：

(1) 第一象限角的集合________.　　(2) 第二象限角的集合________.

(3) 第三象限角的集合________.　　(4) 第四象限角的集合________.

三、解答题

8. 时间经过4小时，时针、分针各转了多少度？各等于多少弧度？

9. 已知1度的圆心角所对的弧的长为1米，这个圆的半径是多少？

10. 一个扇形 OAB 的周长为 20，求扇形的半径；圆心角各取何值时，此扇形的面积最大？

1.2 任意角的三角函数

课标解读

1. 借助单位圆理解任意角三角函数（正弦、余弦、正切）的定义.

2. 理解任意角的三角函数不同的定义方法；树立映射观点，正确理解三角函数是以实数为自变量的函数.

3. 理解终边相同的角的同一三角函数值相等.

4. 理解各种三角函数在各象限内的符号.

5. 了解如何利用与单位圆有关的有向线段，将任意角 α 的正弦、余弦、正切函数值分别用正弦线、余弦线、正切线表示出来.

6. 理解同角三角函数的基关系式：平方关系 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$；商数关系 $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$.

第 3 讲　任意角的三角函数（1）

知识要点

1. 定义：设 α 是一个任意大小的角，角 α 的终边与单位圆交于点 $P(x,y)$，则 $\sin\alpha=y$，$\cos\alpha=x,\tan\alpha=\frac{y}{x}$.

2. 终边相同的角同一三角函数的关系：

$\sin(\alpha+2k\pi)=\sin\alpha$，

$\cos(\alpha+2k\pi)=\cos\alpha$，

$\tan(\alpha+2k\pi)=\tan\alpha$，其中 $k\in\mathbf{Z}$.

3. 根据任意角的三角函数定义，正弦、余弦和正切函数的定义域、三种函数的值在各个象限的符号如下表：

三角函数	定义域	第一象限	第二象限	第三象限	第四象限
$\sin\alpha$	R	+	+	−	−
$\cos\alpha$	R	+	−	−	+
$\tan\alpha$	$\{\alpha\mid\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$	+	−	+	

课程探究

1. 初中学过：锐角三角函数就是以锐角为自变量，以比值为函数值的函数. 怎样把这个定义推广到任意角呢？通过单位圆和角的终边，参照初中的定义，探讨任意角的三角函数值的求法，最终得到任意角三角函数的定义.

2. 根据角终边所在位置不同，分别探讨各三角函数的定义域以及这三种函数的值在各象限的符号.

3. 因为角的集合与实数集之间可以建立一一对应关系，故三角函数也可以看成实数为自变量的函数.

4. 根据三角函数的定义，自然有终边相同的角的同一三角函数值相等，根据这个规律，我们可以把任意角的三角函数值问题转化为 $0\sim2\pi$ 间角的三角函数值问题.

5. 三角函数另一种定义：

在直角坐标系中，设 α 是一个任意角，α 终边上任意一点 P（除了原点）的坐标为 (x, y)，它与原点的距离为 $r\left(r=\sqrt{|x|^2+|y|^2}=\sqrt{x^2+y^2}>0\right)$，那么：

（1）比值 $\frac{y}{r}$ 叫做 α 的正弦，记作 $\sin\alpha$，即 $\sin\alpha=\frac{y}{r}$；

（2）比值 $\frac{x}{r}$ 叫做 α 的余弦，记作 $\cos\alpha$，即 $\cos\alpha=\frac{x}{r}$；

（3）比值 $\frac{y}{x}$ 叫做 α 的正切，记作 $\tan\alpha$，即 $\tan\alpha=\frac{y}{x}$.

方法整合

【例 1】 有下列命题：①终边相同的角的同名三角函数值相等；②终边不同的角的同名三角函数值不相等；③若 $\sin\alpha>0$，则是 α 一、二象限的角；④若 α 是第二象限的角，且 $P(x, y)$ 是其终边与单位圆的交点，则 $\cos\alpha=-x$. 其中正确的命题个数是（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【分析】 由三角函数的定义逐个判断正误.

解　由三角函数的定义知①正确，对于②，我们可举反例：如 $120°$ 与 $60°$ 角的终边与单位圆交点的纵坐标相同，所以有 $\sin120°=\sin60°$，则②不对；对于③由于 $\sin\frac{\pi}{2}=1>0$，但 $\frac{\pi}{2}$ 不是一、二象限的角，故③也不对；对于④由定义知 $\cos\alpha=x$，故④不正确.

【答案】 A.

【例 2】 求下列各角的正弦、余弦、正切值：

（1）0；　　（2）π；　　（3）$\frac{3\pi}{2}$.

【分析】 令角的终边与单位圆的交点为 $P(x, y)$ 由三角函数的定义逐个求之.

解　（1）因为当 $\alpha=0$ 时，$x=1$，$y=0$，所以

$\sin0=0$，$\cos0=1$，$\tan0=0$.

（2）因为当 $\alpha=\pi$ 时，$x=-1$，$y=0$，所以

$\sin\pi=0$，$\cos\pi=-1$，$\tan\pi=0$.

(3) 因为当$\alpha=\frac{3\pi}{2}$时，$x=0$，$y=-1$，所以

$\sin\frac{3\pi}{2}=-1$，$\cos\frac{3\pi}{2}=0$，$\tan\frac{3\pi}{2}$不存在.

【例 3】 确定下列三角函数值的符号：

(1) $\cos250°$；(2) $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$；(3) $\tan(-672°)$；(4) $\tan\frac{11\pi}{3}$.

【说明】 由三角函数的定义，以及各象限内点的坐标的符号，我们可以得知：

①正弦值对于第一、二象限为正，对于第三、四象限为负；

②余弦值对于第一、四象限为正，对于第二、三象限为负；

③正切值对于第一、三象限为正，对于第二、四象限为负；

④若终边落在轴线上，则可用定义求出三角函数值.

解 (1) $\because 250°$是第三象限角，$\therefore \cos250°<0$；

(2) $\because -\frac{\pi}{4}$是第四象限角，$\therefore \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)<0$；

(3) $\because -672°=-2\times360°+48°$，即$-672°$是第一象限角，$\therefore \tan(-672°)>0$；

(4) $\because \frac{11\pi}{3}=2\pi+\frac{5\pi}{3}$，即$\frac{11\pi}{3}$是第四象限角，$\therefore \tan\frac{11\pi}{3}<0$

【例 4】 求 $\cos\left(-\frac{11\pi}{3}\right)-\sin\left(-\frac{71\pi}{6}\right)+\tan\left(\frac{19\pi}{3}\right)$

【分析】 利用终边相同的角三角函数值相等，把负角的函数值变为终边与之相同的正角的函数值来求，把大角的函数值变为终边与之相同的小角的函数值来求即可.

解 $\cos\left(-\frac{11\pi}{3}\right)-\sin\left(-\frac{71\pi}{6}\right)+\tan\left(\frac{19\pi}{3}\right)$

$=\cos\left(-4\pi+\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(-12\pi+\frac{\pi}{6}\right)+\tan\left(6\pi+\frac{\pi}{3}\right)$

$=\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{6}+\tan\frac{\pi}{3}$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\sqrt{3}$

$=\sqrt{3}$

【例 5】 求函数 $y=\frac{|\cos x|}{\cos x}+\frac{\tan x}{|\tan x|}$的值域.

【分析】 以上两个式子的值不是$+1$，就是-1；是由$\cos x$和$\tan x$的符号确定的.

解 设角x的终边与单位圆的交点为(a,b)，则

由：$\cos x\neq0$，$\tan x\neq0$ $\therefore x$的终边不在x轴上

又$\because \tan x$存在 $\therefore x$的终边不在y轴上

$\therefore$当x是第Ⅰ象限角时，$a>0,b>0,\cos x=|\cos x|$ $\tan x=|\tan x|$ $\therefore y=2$

当x是第Ⅱ象限角时，$a<0,b>0,|\cos x|=-\cos x$ $|\tan x|=-\tan x$ $\therefore y=-2$

当x是第Ⅲ象限角时，$a<0,b<0,|\cos x|=-\cos x$ $|\tan x|=\tan x$ $\therefore y=0$

当x是第Ⅳ象限角时，$a>0,b<0,\cos x=|\cos x|$ $|\tan x|=-\tan x$ $\therefore y=0$

所以，原函数的值域为：$\{-2,0,2\}$

课外延伸

【问题】已知 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$. (1) 求 $f\left(\frac{25}{6}\pi\right)$的值;

(2) 设 $\alpha\in(0,\pi)$, $f\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, 求 α 的值.

【探究】在 (1) 中, 显然 $f\left(\frac{25}{6}\pi\right)=\sin\left(\frac{25}{3}\pi\right)=\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

在 (2) 中, 因为容易得到 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$,由三角函数的定义知,在 0 到 π 的范围正弦值为$\frac{\sqrt{2}}{2}$的角有两个(哪两个? 为什么?),怎样取舍要仔细思量一下.

解 (1) $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

$$f\left(\frac{25}{6}\pi\right)=\sin\left(\frac{26}{3}\pi\right)=\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(2) $f\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore 0<\alpha<\pi \quad \therefore \frac{\pi}{3}<\alpha+\frac{\pi}{3}<\frac{4}{3}\pi$

$\therefore \alpha+\frac{\pi}{3}=\frac{3}{4}\pi \quad \therefore \alpha=\frac{5}{12}\pi.$

自主练习

一、选择题

1. 化简 sin600°的值是 ( )

A. 0.5　　B. −0.5　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. 给出下列各函数值:①$\sin(-1000^\circ)$;②$\cos(-2200^\circ)$;③$\tan(-10)$;④$\dfrac{\sin\frac{7\pi}{10}\cos\pi}{\tan\frac{17\pi}{9}}$.

其中符号为负的有 ( )

A. ①　　B. ②　　C. ③　　D. ④

3. 函数 $y=\frac{\sin x}{|\sin x|}+\frac{|\cos x|}{\cos x}+\frac{\tan x}{|\tan x|}$的值域是 ( )

A. {−1, 0, 1, 3}　　B. {−1, 0, 3}

C. {−1, 3}　　D. {−1, 1}

4. 设 α 角属于第二象限, 且 $\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|=-\cos\frac{\alpha}{2}$, 则$\frac{\alpha}{2}$角属于 ( )

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

5. 设 α 角的终边上一点 P 的坐标是$\left(\cos\frac{\pi}{5},\ \sin\frac{\pi}{5}\right)$, 则 α 等于 ( )

A. $\frac{\pi}{5}$ B. $\cot\frac{\pi}{5}$

C. $2k\pi+\frac{3}{10}\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$ D. $2k\pi-\frac{9}{5}\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$

6. sin2cos3tan4 的值 （　　）

A. 小于 0 B. 大于 0 C. 等于 0 D. 不存在

二、填空题

7. 在半径为 30 m 的圆形广场中央上空，设置一个照明光源，射向地面的光呈圆锥形，且其轴截面顶角为 120°，若要光源恰好照亮整个广场，则其高应为________m.（精确到 0.1 m）

8. 化简：$m\tan 0°+x\cos 90°-p\sin 180°-q\cos 270°-r\sin 360°=$________.

9. 与 $-2002°$ 终边相同的最大负角是________.

10. 设 θ 分别是第二、三、四象限角，则点 $P(\sin\theta, \cos\theta)$ 分别在第________、________、________象限.

三、解答题

11. 若角 α 的终边与函数 $y=2|x|$ 的图象重合，求 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\tan\alpha$ 的值.

12. 求函数 $y=\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$ 的定义域.

13. 已知 $\cos\left(x-\frac{5\pi}{4}\right)=\frac{1}{5}$，求 $\cos\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)$ 的值.

第 4 讲　任意角的三角函数（2）

知识要点

1. 三角函数线的定义：

设任意角 α 的顶点在原点 O，始边与 x 轴非负半轴重合，终边与单位圆相交于 $P(x,y)$，过 P 作 x 轴的垂线，垂足为 M；过点 $A(1,0)$ 作单位圆的切线，它与角 α 的终边或其反延长线交于