高等学校规划教材

高等数学

（下册）

主　编　张兴永
副主编　赵迁贵　孟　健
杨宏晨　吴宗翔

煤炭工业出版社

高等数学

（下册）

主　编　张兴永
副主编　赵迁贵　孟　健
　　　　杨宏晨　吴宗翔

煤炭工业出版社
·北　京·

内 容 提 要

本书是根据全国高校工科数学课程教学指导委员会的《高等数学课程教学基本要求》和考研大纲，由高等院校多位具有丰富教学经验的专家学者和一线教师在分析、研究、对比、总结了国内现行教材的基础上鼎立合作编写而成的。全书分上、下两册。下册内容包括多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、常微分方程等五章。书中内容重点突出，例题丰富有层次，便于课堂教学和学生学习。每章节后的习题分 A 组基本题和 B 组提高题，便于分层次教学，书末附录中给出了习题参考答案并介绍了 MATLAB 软件的作图功能及在高等数学(下)中的应用。

本书可作为高等工科院校和经济类、管理类等各专业的教材，也可供成人高校、自学考试人员以及工程技术人员参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学．下册/张兴永主编．—北京：煤炭工业出版社，2008.1

ISBN 978－7－5020－3247－0

Ⅰ.高… Ⅱ.张… Ⅲ.高等数学－高等学校－教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 204372 号

煤炭工业出版社 出版
(北京市朝阳区芍药居 35 号 100029)
网址：www.cciph.com.cn
环球印刷(北京)有限公司 印刷
新华书店北京发行所 发行
*
开本 787mm×1092mm 1/16 印张 16
字数 387 千字 印数 1—5,000
2008 年 1 月第 1 版 2008 年 1 月第 1 次印刷
社内编号 6048 定价 26.00 元

前　言

《高等数学》课程是工科大学生的重要基础理论课程，它的理论和方法几乎渗透了一切科学技术领域并起着极其重要的作用。为了提高《高等数学》课程的教学质量，适应《高等数学》课程建设和国家精品课程建设的需要，我们组织了长期担任《高等数学》课程教学、具有高级职称和丰富教学经验的多位专家学者和一线骨干教师，根据全国高校工科数学课程教学指导委员会的《高等数学课程教学基本要求》及考研大纲，在分析、研究、对比、总结了国内现行教材的基础上，综合多年的教学经验、备课笔记和教学课件等内容集体编写了此书。

本书分上、下两册出版。上册包括一元函数的微积分、向量代数与空间解析几何等内容，下册包括多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、常微分方程等内容。每章节后分别配有习题，书末附有习题参考答案和 MATLAB 软件的作图功能及其在高等数学（下）中的应用介绍。本教材的特点是：

（1）教学内容重点突出，例题丰富有层次，各章节知识引入自然，讲述通俗易懂，便于课堂教学和学生学习；

（2）书后习题分 A 组基本题和 B 组提高题，便于分层次教学和学习；

（3）增加了 MATLAB 软件的作图功能和在高等数学（下）中应用的实践环节，进一步开阔了学生的视野。

本书的第八章由赵迁贵编写，第九章由吴宗翔编写，第十章和 MATLAB 软件的作图功能及在高等数学（下）中的应用由张兴永编写，第十一章由孟健编写，第十二章由杨宏晨编写，全书由张兴永统稿。

在本书的编写过程中，我们得到了《高等数学》课程教学老师的积极支持，他们提出了许多改进建议，使得书稿质量趋于完善，在此我们表示衷心的感谢！

限于编者水平，难免存在不妥之处，请读者批评指正。

编　者

2008 年 1 月

目　录

第八章　多元函数微分学

在上册中所讨论的函数仅依赖一个自变量，即所谓一元函数，我们研究了一元函数的微分学与积分学. 然而，在更多的实际问题中，常会遇到依赖两个或者两个以上变量的所谓多元函数，因此，同样需要讨论多元函数的微分学与积分学，它们的基本概念、理论和方法是一元函数的微积分中相应的概念、理论和方法的推广和发展，既有许多相似之处，又有很多本质上的不同. 读者在学习多元函数的微积分学时，要善于与一元函数微积分进行比较，不但要注意到它们的共同点和相互联系，更要特别注意多元函数与一元函数的区别，研究所出现的新情况和新问题，这样，就能深刻理解，融会贯通.

本章讨论多元函数的微分学，先介绍 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 的点集基本概念，在此基础上将极限、连续推广到多元函数，然后把一元函数的导数和微分及其应用也推广到多元函数. 在讨论中我们以二元函数为主，因为从一元函数推广到二元函数的会有本质变化，而从二元函数到二元以上的多元函数则可以类推.

§8.1　多元函数的基本概念

大家知道，一元函数 $y=f(x)$ 的定义域是实数轴上的点集，例如开区间 (a,b)、闭区间 $[a,b]$ 和点 x_0 的 δ 邻域 $U(x_0,\delta)$ 等，而全体实数 $\mathbf{R}$ 又称为一维空间，即 $\mathbf{R}^1=\mathbf{R}$. 二元函数的定义域将是坐标平面上的点集，因此，在讨论二元函数之前，有必要先了解有关平面点集的一些基本概念，然后给出多元函数及其极限的定义以及多元函数的连续性的定义和性质.

一、平面点集　n 维空间

由平面解析几何知道，在平面直角坐标系 xOy 中的点 P，其坐标与有序二元数组 (x,y) 一一对应，二元有序数组 (x,y) 的集合，就表示坐标平面，即 $\mathbf{R}^2=\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 表示二维空间，

$$\mathbf{R}^2=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbf{R}\}=\{(x,y)\mid -\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty\}.$$

在坐标平面 xOy 上具有某种特性 Q 的点的集合，称为平面点集，记作

$$E=\{(x,y)\mid (x,y)\text{具有性质 }Q\}.$$

例如集合

$A=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$ 表示以原点为圆心，半径为 1 的圆周上的点集；

$B=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$ 表示以原点为圆心，半径为 1 的圆周内的点集；

$C=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$ 表示以原点为圆心，半径为 1 的圆周和圆周内的点集. 在这里，点集 A,B,C 互不相同.

与 $\mathbf{R}^1$ 中的邻域、区间类似的有下面的定义

1. 邻域、去心邻域

定义　**设 $P_0(x_0,y_0)$ 是 xOy 平面上的一个点，δ 为一正数，与点 $P_0(x_0,y_0)$ 距离小于 δ**

的点 $P(x,y)$ 的集合，称为点 P_0 的 δ 邻域，记为 $U(P_0,\delta)$，即

$$U(P_0,\delta)=\{(x,y)\,\|\,P_0P|<\delta\},$$

或

$$U(P_0,\delta)=\{(x,y)|\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta)\}.$$

点 P_0 的 δ 去心邻域，记为 $\mathring{U}(P_0,\delta)$，即

$$\mathring{U}(P_0,\delta)=\{(x,y)|0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}.$$

在几何意义上，邻域 $U(P_0,\delta)$ 表示以点 P_0 为圆心，δ 为半径的圆周内的点集，当不需要强调邻域的半径 δ 时，可以用 $U(P_0)$ 表示点 P_0 的某个邻域，$\mathring{U}(P_0)$ 表示点 P_0 的某个去心邻域. 例如，$U(O,1)=\{(x,y)|x^2+y^2<1\}$ 为点 O 的 1 邻域，$\mathring{U}(O,a)=\{(x,y)|0<x^2+y^2<a^2\}$ 为点 O 的 a 去心邻域. 这里应注意到，平面点集中邻域记号 $U(O,1)$ 与上册中实数轴上的邻域记号 $U(0,1)$ 的区别.

以上定义的邻域是圆形的，其实还可以定义方形的邻域

$$U'(P_0,\delta)=\{(x,y)\,\|\,x-x_0|<\delta,|y-y_0|<\delta\}.$$

下面将利用邻域来描述点和点集之间的位置关系

2. 内点、外点、边界点

任意一点 $P\in\mathbf{R}^2$，与任意一个点集 $D\subset\mathbf{R}^2$ 之间必有下列三种关系中的一种：

(1) **内点**　点 P 属于点集 E，如果存在 P 的某一个 δ 邻域 $U(P,\delta)$，在此邻域 $U(P,\delta)$ 内的所有的点都属于点集 D，即 $P\in D$，$\exists\,\delta>0$，使 $U(P,\delta)\subset D$，则称点 P 为点集 D 的**内点**. 显然，内点邻近的点也都属于点集 D.

(2) **外点**　点 P 不属于点集 D，如果存在 P 的某一个 δ 邻域 $U(P,\delta)$ 也不属于点集 D，即 $P\notin D$，且存在 $U(P,\delta)$，使得 $U(P,\delta)\cap D=\varnothing$，则称点 P 为点集 D 的**外点**，换句话说，外点不属于点集 D，外点邻近的点也都不属于点集 D.

(3) **边界点**　如果 P 的任何一个邻域 $U(P)$，既有属于 D 的点，又有不属于 D 的点，则称 P 是 D 的一个**边界点**. 边界点可以属于 E，也可以不属于 E，边界点必定不是内点. E 的边界点集合称为边界，记为 ∂E.

如图 8－1 所示，P 是点集 D 的内点. P_0 是点集 D 的边界点，P_1 是点集 D 的外点. 可见 D 的内点必然属于 D，D 的外点必然不属于 D.

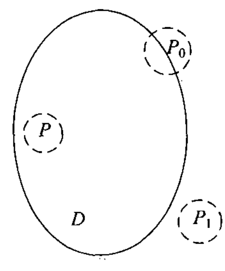

图 8－1

3. 聚点

设点 $P\in\mathbf{R}^2$，点集 $E\subset\mathbf{R}^2$，如果 P 的任何一个去心邻域 $\mathring{U}(P,\varepsilon)$ 总含有 E 中的点. 则称点 P 为点集 E 的**聚点**. 换句话说，聚点是这样的点，在聚点的近旁总还有 E 中的无穷多个点，聚点的"聚"由此而来.

聚点可以属于 E，也可以不属于 E. 内点必然是聚点，边界点未必是聚点.

例如，平面点集 $E=\left\{\left(\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n}\right)\middle|\,n=1,2,\cdots\right\}$，原点 $(0,0)\notin E$，它是 E 的惟一聚点，也是 E 的边界点；E 的点 $\left(\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n}\right)(n=1,2,\cdots,M)$ 也都是 E 的边界点.

又例如,平面点集

$$D=\{(x,y)\mid 0<x^2+y^2\leqslant 1\},$$

满足不等式 $0<x^2+y^2<1$ 的一切点(x,y)都是 D 的内点;原点$(0,0)$是 D 的边界点,它不属于 D;而满足等式 $x^2+y^2=1$ 的一切点(x,y)都是 D 的边界点,它们都属于 D;点集 D 的边界$\partial D=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1,x^2+y^2=0\}$,边界$\partial D$ 上的一切点(x,y)都是 D 的聚点.

根据点集中所属点的特征,再定义一些重要的平面点集.

4. 开集、闭集、区域

(1) **开集**　如果点集 E 的点都是内点,则称 E 为开集.

(2) **闭集**　如果点集 E 的余集E^c 为开集,则称 E 为闭集.

例如,点集$\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2<4\}$为开集,点集$\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$为闭集,而点集$\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2\leqslant 4\}$既非开集,也非闭集.

(3) **区域**　如果点集 E 中任意两点都可用完全属于E 的折线(曲线)连结起来,则称点集 E 是**连通集**.连通的开集就称为**区域**,或开区域.开区域连同它的边界一起,称为**闭区域**.

例如,点集$\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2<4\}$是区域,点集$\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$是闭区域,而点集$\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2\leqslant 4\}$既非开区域,也非闭区域.

5. 点集的有界性

假设 D 为平面点集,如果存在正数 M,使得

$$D\subset U(O,M),$$

其中 O 是坐标原点,则称 D 为**有界集**,否则称为**无界集**,即一个点集不是有界集就称这个点集为无界集,当有界集为区域时,则称为**有界区域**,而有界区域连同它的边界一起,称为**有界闭区域**.

例如,点集$\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2<4\}$为有界区域,点集$\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$是有界闭区域,点集$\{(x,y)\mid x+y>0\}$为无界开区域,点集$\{(x,y)\mid x^2+y^2\geqslant 1\}$是无界闭区域.

上面平面点集的一些基本概念可完全类似地推广到三维空间 $\mathbf{R}^3,\cdots,n$ 维空间 $\mathbf{R}^n$.

6. n 维空间

在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中的点P,其坐标与有序三元数组(x,y,z)一一对应,三元有序数组(x,y,z)的集合,即 $\mathbf{R}^3=\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,y,z)\mid x,y,z\in\mathbf{R}\}$就表示三维空间.

例如,点集

$\Sigma=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2=R^2\}$表示以原点为球心,半径为 R 的球面上的点集;

$\Omega=\{(x,y,z)\mid \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\leqslant 1\}$表示以原点为中心的椭球面和椭球面内的点集;

推广到 n 维空间 $\mathbf{R}^n$,点 P 的坐标用n 元有序数组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$表示,n 元有序数组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的集合,即 $\mathbf{R}^n=\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\cdots\times\mathbf{R}=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in\mathbf{R},i=1,2,\cdots,n\}$称为 n 维空间.

在 $\mathbf{R}^n$ 中,两点 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n),y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$间的距离,记作 $\rho(x,y)$,规定

$$\rho(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}.$$

显然,当 $n=1,2,3$ 时,上述规定与数轴上,直角坐标系下平面和空间中两点间的距离一致.

在 $\mathbf{R}^n$ 中的点a 的δ 邻域,点集的内点、外点、边界点和聚点,以及开集、闭集、区域和有界性等一系列概念,都完全与平面点集的概念类似,不再赘述.

二、多元函数的概念

在自然界的各种现象和实际问题中，经常遇到多个变量之间的依赖关系，即一个问题涉及多个因素，一个变量依赖于多个变量的情形.

例如，平面方程

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

当 $C\neq 0$ 时，则可改写为

$$z=-\frac{Ax+By+D}{C}.$$

这就表明，对于给定的点 $(x,y)\in\mathbf{R}^2$，按规律 $z=-\dfrac{Ax+By+D}{C}$ 确定数值 z.

又例如，球面方程

$$x^2+y^2+z^2=a^2,$$

则可改写为

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}\text{或 } z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}.$$

这就表明，对于给定的点 $(x,y)\in D$，$D:x^2+y^2\leqslant a^2$，可按规律确定数值 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 或 $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$.

定义（二元函数） **设有变量 x,y 和 z，点集 $D\subset\mathbf{R}^2$，如果对于每一个点 $(x,y)\in D$，变量 z 按照一定的法则，总有确定的数值与之对应，则称 z 是 x,y 的二元函数，记作**

$$z=f(x,y),\ (x,y)\in D,$$

x,y 为自变量，z 为因变量，点集 D 为函数的定义域，z 的取值范围称为函数的值域.

类似可定义 n 元函数

$$u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n),\ P=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n\,(n>2).$$

二元以上的函数统称为**多元函数**，一般地，n 元函数统一记为

$$u=f(P);\ P\in\mathbf{R}^n,$$

称之为点 P 的函数.

当点 P 在 x 轴上变化时，即 $P\in\mathbf{R}^1$，则为一元函数 $y=f(x)$；

当点 P 在 xOy 平面上变化时，即 $P\in\mathbf{R}^2$，则为二元函数 $z=f(x,y)$；

当点 P 在空间 $\mathbf{R}^3$ 内变化时，即 $P\in\mathbf{R}^3$，则为三元函数 $u=f(x,y,z)$；

……

当 $P=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$，则为 n 元函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.

注意 ① 决定多元函数两个重要因素仍然是：函数对应法则和函数的定义域，例如对于二元函数 $z=f(x,y)$，$(x,y)\in D$ 而言，函数对应法则记号为 f，对于每一个 $(x,y)\in D$，按照这个法则 f，就取定数值 $f(x,y)$，即 $z=f(x,y)$，不同的二元函数的对应法则是不同的，记号可以任意选择，比如 $z=\phi(x,y)$，$z=z(x,y)$ 等，而函数的定义域 D，表示点 (x,y) 的范围，与一元函数相类似，一般做如下约定：在讨论用算式表达的函数时，就以使得这个算式有意义的点 (x,y) 的集合，这是函数的**自然定义域**，此时，函数的定义域不特别标出，例如函数 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的定义域为 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$. ② 对于二元函数 $z=f(x,y)$，$(x,y)\in D$ 在几何意义上通常表示空间曲面，如图 8－2 所示.

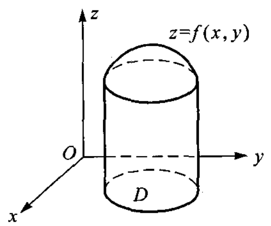

图 8－2

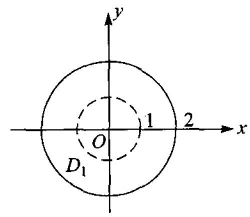

图 8－3

例如二元函数 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 表示上半球面，$z=x+y$ 表示过原点的一平面.

例 1　求下列函数的定义域，并指出定义域的有界性.

(1) $z=\sqrt{4-x^2-y^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$；(2) $u=\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}$.

解　(1) 要使函数有意义，只要

$$\begin{cases}4-x^2-y^2\geqslant 0,\\ x^2+y^2-1>0,\end{cases}$$

即 $1<x^2+y^2\leqslant 4$，所以，定义域为

$$D_1=\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2\leqslant 4\},$$

如图 8－3 所示，表示平面上的圆环. 它是平面有界区域.

(2) 要使函数 $u=\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}$ 有意义，只要

$$a^2-x^2-y^2-z^2\geqslant 0,\quad 即\quad x^2+y^2+z^2\leqslant a^2,$$

所以定义域为 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant a^2\}$，表示在空间中以原点为球心，以 a 为半径的球体，它是空间有界闭区域.

注意　$f(x)=\sin x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(x,y)=\sin x$ 的定义域为 $\mathbf{R}^2$，在没有特别说明时，函数的表达式中出现几个变量，就认为是几元函数，函数的定义域也就是几维空间的点集.

例 2　指出下列函数的定义域，并说明定义域的有界性：

(1) $z=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$；　　(2) $z=\sqrt{x^2+y^2-1}$.

解　(1) 定义域为 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\neq 0\}$，它是平面无界区域；

(2) 定义域为 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2-1\geqslant 0\}$，它是平面无界闭区域.

例 3　设函数 $z=f(x,y)=3x+4y$，求 $f[xy,f(x,y)]$.

解　$f[xy,f(x,y)]=3(xy)+4f(x,y)=3xy+4(3x+4y)=3xy+12x+16y$.

三、多元函数的极限

在讨论一元函数极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 时，要求函数 $f(x)$ 定义在 x_0 的某个去心邻域内，这是由于：一方面极限是用来研究当 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的变化趋势，它与函数在 x_0 处是否有定义，以及在 x_0 处函数值 $f(x_0)$ 的大小无关，也就是说，与 x_0 是否在函数的定义域中无关；另一方面，为了反映函数 $f(x)$ 的变化趋势，还应要求在 x_0 的任何邻域内都含有函数定义域中的点 x，因此，要求函数定义在 x_0 的某个去心邻域内，实际上就是要求 x_0 是函数定义域中的聚点. 所以，在定义二元函数 $f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 的极限时，也应当要求

(x_0,y_0)是定义域中的聚点.

定义(二元函数极限) **设二元函数 $z=f(x,y)$,定义域为 D,点 $P_0(x_0,y_0)$是 D 的聚点,A 为常数,如果对于任意给定的正数 ε,总存在正数 δ,使得对于不等式**

$$0<|P_0P|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

成立的一切点 $P(x,y)\in D$,都有$|f(x,y)-A|<\varepsilon$ 成立,则称常数 A 为函数$f(x,y)$当 $x\to x_0,y\to y_0$ 时的极限.记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A \quad 或 \quad \lim_{P\to P_0} f(P)=A,$$

也记作

$$f(x,y)\to A(x\to x_0,y\to y_0),f(x,y)\to A(\rho\to 0),其中\ \rho=|P_0P|.$$

这个极限也称为**二重极限**.否则,称当 $x\to x_0,y\to y_0$ 时,函数 $f(x,y)$没有极限.

二元函数 $z=f(x,y)$的二重极限在形式上与一元函数定义并无多大差别,按照点函数的极限而言,$\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=A(P,P_0\in\mathbf{R}^n)$与$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 是一致的,因此,一元函数的有关性质(如惟一性,局部有界性,局部保号性,夹逼准则等)和运算法则都可以推广到二元函数以及二元以上的多元函数的极限中来.

但是,要注意,在二元函数的二重极限中,由于自变量增多,产生了一些与一元函数极限本质差异,在一元函数极限中点 $x\to x_0$ 只能从 x_0 的左右两侧趋于 x_0,在二重极限中,点$(x,y)\to(x_0,y_0)$的方式可以是多种多样的,方向可以是任意多的,路径也可以是千姿百态的.所谓$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$ 是指当点$(x,y)\in D$ 从点(x_0,y_0)的四面八方以一切可能的任何方式和路径趋于点(x_0,y_0)时,$f(x,y)$都趋于同一个常数 A.因此,如果点$(x,y)\in D$ 以不同的方式趋于点(x_0,y_0)时,得到不同的结果,或者沿着某个路径趋于点(x_0,y_0)时,不趋于一个确定的常数,那么就可以断定极限$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$不存在.

例 4 用极限的定义证明$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{xy}=0$.

证明 函数的定义域为 $D=\{(x,y)|x\neq 0,y\neq 0\}$,$(0,0)\notin D$ 是D 的聚点.由于

$$\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{xy}-0\right|=(x^2+y^2)\left|\sin\frac{1}{xy}\right|\leqslant x^2+y^2,$$

可见,对于任给 $\varepsilon>0$,取 $\delta=\sqrt{\varepsilon}$,则当 $0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta$ 时,总有

$$\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{xy}-0\right|<\varepsilon$$

成立,所以

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{xy}=0.$$

例 5 用极限的定义证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}(2x+3y)=8$.

证明 函数的定义域为 $D=\mathbf{R}^2$,$(1,2)\in D$ 是D 的内点.由于

$$|(2x+3y)-8|=|2(x-1)+3(y-2)|\leqslant 2|x-1|+3|y-2|$$

$$\leqslant 2\sqrt{(x-1)^2}+3\sqrt{(y-2)^2}$$
$$\leqslant 2\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}+3\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}$$
$$=5\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2},$$

可见,对于任给 $\varepsilon>0$,取 $\delta=\frac{\varepsilon}{5}$,则当 $0<\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}<\delta$ 时,总有

$$|(2x+3y)-8|<\varepsilon$$

成立,所以

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}(2x+3y)=8.$$

例 6　设函数 $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$,证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$ 不存在.

证明　函数的定义域为 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\neq 0\}$,$(0,0)\notin D$ 是 D 的聚点,当 $P(x,y)$ 沿直线 $y=kx$ 趋于点 $(0,0)$ 时,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}f(x,y)=\lim_{x\to 0}f(x,kx)=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{(1+k^2)x^2}=\frac{k}{1+k^2},$$

上式表明,当 $P(x,y)$ 沿不同的直线 $y=kx$ 趋于点 $(0,0)$ 时,$f(x,y)$ 随 k 不同而趋于不同的数值.

例如,当 $P(x,y)$ 沿直线 $y=x$ 趋于点 $(0,0)$ 时,$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+x^2}=\frac{1}{2}$,

当 $P(x,y)$ 沿直线 $y=-x$ 趋于点 $(0,0)$ 时,$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=-x}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-x^2}{x^2+x^2}=-\frac{1}{2}$,

所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$ 不存在.

由于多元函数极限与一元函数极限的定义类似,所以一元函数极限的运算法则也适用于多元函数极限.

例 7　求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\frac{\sin(xy^2)}{x}$.

解　这里函数 $\frac{\sin(xy^2)}{x}$ 的定义域为 $D=\{(x,y)\mid x\neq 0,y\in\mathbf{R}\}$,$(0,2)$ 为 D 的聚点,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\frac{\sin(xy^2)}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\frac{\sin(xy^2)}{xy^2}\cdot y^2=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\frac{\sin(xy^2)}{xy^2}\cdot\lim_{y\to 2}y^2=1\cdot 4=4.$$

四、多元函数的连续性

定义　设函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某个邻域内有定义,如果

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=f(x_0,y_0),$$

则称函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 连续.否则称函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 间断.

如果函数 $f(x,y)$ 在开区域 D 的每一点都连续,则称函数 $f(x,y)$ 在开区域 D 内连续.

如果函数 $f(x,y)$ 在闭区域 D 的每一点都连续,则称函数 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续.

注意　与一元函数在闭区间的端点左右连续类似,闭区域 D 的边界点 $P_0(x_0,y_0)$ 必然

是聚点，且 $P_0\in D$，如果 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$，则函数 $f(x,y)$ 在闭区域 D 的边界点 $P_0(x_0,y_0)$ 上连续. 如果函数 $f(x,y)$ 在开区域 D 内连续，又在边界 ∂D 每一点都连续，则函数在闭区域 D 上连续.

根据函数 $f(x,y)$ 的连续性定义知，当函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处无定义，则必然是间断点. 例如函数 $z=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ 定义域是 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$，而在边界

$$\partial D=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$$

上的点都是间断点，称之为间断曲线.

函数 $z=f(x,y)$ 在开区域或闭区域连续，其图像表示一张完整连续曲面，即无洞、无裂缝的连续曲面. 例如函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 的图像表示锥面，函数 $z=x^2+y^2$ 的图像表示旋转抛物面.

例 8 讨论下列函数在点(0,0)处的连续性：

(1) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0;\end{cases}$ (2) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(xy)}{xy}, & xy\neq 0,\\ 1, & xy=0.\end{cases}$

解 (1) 由例 6 知 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 不存在. 所以函数在点(0,0)不连续，(0,0)是间断点.

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(xy)}{xy}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin u}{u}=1=f(0,0)$，所以函数在点(0,0)连续.

五、多元初等函数的连续性

和一元函数类似，多元连续函数的和、差、积、商(除去分母为零的点)与复合仍然为连续函数. 多元初等函数是指可以用一个式子表示的多元函数，这个式子是由常数及具有不同自变量的一元基本初等函数经过有限次的四则运算和复合步骤而得到的.

例如 $\sin(x^2+y^2)$，$\arctan(x+y)$，$\dfrac{x^2z}{y^4+z^2}$ 等都是多元初等函数.

根据多元连续函数的和、差、积、商(除去分母为零的点)与复合仍然为连续函数以及基本初等函数的连续性，可以得到如下的结论：

一切多元初等函数在其定义区域内都是连续的. 所谓定义区域是指包含在定义域内的区域或闭区域. 于是，如果点 P_0 是多元初等函数 $f(P)$ 定义区域 D 的内点，则必然有

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=f(P_0).$$

这表明，求多元初等函数 $f(P)$ 在内点 P_0 的极限，就是求函数在该点的函数值 $f(P_0)$.

例 9 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}\dfrac{\ln(1+xy^2)}{xy}$.

解 这里函数 $\dfrac{\ln(1+xy^2)}{xy}$ 的定义域为 $D=\{(x,y)\mid xy\neq 0\}$，而点(1,2)为 D 的内点，所以

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}\frac{\ln(1+xy^2)}{xy}=\frac{\ln(1+1\cdot 2^2)}{1\cdot 2}=\frac{\ln 5}{2}.$$

与在闭区间上一元连续函数的性质相类似，在有界闭区域 D 上的多元连续函数也具有

如下的性质：

性质 1(有界性与最大值最小值定理)　**在有界闭区域 D 上的多元连续函数，必定在 D 上有界，且能取得它的最大值和最小值.**

性质 1 表明，如果多元函数 $f(P)$ 在有界闭区域 D 上连续，则必定存在正数 M，使得对于一切 $P\in D$，都有 $|f(P)|\leqslant M$，而且 $P_1,P_2\in D$，使得

$$f(P_1)=\max\{f(P)\mid P\in D\},f(P_2)=\min\{f(P)\mid P\in D\}.$$

性质 2(介值定理)　**在有界闭区域 D 上的多元连续函数，必定取得介于最大值和最小值之间的任何值.**

例如，二元函数 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 的定义域为有界闭区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4\}$，在 D 上点 $(0,0)$ 取得最大值 $z(0,0)=M=2$，而在 D 的边界上 $x^2+y^2=4$ 取得最小值 $m=0$. 而在圆周 $x^2+y^2=3$ 上的任意点都取得介于最大值 2 和最小值 0 之间的数值 1. 其实，令 $z=c\in(0,2)$，则有所谓的等高线 $x^2+y^2=4-c^2$.

习题 8－1

A 组

1. 求下列二元函数的定义域，并画出定义域的图形：

(1) $z=x+\sqrt{y}$；　　(2) $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$；

(3) $z=\ln(-x-y)$；　　(4) $z=\arcsin\dfrac{y}{x}$.

2. 设函数 $f(x,y)=x^2+y^2-xy\arctan\dfrac{x}{y}$，求 $f(tx,ty)$.

3. 下列表达式是否为关于 a,b 的二元函数：

(1) $I=\int_0^1(a+bx)^2\mathrm{d}x$；　　(2) $J=\int_a^b(1+x)^2\mathrm{d}x$.

4. 求下列函数极限：

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to1}}\dfrac{1-xy}{x^2+y^2}$；　　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to2\\y\to0}}\dfrac{1}{x^2+y^2}$；

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin xy}{x}$；　　(4) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}(x^2+y^2)\mathrm{e}^{-(x+y)}$.

B 组

1. 讨论下列函数在指定点的连续性：

(1) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(xy)}{x}, & x\neq0,\\ y, & x=0,\end{cases}$ 在点 $(0,y_0)$ 处；

(2) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处.

2. 证明下列极限不存在：

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{y}{x}$；　　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

§8.2 偏导数与全微分

类似于一元函数的导数与微分，本节给出多元函数的偏导数与全微分的定义及其计算方法，在学习中应注意多元函数的可导性和可微性之间的关系，它与一元函数的可导性和可微性的关系有很大区别.

一、偏导数

一元函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数，用极限定义为

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

或

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

$f'(x_0)$ 又称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的变化率，在研究多元函数时，也需要考虑函数对于某一个自变量的增量所对应的函数增量之间的变化率，即把多元函数仅仅看作一个自变量的函数来求导数，称为偏导数.

定义 **设二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某个邻域内有定义，当 y 固定在 y_0，而 x 在 x_0 处有增量 Δx，相应的函数有增量**

$$f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0),$$

称为二元函数 $f(x,y)$ 对 x 的偏增量，记为 $\Delta_x z$，即

$$\Delta_x z=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0),$$

如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限值为函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处对 x 的偏导数. 记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},\quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},\quad z_x\Big|_{(x_0,y_0)},\quad f_x(x_0,y_0),$$

即

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}.$$

类似地有函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处对 y 的偏导数：

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},\quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},\quad z_y\Big|_{(x_0,y_0)},\quad f_y(x_0,y_0),$$

即

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}.$$

对于 n 元函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在点 $P_0(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 处对于变量 x_i 的偏导数，则定义为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_{P_0}=\lim_{\Delta x_i\to 0}\frac{f(a_1,a_2,\cdots,a_i+\Delta x_i,\cdots,a_n)-f(a_1,a_2,\cdots,a_i,\cdots,a_n)}{\Delta x_i}=f_{x_i}(a_1,a_2,\cdots,a_n).$$

与一元函数的导数一样，偏导数也有另一种形式，以二元函数为例，即

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0},\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=\lim_{y\to y_0}\frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0},$$

可以看出 $f(x,y)$在点(x_0,y_0)处对 x 的**偏导数**，实际上是一元函数 $\varphi(x)=f(x,y_0)$在点 x_0 处的导数，即 $f_x(x_0,y_0)=[f(x,y_0)]'\Big|_{x=x_0}$；而 $f(x,y)$在点(x_0,y_0)处对 y 的偏导数，实际上是函数 $\psi(y)=f(x_0,y)$在点 y_0 处的导数，即 $f_y(x_0,y_0)=[f(x_0,y)]'\Big|_{y=y_0}$. 所以，在求 $f(x,y)$对 x 的偏导数时，把 y 作为常数，对 x 求导数；在求 $f(x,y)$对 y 的偏导数时，把 x 作为常数，对 y 求导数. 这样用一元函数的求导法则与求导公式便可以求得二元函数 $f(x,y)$在点(x_0,y_0)的两个偏导数 $f_x(x_0,y_0)$和 $f_y(x_0,y_0)$.

如果二元函数 $z=f(x,y)$在区域 D 内的每一点$P(x,y)$对 x 的偏导数都存在，则函数 $z=f(x,y)$在点 $P(x,y)$对 x 的偏导数与点$P(x,y)$有关，这样就形成了一个新的二元函数，称它为函数 $z=f(x,y)$在区域 D 内对x 的**偏导函数**. 记为

$$\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial x},\ z_x,\ f_x(x,y),$$

即

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}.$$

类似地有函数 $z=f(x,y)$在区域 D 内对y 的**偏导函数**. 记为

$$\frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ z_y,\ f_y(x,y),$$

即

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}.$$

当在区域 D 内每一个点(x,y)的偏导数 $f_x(x,y)$和 $f_y(x,y)$存在时，$\forall(x_0,y_0)\in D$，显然有

$$f_x(x_0,y_0)=f_x(x,y)\Big|_{(x_0,y_0)},f_y(x_0,y_0)=f_y(x,y)\Big|_{(x_0,y_0)}.$$

注意 偏导数的记号$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial x},z_x,f_x(x,y),\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial y},z_y,f_y(x,y)$为整体记号，是不可分割的；在不混淆的时候，把偏导函数简称为偏导数.

例 1 设函数 $z=f(x,y)=x^4+3xy^2+2y+5$，求函数 $f(x,y)$在点$(1,2)$的偏导数.

解 方法 1 先求偏导函数 $f_x(x,y)$，然后再求出偏导函数的值 $f_x(1,2)$，求 $f_x(x,y)$时，把函数 $f(x,y)=x^4+3xy^2+2y+5$ 中的 y 看作常数，对 x 求导得

$$f_x(x,y)=(x^4+3xy^2+2y+5)'_x=4x^3+3y^2,$$

然后再求出偏导函数 $f_x(x,y)$在点$(1,2)$的值

$$f_x(1,2)=f_x(x,y)\Big|_{(1,2)}=(4x^3+3y^2)\Big|_{(1,2)}=4+12=16.$$

同样，求 $f_y(x,y)$时，把函数 $f(x,y)=x^4+3xy^2+2y+5$ 中的 x 看作常数，对 y 求导得