硕士研究生入学考试指导用书

GAODENG SHUXUE

XUEXI FANGFA ZHIDAO

高等数学

学习方法指导

刘法贵 主编

黄河水利出版社

硕士研究生入学考试指导用书

高等数学学习方法指导

主　编　刘法贵
副主编　王石青　李亦芳　段广森
　　　　左卫兵　程　鹏　孙会霞

黄 河 水 利 出 版 社

内 容 提 要

本书是按照普通高等教育高等数学课程的教学大纲以及硕士研究生入学考试的考试大纲组织编写的，旨在帮助学生掌握解题思路、方法和技巧，提高运用数学知识解决实际问题的能力. 本书主要包括高等数学、线性代数和概率论与数理统计、模拟试题等学习内容，侧重于重要知识点挖掘、例题精讲、解题技巧和方法讲解.

本书适宜于高等院校理工科学生和参加全国硕士研究生入学考试的学生选用，也可作为高校数学教师教学指导参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习方法指导 / 刘法贵主编. —郑州：黄河水利出版社，2008.1
硕士研究生入学考试指导用书
ISBN 978-7-80734-198-7

Ⅰ.高… Ⅱ.刘… Ⅲ.高等数学-高等学校：教学参考资料 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 004374 号

组稿编辑：王路平　电话：0371-66022212　E-mail：wlp@yrcp.com

出 版 社：黄河水利出版社

地址：河南省郑州市金水路 11 号　邮政编码：450003

发行单位：黄河水利出版社

发行部电话：0371-66026940、66020550、66028024、66022620(传真)

E-mail：hhslcbs@126.com

承印单位：黄河水利委员会印刷厂

开本：787 mm × 1 092 mm　1 / 16

印张：12.25

字数：350 千字　印数：1—2 100

版次：2008 年 1 月第 1 版　印次：2008 年 1 月第 1 次印刷

书号：ISBN 978-7-80734-198-7　定价：20.00 元

前 言

高等数学是理工科各专业的重要基础课，它既为专业课和专业基础课奠定必要的数学基础，也对学生科学思维训练的形成起着重要的作用. 由于数学的高度抽象性、严密的逻辑性，使学生在学习和复习高等数学过程中普遍感觉到数学理论知识难以消化和理解，有时即使理解了基本概念，但针对具体的题目又感觉到难以解决，或者难于给出完整的解答. 为此，我们编写了这本参考书，旨在帮助学生深入理解课程的知识结构、基本理论、基本概念和基本方法，掌握解题思路、方法和技巧，提高运用数学知识解决实际问题的能力.

本参考书的内容覆盖高等数学课程的教学大纲以及硕士研究生入学考试的考试大纲,在组织编写上努力追求一个“精”字.

1. 选题精. 本参考书选题不仅来源于近几年国内出版的高质量的数学参考书(在此作者特向有关作者致谢)，而且具有典型的代表性.

2. 内容总结精练. 我们在本参考书中着重强调方法和技巧，强调知识体系的一贯性，而不是简单地重复教材中的知识结构. 我们对容易引起歧义的基本概念进行精讲，对每部分的重点、难点内容进行精讲.

3. 题目剖析精. 本参考书中没有详细地给出题目的解答,而是“画龙点睛”式的给予提示和介绍，以便给读者思考问题的空间，充分激发读者的发散思维，促进读者数学意识和数学能力的提高.

4. 精于挖掘题设条件. 解题的基础是已知题设条件，因此本参考书在充分挖掘题目的条件以及题目隐含的信息上下工夫，多途径为读者介绍在解决实际问题时如何收集资料、把握条件、挖掘信息的手段、方式和方法.

全书包括高等数学、线性代数和概率论与数理统计、模拟试题等内容，适宜于高等院校理工科学生和参加全国硕士研究生入学考试的学生选用，也可作为数学教师教学指导参考书.

本书由刘法贵、王石青、李亦芳、段广森(周口师范学院)、左卫兵、程鹏、孙会霞(河南工业大学)等编写，由刘法贵负责全书统稿.

本书的出版得到了华北水利水电学院重点学科建设基金的资助. 黄河水利出版社王路平同志为本书的出版付出了辛勤的劳动，在此表示感谢.

由于水平有限，难免有疏漏与不妥之处，恳请读者不吝批评指正.

作 者

2007 年 9 月

目　录

第 1 章　函数与极限

高等数学的核心是微积分学，而微积分学中的基本概念，如连续、导数和积分等，都是以极限理论为基础，极限是高等数学的重要思想方法和研究工具，并且极限理论也推动了数学理论的发展，促使许多实际问题得以解决．在近代数学许多分支中，一些重要的概念与理论都是极限和连续函数概念的推广、延拓和深化．函数是高等数学的主要研究对象，它反映了客观世界变量间的依赖关系．连续是函数的一个重要性质，连续函数及其性质在微积分学理论中同样起着重要的作用．

如无特别说明，符号 $C^n(I)$ 表示区间 I 上具有直到 n 阶连续导数的集合，$n=0$ 记为 C, 即连续函数集合，D 表示函数的定义域，$U(x_0)$ 表示点 x_0 的某邻域．

§1.1　函　数

一、函数的基本概念

函数关系的实质是变量之间的一种确定的对应关系，其定义的含义是指对定义域内每一个 x, 按对应法则 f 总有惟一确定的 y 与之对应．因此，单值性是函数的一个重要特征．但由方程 $x^2+y^2=1$ 确定的函数对一个 x 有两个值与之对应，所以称为多值函数，它一般分为两个单值分支：$y=y_1(x)=\sqrt{1-x^2}, y=y_2(x)=-\sqrt{1-x^2}$.

定义域与对应法则是确定函数的两个因素，这是函数概念最本质的特征，也是解决函数类题目的主要依据．几个表达形式不同的函数是否为同一个函数完全取决于这两个因素．

例 1　选择题：

(1) 在 $(-\infty,0)$ 内与 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-x^3}}{x}$ 为同一个函数的是（　　）.

a) $-\sqrt{1-x}$　　b) $\sqrt{1-x}$　　c) $\sqrt{x-1}$　　d) $-\sqrt{x-1}$

(2) 与连续函数 $f(x)=\ln x+\int_1^{e} f(x)\mathrm{d}x-f'(1)$ 等价的函数是（　　）.

a) $e^{\ln\ln x}$　　b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{x-1}{n+(x-1)k}(x>0)$

c) $\dfrac{1}{x}$ 过 $(-1,0)$ 的原函数　　d) $xyy'=\ln x$ 满足 $y(1)=0$ 的特解

答案或提示　从定义域和对应法则入手考虑．在 (1) 小题中应注意 $\sqrt{x^2}=|x|$.

例 2　解答下列问题：

(1) 已知 $f(\dfrac{x+1}{2x-1})=2f(x)+1$. 求 $f(x)$.

(2) 已知在 $x=0$ 的某邻域内有界的连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x)+\frac{1}{2}f(\dfrac{x}{2})=x^2$. 求 $f(x)$.

答案或提示　(1) 小题利用常规的变量代换求之．(2) 小题利用题设的递推公式得：

$$f(x)=x^2(1-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^6}-\cdots+\frac{(-1)^n}{2^{3n}})+\frac{(-1)^n}{2^{3n}}f(\frac{x}{2^n})\to\frac{8}{9}x^2$$

二、函数的性质

函数的性质主要包含有界性、周期性、单调性和奇偶性．

1. 若函数 $f(x)$ 为奇函数，则

(1)$f(-x) = -f(x)$;

(2) 若 $0 \in D$, 则 $f(0) = 0$;

(3) 函数 $y = f(x)$ 的图像关于原点对称.

注意奇函数在定积分等方面的应用.

2. 若函数 $f(x)$ 为偶函数，则

(1) $f(x) = f(-x)$;

(2) 函数 $y = f(x)$ 的图像关于 y 轴对称.

例 3 解答下列问题：

(1) 函数 $f(x) = \mathrm{e}^{\sin x} x \tan x$ 在 R 上是 (　　) 函数.

a) 无界　　b) 周期　　c) 单调　　d) 奇

(2) 函数 $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 在 R 上是 (　　) 函数.

a) 有界　　b) 周期　　c) 偶　　d) 奇

(3) 已知下列命题：

(i) 周期函数一定存在最小正周期；

(ii) $[x]$ 是周期函数；

(iii) $\sin\sqrt{x}$ 不是周期函数；

(iv) $x\cos x$ 不是周期函数.

在以上命题中，正确命题的个数是 (　　).

a) 1　　b) 2　　c) 3　　d) 4

(4) 函数 $f(x) \in C^2(R), f(x) = f(-x)$, 当 $x \in R^+$ 时， $f'(x) > 0, f''(x) > 0$, 则当 $x \in (-\infty, 0)$ 时，(　　).

a) $f'(x) > 0, f''(x) > 0$　　b) $f'(x) > 0, f''(x) < 0$

c) $f'(x) < 0, f''(x) > 0$　　d) $f'(x) < 0, f''(x) < 0$

答案或提示 (1) a); (2) d); (3) b); (4) c).

思考：考虑 $f(x) = -f(-x)$ 的情形，或通过改变 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 的符号构造新的题目.

例 4 已知函数 $f(x)$ 在 R 上是奇函数，且 $f(1) = a, f(x+2) = f(x) + f(2)$. 求 $f(2), f(3)$. 并问当 a 取何值时， $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数.

答案或提示 代入 $x = -1$ 得 $f(2)$, 代入 $x = 1$ 得 $f(3)$; $a = 0$ 时，$f(x)$ 为周期函数.

例 5 已知奇函数 $f(x) = \dfrac{ax^2+1}{bx+c}$ (a, b, c 为整数) 在区间 $[1, \infty)$ 上单调增加，且 $f(1) = 2, f(2) < 3$. 求 a, b, c. 并证明 $f(x)$ 在 $[0,1)$ 上单调减少.

答案或提示 (1) 利用奇函数的性质及题设条件即得 $a = 1, b = 1, c = 0$. (2) 由 $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ 即证.

三、反函数、复合函数、初等函数、分段函数、取整函数

如果函数 $y = f(x)$ 是 1-1 对应的，则存在反函数，一般记为 f^{-1}. 反函数可以理解为对每一个 $y \in f(D)$, 都有惟一的 $x \in D$, 使 $f(x) = y$. 于是， $x = f^{-1}(y)$ 习惯上可记为 $y = f^{-1}(x)$. 若函数 $y = f(x)$ 单调增加 (减少), 则存在反函数 $y = f^{-1}(x)$, 且反函数也单调增加 (减少).

在同一坐标系中，函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的图像为同一条曲线，但 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图像则关于直线 $y=x$ 对称.

如果 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互为反函数，则 $f(g(x))=x$，$g(f(x))=x$.

例 6 已知函数 $f(x)\in C, g(x)$ 为其反函数，且 $\int_0^{g(x)} f(t)\mathrm{d}t=x+1$. 求 $f(x)$.

答案或提示 求解此类 (不妨称之为变限函数等式问题，以区别于函数等式问题) 题目一般是两端求导，但必须注意等式中隐含的条件.

例 7 解答下列问题：

(1) 已知 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(ad-bc\neq 0)$. 问 a,b,c,d 满足何条件时，函数 y 与其反函数是同一个函数.

(2) 已知函数 $f(x)=\dfrac{1-3x}{x-2}$ 的图形与 $y=g(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称. 求 $g(x)$.

答案或提示 (1) $a+d=0$ 或 $a+d\neq 0, b=c=0, d=a\neq 0$. (2) 即求 $f(x)$ 的反函数.

复合函数复合的法则：函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 可复合的条件是 $y=f(u)$ 的“定义域”包含 $u=\varphi(x)$ 的“值域”.

复合函数的定义域不能只由最终表达式确定，要兼顾整个复合过程都有意义. 例如函数 $f(x)=\dfrac{x}{x-2}$ 的复合函数 $f[f(x)]=\dfrac{x}{4-x}$ 定义域应该是 $x\neq 2$ 和 $x\neq 4$.

分段函数 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 的复合函数 $f[\varphi(x)]$, 可先由 $f(x)$ 的定义域确定 $f[\varphi(x)]$ 中 $\varphi(x)$ 的值域，再与 $\varphi(x)$ 的定义域联立确定.

例 8 已知 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\leqslant 0 \\ x, & x>0, \end{cases}$ $g(x)=\begin{cases} -x^2, & x>0 \\ x, & x\leqslant 0. \end{cases}$ 求 $g(f(x))$.

答案或提示 (1) 将 $f(x)$ 代入 $g(x)$; (2) 通过 $f(x)$ 表达式确定使 $f(x)\leqslant 0$ 和 $f(x)>0$ 成立的 x.

以函数的结构为标准，可以将函数分为初等函数和非初等函数. 由基本初等函数经过有限次四则运算和复合，并能由一个式子表达的函数称为初等函数. 基本初等函数在定义域上具有重要的特性，如连续性、可导性、可积性. 初等函数在其定义区间上都是连续的，但在其定义域上未必连续. 例如初等函数 $y=\sqrt{\sin x-1}$ 的定义域为 $\{x|x=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}, k=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$, 这是一个离散的集合，函数在其定义域内不连续. 定义区间是定义域内除孤立点外的区间.

分段函数是一个函数，在其定义域的不同部分用不同的式子表示其对应规律. 一般来说，分段函数不是初等函数，但要注意“伪”分段函数. 例如 $f(x)=\begin{cases} x, & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ 2-x, & 1<x\leqslant 2 \end{cases}$ 仍然是初等函数. 因为 $f(x)=1-|1-x|=1-\sqrt{(x-1)^2}$ $(x\in[0,2])$.

取整函数 $y=[x]$ 的特点是满足不等式 $x-1\leqslant [x]\leqslant x$.

例 9 解答下列问题：

(1) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0} x[\frac{2}{x}]$.

(2) 函数 $y=x-[x]$ 是 (   ) 函数.

a) 无界　　b) 周期　　c) 偶　　d) 奇

答案或提示 (1) 利用 $\dfrac{2}{x}-1\leqslant [\dfrac{2}{x}]\leqslant \dfrac{2}{x}$ 及两边夹定理求之.　(2) b).

§1.2 极 限

1.2.1 数列的极限

极限能达到吗？回答是：有时能达到，有时不能达到，但可以无限接近．尽管有时达不到，但作为变量的变化趋势，它是客观存在的一个确定数值，具有明显的数字特征：抽象性和确定性．正是因为这样，有些确定的结果如运动的质点在某时刻的瞬时速度，曲线围成的平面图形的面积等都可以看作 (可近似代替它们的) 变量变化的趋势，即用极限的思想去解决．因此，极限思想和方法是微积分的灵魂和基础，研究函数的性质实质上是研究各种类型的极限，如连续、可导、定积分、级数等．

一、数列的极限

数列 x_n 有极限 A 是指对于任意给定正数 ϵ, 总存在正整数 N, 使得当 $n > N$ 时，恒有 $|x_n - A| < \epsilon$. 这里 ϵ 用来刻画 x_n 与 A 的接近程度，ϵ 的任意性保证了 x_n 无限接近 A; 正整数 N 依赖于 ϵ, 它刻画了当 x_n 无限接近 A 时项数 n 应该大的程度．

关于数列极限的基本概念需要掌握以下几个问题：

(1) 数列收敛的必要条件：有界是数列收敛的必要条件，收敛是有界的充分条件；

(2) 收敛数列与子列的关系：$a_n \to a \Rightarrow a_{n_k} \to a$, 反过来不成立; 但若 $a_{2k} \to a, a_{2k+1} \to a$, 则 $a_n \to a$;

(3) 无界数列与无穷大数列的关系：无穷大数列是无界数列，但反之未必．

数列的运算法则完全类似于函数极限的运算法则，这里略去．

例 10　解答下列问题：

(1) 数列 x_n 和 y_n 满足 $x_ny_n \to 0$. 则下列结论成立的是 (　　).

a) 若 x_n 发散，则 y_n 发散　　　b) 若 x_n 无界，则 y_n 有界

c) 若 x_n 有界，则 y_n 为无穷小　　d) 若 x_n 为无穷大，则 y_n 为无穷小

(2) 已知极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 都存在．则极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$(　　).

a) 一定存在　　b) 一定不存在　　c) 不能确定　　d) 存在且不等于零

设 $a_n = f(n)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)$ 存在．因此求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 可通过 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 利用求函数极限的方法求之．注意该命题的逆不成立．例

$$\lim_{n\to\infty} \sin\sqrt{n^2+1}\pi = \lim_{n\to\infty}(-1)^n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}\pi\right) = 0$$

但 $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin\sqrt{x^2+1}\pi$ 不存在．

例 11　求极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sec\dfrac{\pi}{n}\right)^{n^2}$.　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{n}\right)$.　(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan\sqrt{n}\right)^n$.

答案或提示　对于 1^∞ 型极限，若底中没有 1, 则需要“加 1 减 1”使之成为 (1+ 无穷小) 的形式，然后再配平指数即可．

例 12　求极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{3^n n!}$.　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n n!}{n^n}$.　(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^n}{n!}$.　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n}{n!}$.

答案或提示　利用 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的收敛性可以证明 $a_n \to 0$ (一般含 $n!$ 项).

二、两边夹定理 (夹逼定理)

若数列 x_n, y_n, z_n 对 $n > N$ (有限的正整数) 满足

$$x_n \leqslant y_n \leqslant z_n, \quad x_n \to A,\ z_n \to A \quad (n \to \infty)$$

则一定有 $y_n \to A$.

这里须注意定理 $y_n \to A$ 的前提条件是 $x_n \to A$ 和 $z_n \to A$ 同时成立.

两边夹定理一般多用于求和式 $x_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$(特点是无穷小的和) 的极限. 此时须放大和缩小该和式 (重点关注最大项和最小项)

$$\square_1 \leqslant x_n \leqslant \square_2$$

并要求 $\square_1 \to a \leftarrow \square_2$. 但有时很难做到这一点，此时可考虑利用定积分的定义求之 (见定积分部分).

例 13 求极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}})$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}}$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{\sqrt{n^6+n}} + \dfrac{2^2}{\sqrt{n^6+2n}} + \cdots + \dfrac{n^2}{\sqrt{n^6+n^2}})$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)(n+2)\cdots(2n-1)}$.

答案或提示 注意对于分子相同型 ((1) 和 (2) 小题) 和分子不同型 ((3) 小题) 题目放大、缩小的区别. (4) 小题利用定积分定义求之 (该类型题目通常需要利用 $\lim f(n) = \mathrm{e}^{\lim \ln f(n)}$ 求之).

(1) $\dfrac{n}{\sqrt{n^n+n}} \leqslant x_n \leqslant \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$. (2) $1 \leqslant x_n \leqslant n^{\frac{1}{n}}$.

(3) $\dfrac{1}{\sqrt{n^6+n^2}}(1^2+2^2+\cdots+n^2) \leqslant x_n \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n^6+n}}(1^2+2^2+\cdots+n^2)$.

三、单调有界数列一定有极限

1. 数列 x_n 的有界性的验证可通过初始值 x_1, x_2 递推得到，但此时必须经过数学归纳法证明之. 或者直接考虑 x_n 的有界性. 同样，x_n 的单调性的验证也可通过比较 $x_1 - x_0, x_2 - x_1$ 而得到，然后利用数学归纳法证明之. 或者直接比较 $x_{n+1} - x_n$ 或 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ 得出. 对于 $x_{n+1} = f(x_n)$ 型，也可以通过 $f'(x)$ 的非负性或压缩性判断之:

$$x_{n+1} - x_n = f(x_n) - f(x_{n-1}) = f'(\xi_1)(x_n - x_{n-1}) = \cdots = f'(\xi_1)\cdots f'(\xi_{n-1})(x_2 - x_1)$$

(1) 如果 $f'(x) \geqslant 0$, 则 $x_{n+1} - x_n$ 与 $x_2 - x_1$ 同号，由此即得数列 x_n 的单调性.

(2) 如果 $|f'(x)| \leqslant M < 1$, 则由 $\dfrac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_n - x_{n-1}|} = |f'(\xi)| \leqslant M < 1$ 推知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_{n+1} - x_n|$ 收敛，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1} - x_n)$ 收敛. 以此证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

2. 有时会遇到数列 x_n 不单调的情形，此时可通过预求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ (设为 x), 然后递推 $|x_n - x| \leqslant a^n M\ (0 < a < 1)$ 的方法求之或根据题目的特点利用其它方法求之.

3. 该定理对 $f(x)\ (x \to +\infty)$ 也成立.

例 14 当 $1 \leqslant x < \infty$ 时, $0 < f'(x) < \dfrac{1}{x^2}$. 证明极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在.

答案或提示 由题意易知 $f(x)$ 单调，并且 $0<f(x)<1$. 由此即证.

例 15 求极限:

(1) 已知 $x_0=\sqrt{2}, x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}\ (n=0,1,\cdots)$. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

(2) 定义 $x_1=\sin x\ (x\in R), x_{n+1}=\sin x_n\ (n=1,2,\cdots)$. 讨论 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 的存在性. 若存在极限时求出极限.

(3) 已知 $x_0=0, x_n=1+\sin(x_{n-1}-1)\quad(n=1,2,\cdots)$. 求 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

(4) 已知 $x_0>0, x_{n+1}=\dfrac{2(1+x_n)}{2+x_n}\quad(n=0,1,\cdots)$. 求 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

答案或提示 (1) 和 (4) 小题利用常规的方法求之即可.

(2) 若 $x\in R$ 使 $x_1=\sin x=0$, 则显然 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$; 若 $x\in R$ 使 $x_1=\sin x>0$, 则显然 $x_1\leqslant 1\leqslant\dfrac{\pi}{2}$, 所以 $0<x_2=\sin x_1<x_1$. 依次类推， $0<x_n<\cdots<x_2<x_1$, 即 x_n 是单调减少有下界数列，因此一定收敛；如果 $x\in R$ 使 $x_1=\sin x<0$, 则类似可得 $-1\leqslant x_1<x_2<\cdots<x_n<0$, 同样可得到 x_n 的收敛性.

(3) 令 $y_n=x_n-1$, 则 $y_0=-1<0$. 这样，利用 (2) 小题即得.

例 16 求极限:

(1) 已知 $x_1>0, x_{n+1}=1+\dfrac{1}{1+x_n}\ (n=1,2,\cdots)$. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

(2) 已知 $x_1=2, x_{n+1}=2+\dfrac{1}{x_n}\ (n=1,2,\cdots)$. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

答案或提示 易验证 (1) 和 (2) 中的 x_n 都不单调，但注意到 (1) 题中 $1<x_n<2, \lim\limits_{n\to\infty} x_n=\sqrt{2}$, 从而,

$$0\leqslant|x_n-\sqrt{2}|<(\sqrt{2}-1)|x_{n-1}-\sqrt{2}|<\cdots<(\sqrt{2}-1)^{n-1}|x_1-\sqrt{2}|$$

(2) 题中 $2<x_n<3, \lim\limits_{n\to\infty} x_n=1+\sqrt{2}$, 从而

$$|x_n-(1+\sqrt{2})|<\frac{\sqrt{2}-1}{2}|x_{n-1}-(\sqrt{2}+1)|<\cdots<(\frac{\sqrt{2}-1}{2})^{n-1}|x_1-(\sqrt{2}+1)|$$

由此即证.

例 17 求极限:

(1) 已知 $x_1=a, x_2=b, x_{n+2}=\dfrac{x_{n+1}+x_n}{2}\ (n=1,2,\cdots)$. 求 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

(2) 已知 $a_1=1, a_2=2, 3a_{n+2}-4a_{n+1}+a_n=0\ (n=1,2,\cdots)$. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

答案或提示 对于“三连项”求极限题目，一般是通过已知等式寻求相邻项之间的关系求之.

(1) 由已知等式即得 $2(x_{n+2}-x_{n+1})=-(x_{n+1}-x_n)$, 由此推出 $x_2-x_1, x_3-x_2,\cdots,x_n-x_{n-1}$ 是以 $-\dfrac{1}{2}$ 为公比的等比数列，依此即得结果.

(2) 类似 (1) 题得到 $a_2-a_1, a_3-a_2,\cdots,a_n-a_{n-1}$ 是以 $\dfrac{1}{3}$ 为公比的等比数列.

1.2.2 函数的极限

一、函数极限的基本概念

1. 定义及几何意义.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ (有限) $\nRightarrow f(x)$ 在 x_0 一定有定义.

2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x_0-0)=f(x_0+0)=A$.

例 18 函数 $f(x)=\begin{cases} a\dfrac{\sin x-x}{x^3}, & x>0 \\ \dfrac{1}{x}(2\sin x-\displaystyle\int_0^x \sin t^2\mathrm{d}t), & x<0. \end{cases}$ 问 a 为何值时，极限 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 存在.

答案或提示 利用 $f(0+0)=f(0-0)=f(0)$ 即得 a.

例 19 求极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}$ $(x\neq 0)$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})$ $(|x|<1)$.

答案或提示 (1) 分子、分母同乘以 $\sin\dfrac{x}{2^n}$; (2) 分子、分母同乘以 $(1-x)$.

3. 利用极限的定义证明极限的存在性. 证明的一般步骤：(1) 对任意的 $\epsilon>0$, 建立不等式 $|f(x)-A|<\epsilon$;(2) 解不等式找出 N,X 或 δ. 其中解不等式求 N,X,δ 是最主要的步骤.

解不等式是建立在加强 (放大)$|f(x)-A|$ 的基础上. 在加强不等式的过程中，所遵循的原则是：必须保留 $\dfrac{1}{n}$ $(n\to\infty)$, $\dfrac{1}{|x|}$ $(x\to\infty)$ 和 $|x-a|$ $(x\to a)$ 的无穷小因子. 例如

$$\frac{5}{3(3n^2+2)}<\frac{5}{9n^2}<\frac{1}{n^2}\ (n\to\infty)$$

$$|\sqrt{x}-\sqrt{a}|=\left|\frac{x-a}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\right|<\frac{|x-a|}{\sqrt{a}}\ (x\to a^+)$$

等.

加强不等式有时直接放大即可，但有时复杂些，需要用限定变量放大法. 此时应注意最后在确定 N,X 或 δ 时要把限定的值考虑进去. 例如证明 $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x+3}{x^2-9}=-\dfrac{1}{6}$.

首先由于等式

$$\left|\frac{x+3}{x^2-9}-(-\frac{1}{6})\right|=\frac{|x-(-3)|}{6|x-3|}$$

的右端分子、分母都含变量 x, 故采用“限定变量”法加强不等式. 因为 $x\to -3$, 所以可限定 $x\in(-4,-2)$, 即有 $5<|x-3|<7, |x-(-3)|<1$. 从而得

$$\left|\frac{x+3}{x^2-9}-(-\frac{1}{6})\right|=\frac{|x-(-3)|}{6|x-3|}<\frac{|x-(-3)|}{30}$$

由此，对任意的 $\epsilon>0$, 由

$$\left|\frac{x+3}{x^2-9}-(-\frac{1}{6})\right|<\frac{|x-(-3)|}{30}<\epsilon$$

得 $\delta_1=30\epsilon$. 注意到限定条件 $|x-(-3)|<1$ 得 $\delta_2=1$, 因此，最后的 $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$.

二、求极限的基本常识

1. 如果 $\lim f(x)=A\neq 0$, 则 $\lim f(x)g(x)=A\lim g(x)$.

2. 如果极限式中含 $\sqrt{\ }$ 或 $\sqrt[3]{\ }$, 一般先有理化再求极限.

例 20 求极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}$. (2) $\lim\limits_{x\to 0,y\to 0}\dfrac{\sqrt{xy+4}-2}{xy}$. (3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}$.

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x})$.　(5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^x-\sin x-1}{1-\sqrt{1-x^2}}$.

答案或提示　(1),(2),(5) 三个小题一次有理化即可.(3) 和 (4) 两小题需要两次有理化，但在计算时注意运用极限常识 (1) 会使计算过程简单许多 (这些思想读者应仔细体会). 如 (4) 小题:

$$原式=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{x}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}=\frac{1}{4}\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})=-\frac{1}{4}$$

3. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$ (有限) 且 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$. 进一步，若 $f(x)$ 连续，则 $f(x_0)=0$; 如果 $A\neq0$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$. 当然，若 $g(x)$ 连续，则 $g(x_0)=0$.

例 21　解答下列问题:

(1) 已知 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+ax+b}{x-1}=1$. 则 $a=(\quad), b=(\quad)$.

(2) 已知函数 $f(x)\in C, f'(0)$ 存在, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$. 则 $f'(0)=(\quad)$.

(3) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内二阶连续可导,

$$\lim_{x\to0}(\frac{\sin3x}{x^3}+\frac{f(x)}{x^2})=0$$

求 $f(0),f'(0),f''(0)$ 和 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)+3}{x^2}$.

(4) 设 $f(x)$ 是三次多项式，且 $\lim\limits_{x\to2a}\dfrac{f(x)}{x-2a}=\lim\limits_{x\to4a}\dfrac{f(x)}{x-4a}=1, a\neq0$. 求 $\lim\limits_{x\to3a}\dfrac{f(x)}{x-3a}$.

答案或提示　这里仅考虑 (3),(4) 两题.

(3) $0=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin3x+xf(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\cos3x+f(x)+xf'(x)}{3x^2}\Rightarrow f(0)=-3$.

$$0=\lim_{x\to0}\frac{3\cos3x+f(x)+xf'(x)}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-9\sin3x+2f'(x)+xf''(x)}{6x}\Rightarrow f'(0)=0$$

$$0=\lim_{x\to0}\frac{-9\sin3x+2f'(x)+xf''(x)}{6x}=-\frac{9}{2}\lim_{x\to0}\frac{\sin3x}{3x}+\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}+\frac{1}{6}\lim_{x\to0}f''(x)$$

$\Rightarrow f''(0)=9$.

(4) 注意到 $f(2a)=f(4a)=0$ 及题目中条件得 $f(x)=\dfrac{1}{2a^2}(x-2a)(x-3a)(x-4a)$, 由此即求.

4. 注意 $\lim\limits_{x\to a}f(\dfrac{1}{x-a})$ 型的极限 (当 $x\to a$ 时, $\dfrac{1}{x-a}\to\pm\infty$).

例 22　解答下列问题:

(1) 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

(2) 点 $x=0$ 是函数 $f(x)=\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+2}$ 的 (　) 间断点.

a) 可去　b) 无穷　c) 跳跃　d) 振荡

(3) 函数 $f(x)=\dfrac{1-2\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}\arctan\dfrac{1}{x}$. 则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的 (　) 间断点.

a) 可去　b) 无穷　c) 跳跃　d) 振荡

答案或提示 (1) 小题须注意当 $x\to 0^+$ 时，$\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}$ 是 $\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ 的高阶无穷大. (2) c). (3) c).

5. 对于 $\frac{0}{0}$ 型和 $\frac{\infty}{\infty}$ 型极限，有时也可通过分子、分母提无穷小或无穷大因子求之.

例 23 解答下列问题:

(1) 求极限 $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$.

(2) 已知 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}[\sqrt[3]{1+2x^2+x^3}-ax-b]=0$. 求 a,b.

答案或提示 (1) 注意 $\sqrt{x^2}=|x|$. (2) 有理化即可.

6. 对于求具体 $\lim(f(x)+g(x))$ 型极限，一般是不能分拆的. 但如果能确定 $\lim f(x)$ 和 $\lim g(x)$ 存在，则可利用分拆的方法计算.

例 24 求极限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\mathrm{e}^{\sin x}+\sqrt[3]{1-\cos x})-\sin x}{\arctan(4\sqrt[3]{1-\cos x})}$.

答案或提示 将分母等价无穷小之后分拆即求.

例 25 求极限:

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x})$. (2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(\sin\ln(1+x)-\sin\ln x)$.

答案或提示 这类题目多利用和差化积公式求之.

三、基本定理

1. 保号性、局部有界性、极限惟一性.

例 26 设 $a_k\in R$, 函数 $f(x)=a_1\ln(1+x)+a_2\ln(1+2x)+\cdots+a_n\ln(1+nx)$ 满足 $|f(x)|\leqslant\ln(1+x), x\in[0,1]$. 证明 $|a_1+2a_2+\cdots+na_n|\leqslant 1$.

答案或提示 首先易知 $f(0)=0$; 其次由 $\left|\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\right|\leqslant\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ $(x>0)$ 即证.

2. 极限的运算法则.

$$\lim f(x),\lim g(x)\text{ 存在，则}\begin{cases}\lim(f(x)\pm g(x))\text{存在}\\ \lim f(x)g(x)\text{存在}\\ \lim\frac{f(x)}{g(x)}\text{存在}\quad(\text{要求}\lim g(x)\neq 0).\end{cases}$$

$$\lim f(x),\lim g(x)\text{ 不都存在，则}\begin{cases}\lim(f(x)\pm g(x))\text{一定不存在}\\ \lim f(x)g(x)\text{不确定}\\ \lim\frac{f(x)}{g(x)}\text{不确定.}\end{cases}$$

$$\lim f(x),\lim g(x)\text{ 都不存在，则}\begin{cases}\lim(f(x)\pm g(x))\text{不确定}\\ \lim f(x)g(x)\text{不确定}\\ \lim\frac{f(x)}{g(x)}\text{不确定.}\end{cases}$$

3. 重要极限公式.

$$\text{(i) }\lim_{n\to\infty}r^n=\begin{cases}0, & |r|<1\\ \infty, & |r|>1\\ 1, & r=1\\ \text{不存在,} & r=-1.\end{cases}$$

例 27 讨论 $f(x)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}x$ 的连续性.

答案或提示 用极限表示函数是函数的一种表示方式，处理这种函数往往是先求极限，得到 $f(x)$ 的解析表达式后再讨论所要求的问题.

(ii) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^m+\cdots+a_m}{b_0x^n+\cdots+b_n}=\begin{cases}0, & m<n\\ \dfrac{a_0}{b_0}\ (b_0\neq 0), & m=n\\ \infty, & m>n.\end{cases}$

例 28 解答下列问题:

(1) 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1+a)x^4+bx^3+2}{x^3+x^2-1}=-2\Rightarrow a=(\quad),b=(\quad)$.

(2) 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x^2}{x+1}-ax-b\right)=0\Rightarrow a=(\quad),b=(\quad)$.

(3) 已知 $p(x)$ 为多项式, 且 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{p(x)-2x^3}{x^2}=1,\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{p(x)}{x}=3$. 求 $p(x)$.

(iii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. 注意 $\lim\dfrac{\sin\Box}{\Box}=1$, 只要 $\Box\to 0$.

(iv) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$.

1^∞ 型极限一般多利用此公式, 而且只要 $\Box\to 0$, 都有 $\lim(1+\Box)^{\frac{1}{\Box}}=\mathrm{e}$.

例 29 解答下列问题:

(1) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{2}{x}}$, $a>0,b>0$.

(2) 已知函数 $f(x)\in C^2(U(0)),\lim\limits_{x\to 0}(1+x+\dfrac{f(x)}{x})^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^3$. 求 $f(0),f'(0),f''(0)$,

$$\lim_{x\to 0}(1+\frac{f(x)}{x})^{\frac{1}{x}}$$

(3) 求极限 $\lim\limits_{t\to x}(\dfrac{\sin t}{\sin x})^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$. 记此极限为 $f(x)$, 求 $f(x)$ 的间断点, 并判断其类型.

(4) 已知函数 $f(x)\in C^1(R),\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=\mathrm{e}$. 求 c 使下式成立:

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{x+c}{x-c})^x=\lim_{x\to\infty}(f(x+1)-f(x))$$

(5) 已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{x+a}{x-a})^x=\displaystyle\int_{-\infty}^{a}t^2\mathrm{e}^t\mathrm{d}t$, 求 a.

(6) 已知 $f(x)\in C^2,f(x)\neq 0(x\neq 0),\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0,f''(0)=4$. 求 $\lim\limits_{x\to 0}(1+\dfrac{f(x)}{x})^{\frac{1}{x}}$.

答案或提示 这些题目都是利用常规的方法求之, 只是须注意 (4) 小题中 $f(x+1)-f(x)$ 利用 Lagrange 中值定理 (这是联系"函数的差与导函数值"的桥梁);(5) 小题涉及到广义积分.

4. 函数极限与数列极限的关系: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow$ 对于任何以 x_0 为极限的数列 x_n $(x_n\neq x_0)$, 都有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.

利用这一结论可验证函数极限的不存在性: 通常是寻求两个收敛于同一值 (包括无穷大) 的序列 x_n,y_n 使该极限存在但不等, 或不存在. 例如 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi}\to 0,y_n=\dfrac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\to 0$, 但

$$\lim_{n\to\infty}\cos\frac{1}{x_n}=1\neq\lim_{n\to\infty}\cos\frac{1}{y_n}=0$$

因此, 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}$ 不存在.

§1.3 无穷大与无穷小

1. 无穷小 (大) 不是一个很小 (大) 的数，而是一个变量；无穷小 (大) 必须指明自变量变化的过程.

处理无穷小与无穷大的关系同样要求自变量有相同的变化过程. 在相同的变化过程中，才可以考虑无穷大与无穷小的关系.

2. 在同一个变化过程中，无穷小 $\alpha(x),\beta(x)$ 的比较是通过 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 比值的极限进行比较.

(1) $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0\Rightarrow\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的高阶无穷小 (或者说 $\beta(x)$ 是 $\alpha(x)$ 的低阶无穷小)，记为 $\alpha(x)=o(\beta(x))$;

(2) $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1\Rightarrow\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 等价无穷小，记为 $\alpha(x)\sim\beta(x)$;

(3) $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c\quad(c\neq0,c\neq1)\Rightarrow\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的同阶但不等价无穷小;

(4) 如果 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\alpha(x)}{x^{k-1}}=0,\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\alpha(x)}{x^k}\neq0\Rightarrow\alpha(x)$ 是 x 的 k 阶无穷小.

例 30　解答下列问题:

(1) 当 $x\to0$ 时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$ 是比 $x\sin x^n$ 的高阶无穷小，$x\sin x^n$ 是比 $\mathrm{e}^{x^2}-1$ 的高阶无穷小. 则正整数 $n=(\quad)$.

a) 1　b) 2　c) 3　d) 4

(2) 当 $x\to0$ 时，$\mathrm{e}^{\tan x}-\mathrm{e}^x$ 与 x^n 是同阶无穷小. 则正整数 $n=(\quad)$.

(3) 当 $x\to0$ 时，$f(x)=\displaystyle\int_0^{1-\cos x}\sin t^2\mathrm{d}t$ 是 $g(x)=\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{x^6}{6}$ 的 (　) 无穷小.

a) 高阶　b) 低阶　c) 等价　d) 同阶但不等价

(4) 当 $x\to0$ 时，$\mathrm{e}^x-(ax^2+bx+c)$ 是 x^2 的高阶无穷小. 则 $(a,b,c)=(\quad)$.

(5) $x\to x_0,\alpha(x)\to0,\beta(x)\to0$. 则当 $x\to x_0$ 时下列各式中 (　) 未必是无穷小.

a) $|\alpha+\beta|$　b) $\alpha^2+\beta^2$　c) $\ln(1+\alpha\beta)$　d) $\dfrac{\alpha^2}{\beta}$

(6) 把 $x\to0^+$ 时的无穷小量 $\alpha=\displaystyle\int_0^x\cos t^2\mathrm{d}t,\beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\mathrm{d}t,\gamma=\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\mathrm{d}t$ 排列起来，使排在后面的是前面的高阶无穷小. 则正确排序是 (　).

a) α,β,γ　b) α,γ,β　c) β,α,γ　d) β,γ,α

例 31　函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 邻域内具有二阶连续导数，$f(0)f'(0)f''(0)\neq0$. 证明存在惟一的 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in R$ 使 $h\to0$ 时，$\lambda_1f(h)+\lambda_2f(2h)+\lambda_3f(3h)$ 是 h^2 的同阶无穷小.

答案或提示　利用

$$\lim_{h\to0}\frac{\lambda_1f(h)+\lambda_2f(2h)+\lambda_3f(3h)}{h^2}=c\neq0$$

并使用两次罗必达法则，得到

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0\\\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3=0\\\lambda_1+4\lambda_2+9\lambda_3=\dfrac{c}{f''(0)}\end{cases}$$