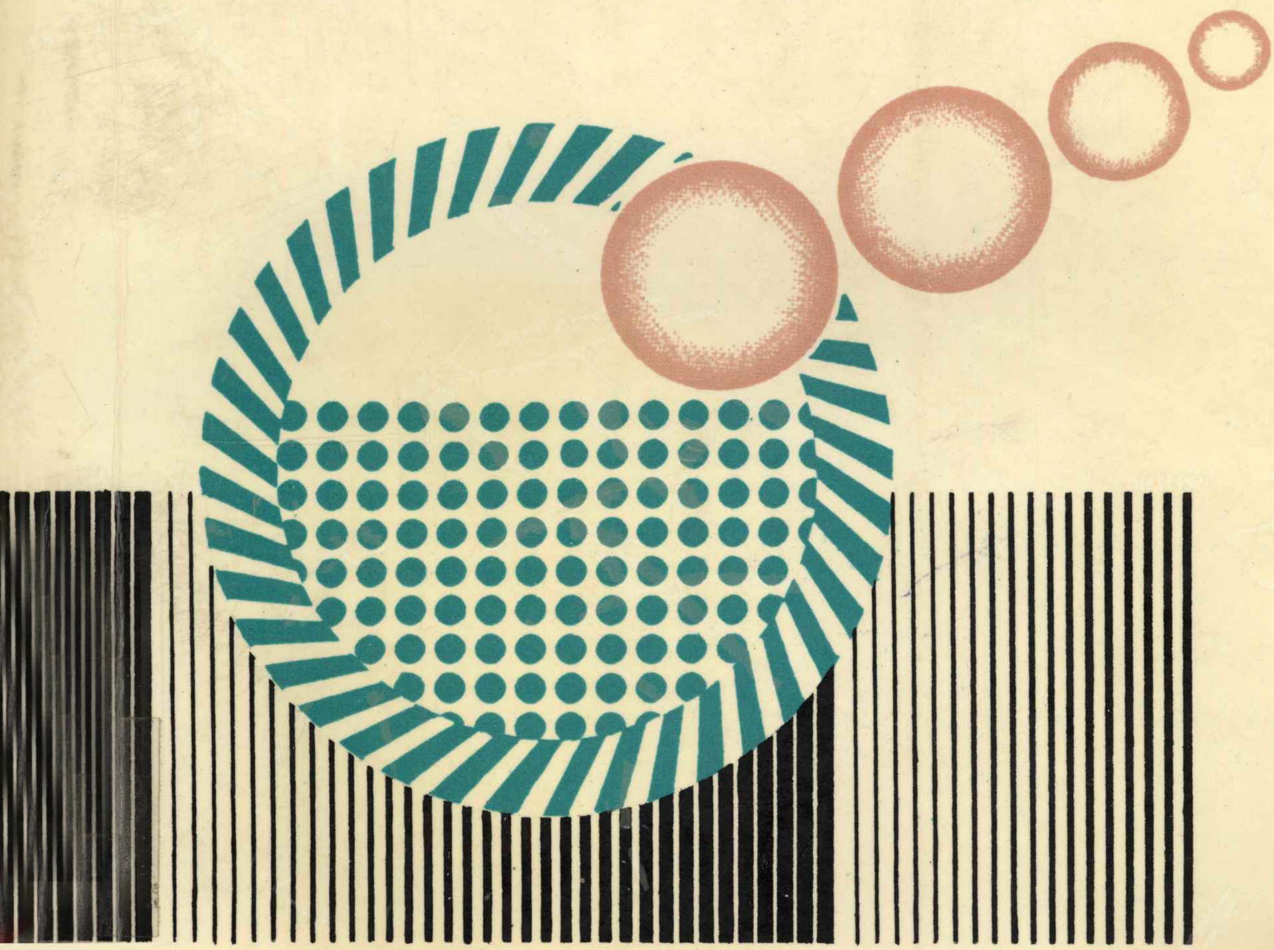
THEORY AND METHODS FOR FINITE ANALYTIC NUMERICAL SIMULATION IN GROUNDWATER HYDROLOGY

地下水有限分析

数值模拟的理论与方法

王文科 著



陕西科学技术出版社

地矿部“水资源评价与管理系列模型”
开放研究实验室基金资助项目

地下水有限分析数值模拟的理论与方法

王文科　著

陕西科学技术出版社

内 容 简 介

本书是一本系统介绍有限分析法用于地下水水量、水质定量分析中的科技专著。著者以严格的理论和算例相结合的形式,叙述了作者近几年从事这一领域的研究成果,目的为地下水水量、水质定量分析提供一套完整的有限分析数值模拟体系,以丰富和充实环境水文地质学的数值模拟方法。全书共分九章。第一章重点论述了地下水数值模拟的发展,提出了今后地下水数值模拟中值得重视的问题;第二、三、四章全面系统地论述了地下水流数值模拟的有限分析法的基本理论与方法;第五、六、七、八章给出了求解地下水溶质运移问题的有限分析法的基本数学理论和计算格式;第九章为实例研究,以在实践上进一步检验有限分析法在解决实际水文地质问题的实用性和有效性。书中对提出的各种有限分析格式都附有与常用方法计算结果进行对比的算例,以备查考。

本书可供水文地质、水资源管理、环境保护、农田水利、地热、石油等方面的专业技术人员参考,也可作为与地下水有关专业的高年级大学生和研究生的参考用书。

序

王文科博士撰写的《地下水有限分析数值模拟的理论与方法》是他多年从事地下水数值法研究成果的概括和总结，书中全面系统地论述了不同水文地质条件下，地下水流和溶质运移有限分析法的基本理论与数值计算格式，它极大地丰富了当代水文地质计算学这一新兴学科的研究成果。我对此书的问世表示衷心的祝贺。

地下水水量和水质的定量研究已是当前水文地质乃至环境水文地质学研究的前沿课题，其研究水平不仅对现代水文地质学的发展起着积极的推动作用，而且也从一个重要方面代表了现代水文地质学发展的新高度。因此，该专著的问世具有重要的理论和实践意义。

该书充分吸取了国外先进理论。作者在系统总结当前各种地下水数值模拟方法优缺点的基础上，全面系统地研究了不同地下水类型、不同流态、不同维数的地下水流和溶质运移有限分析数值模拟的基本理论，建立了稳定流有限分析格式、将时间 t 包括在数值方程中的 LT 有限分析格式、时间差分和改进时间差分有限分析格式、局部坐标有限分析格式、一维加权六节点隐式有限分析格式、径向溶质运移有限分析格式、有限分析与 Laplace 变换及 Crump 算法耦合求解地下水溶质运移的 LT 有限分析格式和跟踪浓度锋面自动选择插值公式的特征有限分析格式等。并从理论上证明了所建格式的稳定性和收敛性，阐明了计算中单元边界函数的选取对解的影响以及源汇项、非均质和不规则边界的处理方式。大量的算例结果表明，书中所建立的各种有限分析格式与现有方法相比，计算精度高，数值稳定性好，能有效的控制数值弥散和振荡现象的产生。这是一部至今国内关于地下水流和溶质运移问题的有限分析法的最全面、系统的既有理论分析又有应用实例

研究的高水平著作，从而为地下水定量分析提供了一套完整的有限分析数值模拟体系，丰富和充实了当代水文地质计算学的数值模拟方法。

该著作的诞生说明王文科博士具有广博学识、扎实的数学基础和专业素养，其成就是和他的科学思维方法以及刻苦钻研、严谨求实的工作态度分不开的。

当然一个新学科的成长或者一个新理论、新方法的提出都有其不断充实和完善的过程，它需要更多前辈学者的指点和各方科学家的关心与支持才能使它在未来各学科领域中发挥更大的潜力和作用。我相信经过王文科博士和各学术界的共同努力，我国水文地质计算学必将在理论和方法体系上日臻完善，并对现代水文地质学的发展产生深远的影响。

林学钰

1996.5.

前　言

在地下水定量分析中，除了常用的解析法外，尚有有限差分法、有限元法和边界元法等数值方法。而将有限分析数值方法用于地下水的定量计算与评价中，则是近几年的事情。

有限分析法是80年代发展起来的一种新的数值方法。该方法不同于有限差分和有限元法，它是利用局部解析解建立计算格式，因而是一种更好的数值逼近，具有稳定好、计算精度高、占用计算机内存少、适应广泛、不产生伪振荡现象等优点。自80年代以来，这一方法在国内外得到了广泛深入的发展，引起了众多学者的极大兴趣和关注，并在流体力学、热传导等领域取得了初步应用。但迄今为止，有限分析方法在地下水的定量分析中的作用并非为很多人所了解，国内外所见均为分散的少数论文，尚无系统地论著。为此，作者在攻读博士学位期间和在博士后流动站工作期间，曾对地下水流、地下水溶质运移数值模拟的有限分析法进行了系统地研究和总结。在此基础上进一步改写成这本专著。全书共分九章。第一章为绪论，重点论述了地下水数值模拟的发展，提出了今后地下水数值模拟中值得重视的问题；第二章重点推导了地下水稳定流问题的有限分析计算格式，证明了格式所具有的数学性质，对井、面状补给（排泄）等源汇项、边界条件以及非均质问题进行了合理的处理；第三章全面系统地导出了地下水非稳定流有限分析格式，包括一维等距和非等距LT有限分析格式，承压二维LT有限分析格式和改进LT有限分析格式，C·J·Chen时间差分有限分析格式和改进时间差分有限分析格式。从理论上证明了所建格式的收敛性和稳定性；第四章给出了结合等参元变换的LT局部坐标有限分析格式和时间差分局部坐标有限分析格式，从理论上证明了时间差分局部坐标有限分析格式的稳定性条件；第五、六、七章建立了地下水溶质运移数值模拟的许多有限分析格式，包括一维四点格式，一维加权六结点格式，Laplace变换及Crump算法耦合求解地下水溶质运移问题的LT有限分析格式，跟踪浓度锋面自动选择插值公式的特征有限分析格式和局部坐标有限分析格式等；第八章给出了在地下水流方程与溶质运移方程相耦合时，求解地下水流速分布的有限分析表达式；第九章应用前几章理论计算了腊家滩水源地群孔抽水试验和西安市太白小区潜水铬污染规律的模拟，以在实践上进一步检验有限分析法在解决实际水文地质问题上的实用性和有效性。作者对书中提出的各种计算格式都附有与其它数值方法相比较的检算实例，以备查考。

在多年的研究工作中曾得到西安地质学院、长春地质学院等单位的领导和老师的大力支持和帮助。特别是我的博士导师胡广韬教授、李俊亭教授，我的博士后工作专家指导组林学钰教授（组长）、杨天行教授、廖资生教授、曹玉清教授，还有建设部城市地下水研究中心陈雨孙教授，武汉水力电力学院陆君安教授，清华大学肖树铁教授，西安地质学院李佩成教授、

刘玉海教授、吴在宝副教授、田春声教授、杨胜科讲师，中科院院士陈梦熊教授，西安交通大学李开泰教授、黄艾香教授，长春地质学院邹立芝副教授，中国地质大学田开铭教授、李慈君教授，陕西省工程勘察研究院刘方副总工程师，陕西省环境总站史风岐总工、陆银全高工，地矿部西安地质矿产研究所董发开研究员等曾给予多方面的指导和帮助。作者深切感受到这些指导和帮助的宝贵，谨此深表谢忱！此外，陈梦熊院士、陈雨孙教授、陆君安教授、罗焕炎研究员、薛禹群教授、朱学愚教授、谢春红教授、陈崇希教授、张蔚榛教授、刘金山研究员、陈明佑教授、李俊亭教授、李佩成教授、廖资生教授、金为芝研究员、房佩贤教授、王秉忱研究员、陈葆仁教授、秦毅苏研究员、余国光教授、伍兆聪副研究员、段永候教授级高工、李烈荣教授级高工、张茂增教授级高工、费瑾研究员、曲焕林副研究员、王兆馨教授级高工、王强忠教授级高工、辛奎德教授级高工、许涓铭教授、刘光亚教授、朱锡冰研究员、陈爱光教授、施德鸿研究员、卫中鼎教授、谭绩文教授等在百忙中对地下水流数值模拟的有限分析法的成果进行了评审，他们提出了许多宝贵和中肯的意见，在著书中均进行了考虑，作者在此对他们表示深切的感谢！

书中的插图由王保兴描绘。我的妻子崔慧敏在我研究和写作过程中，默默地承担着家务工作，并清抄了书稿，这本书的完成倾注着她的心血与劳动。

由于作者学术水平和工作经验有限，缺点错误在所难免，某些观点甚至有错，凡此皆仰赖有识之士不吝指正，我怀着感激的心情准备接受旨在改进本书的所有读者的建议。

王文科

1996年3月于长春

目　录

第一章 绪 言

§1 数值模拟与水文地质

随着工农业生产的发展和人民生活水平的提高，地下水资源的供需矛盾日渐突出，因此对地下水资源的评价与管理提出了更高的要求，即要从定量角度对地下水资源进行预测和评价，建立合理地开发利用方案。但水文地质条件客观的复杂性，限制了用地下水动力学中建立的解析法解决问题的广泛性。于是，70年代初以来，随着电子计算机的发展，数值模拟技术逐渐渗透到水文地质学科，开拓了水文地质领域的定量计算。人们通过数值模拟技术，来获得满足一定工程要求的数值解，尤其在水量计算、资源评价、地下水污染预测、地下水的合理开发和地下水资源管理等方面应用更加广泛。经过20年的探索和实践表明，数值模拟对水文地质学科中某些理论和实际问题的解决起了很大作用，构成现代水文地质学科形成和发展的重要推动力之一，已成为人们揭示水文地质规律和资源评价与管理中必不可少的工具。

§2 地下水数值模拟方法的发展与分析

目前，水文地质领域内常用的数值模拟方法有：有限差分法、有限元法、边界元法和有限分析法。

有限差分法的基本思想是用差商近似控制方程中的微商，然后耦合初始条件及边界条件求解封闭的线性代数方程组。该方法具有物理概念清楚、直观、易懂、计算简单、编制计算程序容易等特点。因此，最早盛行于工程科学中，40年代后期开始应用于解决土工渗流问题。但由于用差分法求解微分方法需要大量的运算工作，所以在计算机未出现以前，有限差分法在水文地质计算中的应用仅限于少量小规模的地下水流模拟。60年代初始，随着电子计算机运算速度和容量的提高，数值模拟才开始广泛地应用于大规模实际地下水流的计算。如 Pinder 和 Bredehoeft（1968）将 Peaceman 和 Rachford（1955）提出的交替方向隐式方法用于地下水的计算，稍后又引入强隐式（Stone，1968；Trescott 等，1977；李竞生，1978），这些方法具有占用内存少，计算速度快等优点，对地下水流走向定量化模拟起到了促进作用。但由于有限差分法是用正立网格剖分渗流区域。因此，对很多水文地质问题拟合自然边界及非均质界线的灵活性较差，例如可动边界的处理等；此外，方法本身要求水头函数必须具有二阶连续导数，这一条件对地下水流容易突变部位往往难以满足。为弥补上述不足，便产生了不规则网格有限差分法。该方法的应用可追溯到1953年。不规则网格有限差分法的出现，给这一古老的方法增添了新的活力，使它又可以和有限元方法相匹敌。1964年 Tyson 及 Weber 成功地把不规则网格有限差分法用于美国加利福尼亚州的含水层模拟中；国内学者张宏仁、李俊亭（1979、1980、1982）对不规则有限差分法的推导、论证及推广应用做了大量工作，解决了许多实际问题。不规则有限差分法的出现，克服了规则网格差分法在拟合自然边界及非均质界线上的不足，丰富了有限差分

方法的理论。

有限元法的基本思想是采用插值近似使控制方程通过积分形式在不同意义下得到近似满足，把研究区域转化为有限数目的单元而列出计算格式。该方法于60年代后期，开始应用于地下水流计算中，如Zinekiewicz(1966)把有限元用于二维稳定流计算，1968年Jevendel等进一步用有限元方法解非稳定流问题；1972年引入等参有限元，1976年Capta等人用三维等参数有限元法对多层地下水盆地进行了数值模拟；嗣后，张宏仁、李俊亭(1979)发现了有限元法求解地下水流问题时不满足局部质量守恒，Neuman和Narasihuhan(1977)亦发现由于释水矩阵的非对角性所构成的缺点，当井流量有突然而猛然的变化时，用有限元格式有时会得出和物理概念上有矛盾的水头值。因此提出了相应的改进措 施，即在子域G上把结点i的水头变化$(\frac{dh}{dt})i$看成$\frac{\partial h}{\partial t}$在$G$上的平均值。

因而
$$np_{ij}=\begin{cases}\sum\limits_{e}\frac{S\triangle}{3} & i=j\\0 & i\neq j\end{cases}$$

从而将释水矩阵对角化，便产生了改进有限元(亦称为贮量集中有限元)。改进有限元的提出，简化了计算，加强了总系数矩阵主对角线的优势，提高了计算的效率；避免了不规则网格有限差对均衡区域面积的复杂计算以及对三角形剖分内角的限制。我国在用有限元法模拟地下水流方面的研究，虽然起步较晚，但其应用范围、规模及其发展水平都是十分可观的。20年来，我国水文地质工作者应用有限元数值模拟技术解决了一大批供水水源地的资源评价、矿坑涌水量预测、区域地下水资源评价、海水入侵、污染物在地下水中运移过程等问题。先后有薛禹群、谢春红、陈崇希、孙讷正、张蔚榛、罗焕炎、陈雨孙、李俊亭、杨天行、付泽周、林学钰等发表了有限元数值模拟方面的论文、专著、计算程序以及研究课题。特别是薛禹群、谢春红(1987)对井附近地下水流的对数插值法的提出，改进了传统有限元法在计算地下水流时把井作为一个几何点处理的缺陷，考虑了井径和井附近接近于对数曲线的水头变化，提高了井附近计算的精度；又如杨天行、付泽周的奇点磨光法(1982)对这一领域的研究也起到了积极的促进作用。从取得的成果来看，我国在这一领域的研究工作，无论是在理论上，还是实际应用方面都取得了显著成就，已步入世界先进行列。

有限元法与有限差分法相比，由于节点配制方式比较任意，单元大小比较随意，形状可以变化。因此，对于复杂形状的渗流区，可以使边界结点完全落在区域边界上面以及适应不同水头的分布情况。但由于有限元法是采用线性形函数描绘单元内的水位，往往对水力梯度较大的部位算得的水位有可能失真，某些结点产生振荡，张宏仁等从理论上对有限元产生上述问题给予了证明，他以为这一现象的产生是由于在一个单元内部有限元方程不能正确地反映质量守恒定律，出现反热传导方程之故。此外，有限单元法占用计算机的内存要大一些，前期准备工作及运算工作量大。

70年代后期及80年代，出现的边界元法现已发展成为一种新的数值计算方法。边界元法是通过Green公式和定解问题的Green函数化微分方程为边界积分方程，使用离散化技术离散边界，当求出边界上的水位之后，对计算区内的水位可依靠边界上的水位用简单公式求出。与有限元相比，由于离散化引起的误差仅来源于边界，不仅提高了精度，而且使输入数据简化，避免了有限元数据的准备和核对等繁琐工作，减少了工作量。边界元法在我国水文地质界出现

大约 10 年左右，在很短的时间内，很多学者对用边界元法求解井流、非均质渗流、自由面地下水流、非稳定流、溶质运移等问题从理论和实际都进行了积极探索，并取得了成功。其中朱学愚、谢春红（1989、1990）、罗焕炎、陈雨孙（1988）等关于边界元方法的著作可代表我国在这方面的最新研究成果。但边界元对域内分片的非均质与各向异性的适应性不如有限元法。

上述三种方法各有优缺点，任一种方法都不可能很有效地解决所有的数学物理方程。例如，利用常规的有限差分法、有限元法和边界元法求解以对流占优（即 Peclet 数 Pe>>1）的地下水溶质运移问题时常出现数值弥散和伪振荡现象，处理不好就会限制数值方法的应用。为此，近年来为处理数值解法的精确性和稳定性、抑制数值弥散和振荡现象，不少数值计算工作者在这方面做了许多工作，提出了求解各种类型水质模型较为实用的数值方法，解决了一系列水质模拟、预报与管理过程中的数值方面的困难，如迎风格式、特征法（Garder，1964；konikow 和 Bredehoeft，1978）、修正特征值法和混合有限元法（Douglas，1990；Neuman，1981，1983）、多单元均衡方法（孙讷正和梁文康，1982；Sun 和 Ye，1983）、交替方向特征有限元（Douglas 和 Dupont，1971；Hayes，1976；Celia 和 Pinder，1982；Daus 和 Frind，1985；Frind 和 Pinder，1985）、Euler－lagrange 分裂格式（忻孝康，唐登海，1989）、三角形有限体积法高密迎风格式（Putti，Yeh 和 Mulder，1990）等。这些方法也都在 Peclet 数较大的问题上取得了较好的结果。

80 年代初期美国 Iowa 大学的 Chen（1979，1980，1984）提出了一种新的数值计算方法—有限分析法。这种方法不同于有限差分与有限元法：它不像有限差分方法那样，用差商来近似控制方程中的微商；也不像有限元方法那样采用插值近似来使控制方程通过积分形式在不同的意义下得到近似满足，其基本思想是将控制方程的局部解析解组成整体数值解，这样得到的解可以比较好地保持原有问题的物理特性，格式通过自动调节有限分析系数来反映对流与扩散效应，可得到单调无振荡性解，数值稳定性好。因此，自从有限分析法问世以来，受到国内外众多学者的重视，并在流体力学、热传导等方面取得了较为理想的效果（李炜，陆君安、杨屹松，1989，1990；张世雄，1988）。国内学者卢德生（1989），陈雨孙、王宥智（1991，1992），方保溶（1989），王文科、李俊亭（1993、1994、1995、1996）等也开始应用有限分析方法探讨解决某些水文地质问题。其中王文科博士论文（1994）《地下水流数值模拟的有限分析法》全面、系统地研究了地下水流数值模拟有限分析方法的基本理论，建立了稳定流有限分析格式、非稳定流有限分析格式、LT 有限分析格式、改进时间差分有限分析格式、局部坐标有限分析格式等；从理论上证明了格式的稳定性和收敛性，通过大量实例对比，证明有限分析法在求解地下水流方面较现有方法精度高，不产生振荡现象。但进一步的研究发现，虽然用有限分析法对地下水流问题精度高，对水质问题改善了解的光滑性，无振荡现象产生，但用它求解对流占优的地下水溶质运移问题时，仍难以产生像解析解所给出的陡峭前峰，数值解在一定程度上存在一些数值弥散（Hwang 和 Chen，1985，王文科，1995，1996）。对此一些改进算法不断提出。如：许延生（1989）提出的基于算子分裂原理的混合有限分析格式；王文科（1995，1996）提出的有限分析与 Laplace 变换及 Crump 算法耦合求解地下水溶质运移问题的 LT 有限分析格式和跟踪浓度锋面自动选择插值公式的特征有限分析格式等。这些格式效率高，精度好，能有效地控制数值弥散和伪振荡现象的产生。有限分析数值方法的出现，提高了地下水科学中数值模拟的计算精度，丰富和充实了环境水文地质学中的数值模拟方法。该方法在水文地质学中提出和运用仅仅几年时间，正处于方兴未艾阶段，如同其它较成熟的数值方法在开始发展阶段一样，也存在某

些困难与局限，这正有待于进一步地完善与发展。

§3 地下水数值模拟展望

从目前情况来看，笔者认为地下水数值模拟应从以下几方面进行发展。

(1)由于水文地质条件的复杂性，正确的数值模拟需要一个符合客观实际情况的数学模型，单纯重视数值计算而忽略基础地质、水文地质条件的研究，只会导致错误的结果。因此，重视机理研究和正确的数学模型的建立将是数值分析成败的关键；

(2)水文地质问题的多样性要求算法具有普遍适用性，而应用实践则要求算法具有更高的性能。其基本要求包括守恒法、稳定性、收敛性、无振荡性、足够计算精度和效率等。因此，不断的改进数值计算方法，减少计算机内存仍然是地下水数值模拟的重要课题；

(3)从数值分析本身来讲，多种方法相结合(例如有限元与有限差、有限差与边界元、概率模型与数值模型相结合、有限分析与有限元等)来处理一个课题是一个值得探讨的方向；

(4)研究与数值模型相匹配的输入数据和高精度参数的测试和获取方法也将是今后研究的重要课题；

(5)边界条件的给定和处理对整个计算结果影响甚大，尤其给定水头边界。因此，应加强无限边界有限处理的研究；

(6)高效率的数值分析，需要自动剖分、域内多点插值等技术。水文地质数值模拟的程序需要全国统一管理；

(7)数值分析结果最好有实际资料作为校核和检验，以深化对水文地质条件的认识、模型的更换和推导假定及计算方法的修改。通过反复校正，使模型日趋完善，具有高度的仿真性。

展望未来，随着计算机技术的发展和数值方法的不断突破，将出现更多更好的数值计算方法替代已有的，逐步使一些难以处理的问题也因而有了定量分析的可能，使数值计算方法在解决实际水文地质问题的能力走向更高地水平。

第二章　地下水稳定流问题的有限分析算法

§1　有限分析的基本思想

用有限分析法求解地下水流问题首先要将求解区域剖分为有限个子域，以水头的某种分布函数作为子域的边界条件，然后在子域内求泛定方程在该边界条件下局部解析解，子域内的局部解析解把该子域中的一个内点上的水头与该域边界上各点的水头以代数方程形式相联系，每一个内点有一个代数方程，嵌入渗流区域的边界条件，从而组成一封闭的代数方程组。解此代数方程组，就可得到整个问题的数值解。

§2　承压稳定流的有限分析方程

2.1　运动方程和定解条件

地下水流中承压二维稳定流方程可以写为

$$\frac{\partial}{\partial x}(T\frac{\partial H}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(T\frac{\partial H}{\partial y})+W=0 \qquad (x,y)\in D \tag{2-1}$$

式中：T 为导水系数；H 为水头；W 为源汇项强度，在地下水流问题中遵循流入（源）为正，流出（汇）为负；D 为所研究的渗流区，其围线为 Γ。

方程(2—1)属椭圆型，其解取决于边界条件。一般情况下有三类。

(1)第一类边界条件

$$H(x,y)|_{\Gamma}=H_1(x,y) \tag{2-2}$$

$H_1(x,y)$ 为给定边界 Γ 上的水头值。

(2)第二类边界条件

$$T\frac{\partial H}{\partial n}|_{\Gamma}=q \tag{2-3}$$

q 为通过二类边界 Γ 的法向单位流量，对隔水边界有 $q=0$。

(3) 第三类边界条件

为水头 H 与$\frac{\partial H}{\partial n}$的线性组合。

2.2　子域解析解的推导

现推导式(2-1)的有限分析计算格式。为方便起见，设渗流区 D 的边界形状 Γ 是一矩形，含水层为均质各向同性。首先用边长为 Δx 和 Δy 的矩形网格剖分域 D(图 2-1)。由相邻的四个网格构成一个子域。取其中一子域 e_{ij}(图 2-1 中的阴影部分)，它包含九个结点，其中心结点为 R，四周各结点分别以 NE、NC、SE、SC、SW、WC、NW 和 EC 标记(图 2-2)。图 2-2 所示的子域由四

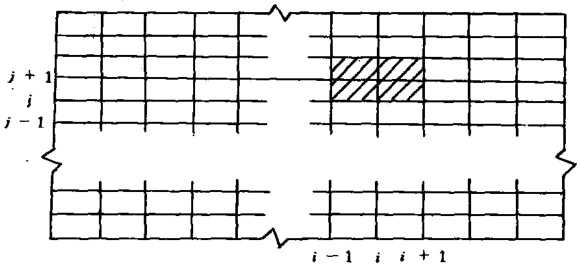


图 2-1　网格剖分

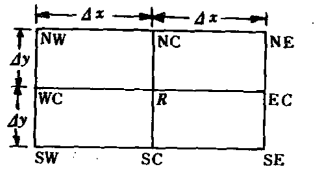


图 2-2　子域 e_{ij}

个边界(东、南、西、北)所构成，为了获得方程(2-1)在子域上的解析解，尚需四个边界条件。不妨设子域e_{ij}四个边界上的水头分布函数为$H_E(y)$、$H_W(y)$、$H_N(x)$和$H_S(x)$。在e_{ij}上若采用局部坐标，则由方程(2-1)及边界条件$H_E(y)$、$H_W(y)$、$H_N(x)$和$H_S(x)$所构成的子域定解问题为

$$
(\mathrm{I})\begin{cases}
T\left(\dfrac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 H}{\partial y^2}\right)+W=0 & (x,y)\in e_{ij}\\
H(x,-\Delta y)=H_S(x)\\
H(x,\Delta y)=H_N(x)\\
H(-\Delta x,y)=H_W(y)\\
H(\Delta x,y)=H_E(y)
\end{cases}
$$

定解问题(Ⅰ)可分解为如下两个问题的叠加。

问题 Ⅰ-1：非齐次边界条件的齐次方程

$$
(\mathrm{I}\text{-}1)\begin{cases}
T\left(\dfrac{\partial^2 H_1}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 H_1}{\partial y^2}\right)=0 & (x,y)\in e_{ij}\\
H_1(x,-\Delta y)=H_S(x)\\
H_1(x,\Delta y)=H_N(x)\\
H_1(-\Delta x,y)=H_W(y)\\
H_1(\Delta x,y)=H_E(y)
\end{cases}
$$

问题 Ⅰ-2：齐次边界条件的非齐次方程

$$
(\mathrm{I}\text{-}2)\begin{cases}
T\left(\dfrac{\partial^2 H_2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 H_2}{\partial y^2}\right)+W=0 & (x,y)\in e_{ij}\\
H_2(x,-\Delta y)=0\\
H_2(x,\Delta y)=0\\
H_2(-\Delta x,y)=0\\
H_2(\Delta x,y)=0
\end{cases}
$$

对问题(Ⅰ-1)还可进一步分解为以下两个问题，即