高等学校数学辅导教材之 2

线性代数辅导讲义

编著 清华大学 李永乐
清华大学 周耀耀

国家行政学院出版社

高等学校数学辅导教材之❷

线性代数
辅导讲义

编著　清华大学　李永乐
　　　清华大学　周耀耀

国家行政学院出版社

图书在版编目（CIP）数据

线性代数辅导讲义/李永乐，周耀耀编著. －北京：国家行政学院出版社，2001.8
ISBN 7-80140-180-8

Ⅰ.线… Ⅱ.①李… ②周… Ⅲ.线性代数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2001）第 053903 号

线性代数辅导讲义

李永乐 周耀耀 编著

*

国家行政学院出版社出版发行

北京市海淀区长春桥路 6 号

邮政编码：100089

发行部电话：68920615，68929949

新华书店经销

北京市朝阳印刷厂印刷

*

850×1168 1/32 开本 9.25 印张 300 千字

2001 年 8 月第 1 版 2001 年 8 月第 1 次印刷

ISBN 7-80140-180-8/O·15 定价：12.00 元

前　言

线性代数是一门重要的基础课，它研究的是有限维空间的线性理论，它所涉及到的处理问题的思想、方法和技巧被广泛地应用到科技的各个领域，尤其是随着计算机的发展，这种离散化解决问题的手法尤显重要。

线性代数这门课程的特点是：概念多，符号多，运算法则多（有些法则与大家习惯的数的运算法则有较大的反差），容易引起混淆；内容上纵横交错，前后联系紧密，环环相扣，相互渗透，切入点接口多；对于抽象性和逻辑性有较高的要求。因此，初学者驾驭把握起来有一定困难，不少同学虽用心学习，但收效甚微。为此，我们编写此书希望给同学一些帮助。

本书每章设有**内容提要，主要知识网络图，重要的定理与公式**，希望能帮助同学把握住该章的核心，通过选编的**典型例题**（约 300 道），或是澄清基本概念与基本运算，或是指出初学者常犯之错误，或是介绍线性代数中常用思路与技巧，并且许多题目给出一题多解，通过这些希望能开阔思路，活跃思维，举一反三，触类旁通。同学做各章设置的**练习题**可达到巩固、理解、提高的目的。在做练习题时，一定要独立思考，动手做题，

实在有困难再看提示和参考答案。

编写本书时，我们主要参考了下列大学的线性代数教材：**清华大学、同济大学、西安交通大学、浙江大学、四川大学**以及高教出版社出版的面向21世纪课程教材，还有N.B. 普罗斯库列柯夫著、周晓钟译的“线性代数习题集”和全国工学、经济学硕士生入学考试试题。

由于编者水平所限，疏漏错误难免，欢迎读者批评指正。

编　者

2001年8月于清华园

目　　录

第一章　行列式

内容提要

行列式是一个重要的数学工具，在线性代数中有较多的应用．

应当在理解 n 阶行列式的概念，掌握行列式性质的基础上，熟练地计算 3 阶、4 阶行列式，也要会计算简单的 n 阶行列式．

计算行列式的基本方法是用按行(列)展开公式，通过降阶来实现，但在展开之前往往先运用行列式的性质，对行列式作恒等变形，以期有较多的零或公因式，这样可简化计算．计算时的常用技巧有：三角化法、公式法、递推法、~~数学归~~纳法等．

一、主要知识网络图

- $\boxed{\text{排列}}$ —— 逆序 —— 奇排列、偶排列
- $\boxed{\text{概念}}$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{t(j_1,j_2,\cdots,j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \qquad (1.1)$$

(不同行不同列元素乘积的代数和)

- $\boxed{\text{性质}}$
  - ~~行列互换~~，行列式的值不变
  - 互换行列式的两行(列)，行列式变号
  - 某行(列)有公因数可把其提到行列式符号之外
  - 某行(列)的 k 倍加至另一行(列)，行列式的值不变
  - 若行列式中某一行(列)的所有元素均为两项之和则该行列式可拆为两个行列式之和．即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- $\boxed{\text{展开式}}$　$D = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$ 代数余子式
- $\boxed{\text{计算}}$
  - 三角化法
  - 递推法
  - 加边法 —— 范德蒙
  - 教学归纳法
  - 公式法 —— 拉普拉斯公式、　+展开法
  - 拆项法
- $\boxed{\text{应用}}$
  - 克莱姆法则　$x_i=\frac{D_i}{D}$
  - 齐次线性方程组有非零解的充分条件

【评注】 ① 由于 n 级排列共有 $n!$ 个，其中奇排列与偶排列的个数相同，因此 n 阶行列式含有 $n!$ 项，其中带正号与带负号的各占二分之一.

② 虽然可用定义来计算行列式的值，但多数情况下是烦乱的，计算行列式主要用行列式的按行(列)展开公式，通过降阶来实现，但在用展开式之前往往先利用行列式的性质对其作恒等变形，以期减少计算工作量.

二、主要定理

【定理 1.1】 (行列式按行(列)展开公式) n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1,2,\cdots,n),$$

或 $$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1,2,\cdots,n). \tag{1.2}$$

【定理 1.2】 行列式某一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零. 即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0 \quad (i \neq j),$$

或 $$a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + \cdots + a_{nj}A_{nk} = 0 \quad (j \neq k). \tag{1.3}$$

【定理 1.3】 (克莱姆法则) 如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数行列式 $D \neq 0$，则方程组有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}. \tag{1.4}$$

其中 $D_j(j = 1,2,\cdots,n)$ 是把系数行列式 D 中第 j 列的元素用方程组的常数项替代后所得到的 n 阶行列式.

【定理 1.4】 如果齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

有非零解,则它的系数行列式必为零.

三、重要公式

1. 上(下)三角行列式的值等于主对角线元素的乘积.即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \mathbf{0} \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}. \tag{1.5}$$

2. 两个特殊的拉普拉斯展开式

(1) $$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & c_{n1} & \cdots & c_{nm} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}. \tag{1.6}$$

(2) $$\begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1m} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nm} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ b_{11} & \cdots & b_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ b_{11} & \cdots & b_{1m} & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} & c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{mn} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}. \tag{1.7}$$

3. 范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j). \tag{1.8}$$

典型例题分析

(一) n 阶行列式的概念

【例 1.1】 求下列排列的逆序数:

(1) 21736854;

(2) $135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)$.

【分析】 求一个排列的逆序数可以有两种思路:

思路一:按此排列的次序分别算出每个数的后面比它小的数的个数,然后求和.

思路二:按自然数的顺序分别算出排在 1,2,3,⋯ 前面的比它大的数的个数,再求和.

【解法一】 (用思路一)

2 的后面有 1 小于 2,故 2 的逆序数为 1.

1 的后面没有小于 1 的数,1 的逆序数为 0.

7 的后面有 3,6,5,4 小于 7,故 7 的逆序数为 4. 依此方法逐个计算. 可知此排列的逆序数

$$\tau(21736854) = 1 + 0 + 4 + 0 + 2 + 2 + 1 + 0 = 10.$$

【解法二】 (用思路二)

1 的前面比 1 大的数有 1 个 2,故 1 的逆序数是 1.

2 排在首位没有逆序.

3 的前面有一个 7 比 3 大,逆序数为 1.

依此计算,得

$$\tau(21736854)=1+0+1+4+3+1+0+0=10.$$

(2) 此排列的前 n 个数 $135\cdots(2n-1)$ 之间没有逆序,后 n 个数 $246\cdots(2n)$ 之间也没有逆序,只是前 n 个数与后 n 个数之间才有逆序,用思路一易见.

$$\begin{aligned}&\tau(135\cdots(2n-1)246\cdots(2n))\\=&0+1+2+\cdots+(n-1)+0+0+\cdots+0\\=&\frac{1}{2}n(n-1).\end{aligned}$$

【例1.2】 已知 $a_{3j}a_{12}a_{41}a_{2k}$ 在4阶行列式中带负号,求 j 与 k.

【分析】 本题有两种方法,一是先将该项的行指标按自然顺序排好,然后再用列指标应当是奇排列(因为该项带负号)来确定 j 与 k.另一方法是直接计算行的逆序数与列的逆序数,使其和为奇数来定 j 与 k.

【解法一】 由于 $a_{3j}a_{12}a_{41}a_{2k}=a_{12}a_{2k}a_{3j}a_{41}$,而 $2,k,j,1$ 是1至4的排列,故 j 与 k 只能取自3和4.

若 $j=3,k=4$,则

$$\tau(2431)=1+2+1=4$$

是偶排列,与该项带负号不符,故 $j=4,k=3$.

【解法二】 同前,若 $j=3,k=4$,则该项为 $a_{33}a_{12}a_{41}a_{24}$,此时,行指标与列指标的逆序数之和

$$\tau(3142)+\tau(3214)=3+3=6$$

是偶数,与该项带负号不符,可见 $j=4,k=3$.

【注】 若 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}=a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}$,则

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}=(-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_n)}.$$

但 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 与 $\tau(k_1k_2\cdots k_n)$ 不一定相等,它们只是奇偶性相同,这一点不要混淆.

【例1.3】 写出4阶行列式中含 $a_{11}a_{23}$ 的项.

【分析】 行列式是不同行不同列元素乘积的代数和,含 $a_{11}a_{23}$ 的项应当有形式 $a_{11}a_{23}a_{3j_3}a_{4j_4}$,由此分析 j_3,j_4 的取值及该项所带的正负号.

【解】 因为含 $a_{11}a_{23}$ 的项可写为 $a_{11}a_{23}a_{3j_3}a_{4j_4}$,其中 $13j_3j_4$ 是1至4的排列.所以 j_3,j_4 取自2和4.可见共有两项含 $a_{11}a_{23}$.

若 $j_3=2,j_4=4$,则

$$\tau(1324)=1$$

是奇排列,故该项带负号为:$-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$.

若 $j_3=4,j_4=2$,利用对换改变排列的奇偶性,知 $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$ 带正号.即 4 阶行列式中,含 $a_{11}a_{23}$ 的项是:$-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$, $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$.

【例 1.4】 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ x & 1 & 0 & x \end{vmatrix}$$展开式中 x^4 与 x^3 的系数.

【分析】 按行列式定义,行列式中每一项都是不同行不同列元素的乘积.那么,要构成 x^4 必须各行各列都要含 x,因此只能是 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$,而对于 x^3,可判断该项必不含 a_{11},若含 a_{12},则可由 $a_{33}a_{41}a_{24}$, $a_{33}a_{44}a_{21}$ 分别构成,若不含 a_{12},则可由 $a_{22}a_{33}a_{41}a_{14}$ 构成,可见含 x^3 的共有三项.

【解】 按行列式定义,有且只有 $a_{11},a_{22},a_{33},a_{44}$ 四元素相乘才出现 x^4,故 x^4 的系数是 2.

对于 x^3,则有 $a_{12}a_{24}a_{33}a_{41}$, $a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$, $a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}$ 三项,此时各项的系数分别是 $a_{24}=-1,a_{21}=1,a_{14}=2$ 即 $-x^3,x^3,2x^3$ 又各项逆序数分别是 $\tau(2431)=4,\tau(2134)=1,\tau(4231)=5$, 故所带符号为正、负、负.因此 x^3 的系数是 -4.

【例 1.5】 证明

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2\,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2\,n-1}\cdots a_{n1}. \tag{1.9}$$

【证明】 由于行列式的一般项为 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$,所带符号是 $(-1)^{\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)}$.因为第一行除了 a_{1n} 外其它数均为 0,因此欲要得到非 0 项,第一行必取 a_{1n},即 $j_1=n$,这样第二行不能选 a_{2n}(因为每列只能选一个数),故只能选 $a_{2\,n-1}$.类似地,第三行只能取 $a_{3\,n-2}$, $\cdots$.因此这个行列式只有唯一的一项

$$a_{1n}a_{2\,n-1}\cdots a_{n1}$$

有可能不为 0,而这一项列指标的逆序数为

$$\tau(n,n-1,\cdots,1)=(n-1)+(n-2)+\cdots+0$$
$$=\frac{1}{2}n(n-1).$$

因此,右下三角行列式的值为$(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}a_{1n}a_{2\,n-1}\cdots a_{n1}$.

【评注】 上(下)三角行列式的值是主对角元素的乘积(1.5),而右下(左上)三角行列式的值是副对角线元素的乘积并且带有正负号$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$(1.9),这两个公式要分清.

【例1.6】 已知 n 阶行列式D中有n^2-n+1个0,证明$D=0$.

【证明】 因为 n 阶行列式D中共有n^2个元素,现在其中有n^2-n+1个0,故非0元素共有 $n-1$个.按行列式定义

$$D=\sum(-1)^{\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

因此,$a_{1j_1},a_{2j_2},\cdots,a_{nj_n}$ 这 n 个元素中至少有一个是0,故行列式 $D=0$.

【例1.7】 证明

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}&a_{15}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}&a_{25}\\a_{31}&a_{32}&0&0&0\\a_{41}&a_{42}&0&0&0\\a_{51}&a_{52}&0&0&0\end{vmatrix}=0.$$

【证明】 由题设知,当$k\geqslant 3$时,$a_{3k}=a_{4k}=a_{5k}=0$,而行列式D中的一般项是

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}.$$

由于j_3,j_4,j_5互不相同且取自于1至5,故其中至少有一个要大于或等于3,那么$a_{3j_3},a_{4j_4},a_{5j_5}$中至少有一个为0,所以$D$的展开式中每一项都是0,故行列式$D=0$.

【例1.8】 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}0&0&a&0\\b&0&0&0\\0&c&0&d\\0&0&e&f\end{vmatrix}\quad 之值.$$

【分析】 按行列式定义,D的一般项是$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$,由于行列式中有较多的0,该项若不为0,则必有

$$j_1 = 3,\quad j_2 = 1.$$

而 j_3 可取 2 或 4，j_4 可取 3 或 4. 但因 j_1,j_2,j_3,j_4 是 1 至 4 的排列，互不相同，那么必有

$$j_4 = 4,\quad j_3 = 2.$$

所以在 D 的 4!项中，仅有一个非 0 项.

【解】 $$D = \sum(-1)^{\tau(j_1j_2j_3j_4)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4} = (-1)^{\tau(3124)}abcf = abcf.$$

【例 1.9】 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2000 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 2001 \end{vmatrix}$$ 之值.

【分析】 行列式 D 中有大量的 0，对于 D 的一般项

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

若该项不为 0，必有

$$j_1 = 2000,\quad j_2 = 1999,\quad \cdots,\quad j_{2000} = 1,\quad j_{2001} = 2001.$$

逆序数 $\tau(2000,1999,\cdots,2,1,2001) = \frac{1}{2}2000 \cdot 1999$ 为偶数.

故 $$D = 2001!$$

【评注】 对行列式要认识到它是不同行不同列元素乘积的代数和，要处理好每项所带的正负号，它是由排列的奇偶性所决定的. 这里的行列式有较多的 0，因而可以用定义法来分析论证，以加深对概念的理解，但即使有如此多的 0，我们仍应当用行列式的性质，展开公式来计算，以减少工作量. 对于一般的行列式若用定义法来计算几乎是不现实的.

（二） n 阶行列式的计算

【例 1.10】 计算 4 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 6 \\ 4 & -1 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -5 \\ 1 & 4 & -2 & -2 \end{vmatrix}$$ 之值.

【分析】 本题的行列式没有太多的规律，因而用展开公式来计算，但要先利用行列式的性质将其恒等变形，让其某行(或列)有较多的零.

【解】 $$D \xlongequal[c_4-5c_1]{c_2+2c_1} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & -4 \\ 4 & 7 & 5 & -20 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & -2 & -7 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 7 & 5 & -20 \\ 6 & -2 & -7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2-5r_1} -\begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ -8 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & -7 \end{vmatrix}$$

$$= -(-8)(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -2 & -7 \end{vmatrix} = 120.$$

【评注】 r_i 表示行列式的第 i 行，c_j 表示行列式的第 j 列，对换 i 行与 j 行记成 $r_i \leftrightarrow r_j$，第 i 行乘以 k 记成 kr_i，i 行的 k 倍加至 j 行记成 $r_j + kr_i$，类似有列变换的记号.

用行列式展开式时，不要丢掉正负号.这是初学时常犯的错误.

【例 1.11】 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} \quad \text{之值.}$$

【分析】 为简化计算可利用行列式的性质去掉行列式里的分母，转化为整数的运算.

【解】 (三角化法)

$$D = (\frac{1}{2})^4\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{\sum r_i} \frac{1}{16}\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$
=\frac{5}{16}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&1&1\\1&1&2&1\\1&1&1&2\end{vmatrix}\xlongequal[r_4-r_1]{\substack{r_2-r_1\\r_3-r_1}}\frac{5}{16}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{vmatrix}
$$

$$
=\frac{5}{16}.\quad(\text{由}(1.5))
$$

【评注】 如果行列式各列元素和相等都是 a，一个常用的办法是将各行均加至第一行，则第一行有公因数 a 可提到行列式记号之外.

对行列式作恒等变形，化其为上三角或下三角行列式利用公式(1.5)是常用技巧.

【例 1.12】 计算行列式

$$
D=\begin{vmatrix}1&b_1&0&0\\-1&1-b_1&b_2&0\\0&-1&1-b_2&b_3\\0&0&-1&1-b_3\end{vmatrix}\quad\text{之值.}
$$

【解】 (三角化法)

$$
D\xlongequal{r_2+r_1}\begin{vmatrix}1&b_1&0&0\\0&1&b_2&0\\0&-1&1-b_2&b_3\\0&0&-1&1-b_3\end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal{r_3+r_2}\begin{vmatrix}1&b_1&0&0\\0&1&b_2&0\\0&0&1&b_3\\0&0&-1&1-b_3\end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal{r_4+r_3}\begin{vmatrix}1&b_1&0&0\\0&1&b_2&0\\0&0&1&b_3\\0&0&0&1\end{vmatrix}=1.\quad(\text{由}(1.5))
$$

【评注】 逐行(列)相加减的技巧应当知道.

【例 1.13】 计算行列式