

# 牛顿和非牛顿流体力学

章伯其 编著



兵器工业出版社

# 牛顿和非牛顿流体力学

章伯其 编著

兵器工业出版社

## 内 容 简 介

本世纪上半叶,航空工业的起飞,大大推动了牛顿流体力学(主要是气体动力学)的发展,下半叶聚合物工业的崛起,有力地推动了非牛顿流体力学的发展,同时流体力学的发展也为这些工业的发展作出了重大贡献。本书以理工科大学本科数学基础知识为起点,按连续介质力学系统,较详细地阐述牛顿和非牛顿流体力学基础知识,包括流体力学基本方程,流体力学问题基本解法及其数学预备知识。本书可作为高年级本科生与研究生教材,也可供有关工程技术人员参考。

### 图书在版编目(CIP)数据

牛顿和非牛顿流体力学/章伯其编著. —北京:兵器工业出版社,1997.2  
ISBN 7-80132-068-9

I. 牛… II. 章… III. 流体力学-基本知识 IV. O35

中国版本图书馆 CIP 数据核字(96)第 17862 号

兵器工业出版社 出版发行

(北京市海淀区车道沟10号)

各地新华书店经销

南京理工大学印刷厂印装

开本:787×1092 1/16 印张:35.75 字数:889.2千字

1997年2月第1版 1997年2月第1次印刷

印数:1~1000 定价:36.00元

## 前 言

力学是物理学的一个分支。力学是研究物质运动以及引起该运动的力的学科。力学建立在时间、空间、力、能量以及物质这些概念的基础上。流体力学是力学的一个分支，它主要研究流体相对于物体静止或运动时，流体与物体之间的相互作用。

力学与建筑、机械、石油、采矿、冶金、水利等方面的应用科学的关系像水稻的根和穗的关系，许多应用科学普遍地且几乎无偿地应用力学的成果。各部门生产的发展与力学的发展互相促进，相得益彰。以流体力学的发展为例，在本世纪的前半叶，流体力学分科空气动力学得到了很大的发展，促进其发展的主要是航空工业。换句话说，若要设计能在空中飞行的飞机，必须了解飞机在飞行时所受到的空气动力作用——阻力与升力。若能改进飞机气动性能，就能研制新一代的飞机。在本世纪的下半叶，非牛顿流体力学这一分科得到很大的发展，发展的推动力则主要是聚合物工业。高聚合物熔体、溶液是典型的非牛顿流体。聚合物的挤出注射、压延涂覆，化纤工业中高聚物的纺丝等过程，都有非牛顿流体力学问题。在石油、冶金、食品等工业中也有各种非牛顿流体流动问题。生物流体，如动物血液、关节液，植物汁液都属非牛顿流体。聚合物工业的发展速度大家有目共睹，其产品已进入工农业各部门，民用产品则早已进入千家万户，高分子新材料、新产品正在迅速地取代各种金属、竹木旧材料、旧产品。

生产技术的发展，导致分工越来越细，多数人局限于越来越小的工作范围，这情形也反映到力学发展上。力学的分支越来越多，可分为固体力学与流体力学。流体力学则有非粘性流体力学、粘流、水力学、气体动力学、非牛顿流体力学、多相流体力学、化学流体力学、电磁流体力学、生物流体力学、计算流体力学等等分科，这是力学发展的必然结果，也有利于力学的发展。事物之间本来就有种种联系，因而各力学分支间必须加强联系，才有利于力学的发展。事实上，许多力学新分支、新学科就是在旧分支、旧学科的边缘交界处产生。比如说，非牛顿流体力学，研究的流体往往既具有类似固体的性质，又具有类似流体的性质，故非牛顿流体力学可以说是产生在固体力学、流体力学、物理化学等边缘交界处。鉴于此，近年来许多学术界人士认为应穿透固体力学与流体力学间某些人为的壁垒去了解它们的总貌，同时应编写这方面的教材，为学生将来的工作更具创造性打下基础，这也是本流体力学教材的宗旨。本教材试图兼容经典性的流体力学教材的基本内容，渗进连续介质力学基础知识，并按连续介质力学系统描述。流体力学内容浩如烟海，本教材主要选取基本概念、基本方程等内容，适当选取空气动力学、非牛顿流体力学内容，以及流体力学问题的基本解法。为了让学生学好这些知识，也为了让学生具有较好的数力学理论基础，还适当选取了一些预备性的数学知识，例如“矢量代数与微积”、“张量分析”等。如果这些数学知识掌握得好，学习流体力学知识就顺利得多，就可事半功倍，触类旁通。选取这些数学知识，也是为了方便只学过高等数学

的读者学习本课程。

因为流体力学中涉及各种曲线坐标系,本教材还列出了各基本方程在一般坐标系中的分量形式。本教材基础部分还配备了一定的习题,所有习题都给出解答,因此习题也可充作例题,以利自学的读者学习。

本书可作为数学、力学等理工科专业的本科生和研究生的教材,也可供从事与流体力学有关的工程技术人员参考。

借此书出版的机会,向钱士柯、吕坚田、周文、徐世震、钱祖皋、杨应辰、吴礼义、杨山作生、曹起鹏等老师表示我诚挚的敬意。

由于作者的学识有限,书中定有疏误,恳望读者指出。

章伯其

1995年

# 目 录

第一章 向量代数与微积	(1)
1.1 向量代数	(1)
1.1.1 引言	(1)
1.1.2 数量和矢量	(1)
1.1.3 向量加减法	(1)
1.1.4 数乘矢量	(2)
1.1.5 矢量的分解	(2)
1.1.6 数量积(内积)	(3)
1.1.7 向量积	(4)
1.1.8 混合积	(4)
1.1.9 三重矢积	(5)
习题	(6)
1.2 向量微积	(7)
1.2.1 向量微分	(7)
1.2.2 向量积分	(8)
习题	(8)
1.3 场论初步	(8)
1.3.1 数量场和矢量场	(8)
1.3.2 线积分、面积分、体积分	(9)
1.3.3 数量场的梯度, 矢量场的旋度和散度	(10)
1.3.4 向量算子 $\nabla$ 及其运算公式	(13)
1.3.5 高斯散度定理	(16)
1.3.6 斯托克斯定理	(17)
1.3.7 势量场	(18)
1.3.8 格林定理	(20)
1.3.9 位置矢量 $r$ 的散度和旋度	(21)
1.3.10 高斯积分, 数量位和矢量位	(22)
1.3.11 亥姆霍兹定理	(25)
习题	(25)
1.4 正交系中的向量运算公式	(26)
1.4.1 右手直角坐标系中向量公式	(26)
1.4.2 正交系中向量公式	(30)

1.4.3	柱坐标系中矢量公式	(39)
1.4.4	球坐标系中矢量公式	(40)
1.4.5	边界层坐标系中矢量公式	(41)
	习题	(42)
<b>第二章 矩阵代数</b>		<b>(44)</b>
2.1	矩阵	(44)
2.1.1	矩阵、转置阵、矩阵的迹	(44)
2.1.2	克罗内克符号和李奇符号	(45)
2.1.3	矩阵运算	(46)
2.1.4	逆矩阵、正交矩阵	(47)
2.1.5	求和约定	(48)
2.1.6	线性方程组的解	(49)
	习题	(53)
2.2	特征值与特征矢量	(53)
2.2.1	特征值与特征矢量	(53)
2.2.2	实对称矩阵的特征值与特征矢量	(54)
2.2.3	相似矩阵及其特征值	(55)
2.2.4	特征值为实数的实矩阵三角化	(55)
2.2.5	实对称矩阵对角化	(58)
2.2.6	实对称矩阵的特征矢量系	(58)
2.2.7	$A^m$ 与 $A$ 的特征值对应关系	(59)
2.2.8	正定阵	(59)
	习题	(60)
2.3	Hamilton—Cayley 定理和极分解定理	(60)
2.3.1	Hamilton—Cayley 定理	(60)
2.3.2	极分解定理	(61)
	习题	(65)
<b>第三章 张量分析</b>		<b>(66)</b>
3.1	内积空间的基	(66)
3.1.1	物理定理表达式的不变性	(66)
3.1.2	矢量和矢量空间	(66)
3.1.3	矢量的内积	(69)
3.1.4	协变和逆变基	(69)
3.1.5	自然基及其对偶基	(71)
	习题	(74)
3.2	张量代数	(74)
3.2.1	张量定义	(74)

3.2.2	张量分量的变换法则	(76)
3.2.3	张量代数运算	(80)
	习题	(82)
3.3	张量协变导数	(83)
3.3.1	Christoffel 符号	(83)
3.3.2	协变导数	(85)
3.3.3	绝对微分	(89)
	习题	(89)
3.4	张量微分算子和积分定理	(90)
3.4.1	张量的梯度、散度和旋度	(90)
3.4.2	积分定理	(90)
3.4.3	数量场梯度, 一阶二阶张量场梯度、散度、旋度	(94)
	习题	(95)
3.5	二阶张量(仿射量)	(96)
3.5.1	仿射量的物理分量、仿射量代数运算	(96)
3.5.2	仿射量的特征方向、主向、不变量	(98)
3.5.3	正则与退化的仿射量	(101)
3.5.4	Hamilton—Cayley 定理	(101)
3.5.5	仿射量的分解	(101)
3.5.6	仿射量表示转动	(102)
	习题	(105)
3.6	张量函数	(105)
3.6.1	各向同性张量	(105)
3.6.2	张量函数、各向同性张量函数的表示定理	(108)
3.6.3	张量函数的微分	(111)
	习题	(112)
<b>第四章 流体运动学</b>		<b>(113)</b>
4.1	连续介质模型	(113)
4.1.1	引言	(113)
4.1.2	物质的微观结构	(113)
4.1.3	连续介质模型、质点、质点密度与速度	(114)
	习题	(116)
4.2	质点运动	(116)
4.2.1	描述介质运动的拉格朗日法和欧拉法	(116)
4.2.2	物质导数、质点位移、速度、加速度	(117)
4.2.3	定常与非定常场、迹线与流线、流管	(121)
	习题	(123)
4.3	连续介质微团运动	(124)



4.3.1	构形,连续流体线、面、体保持性	(124)
4.3.2	拉格朗日坐标表示的体元	(124)
4.3.3	直角坐标系中介质微团运动	(125)
4.3.4	变形梯度	(130)
4.3.5	变形梯度极分解、相对伸缩张量、Cauchy—Green 张量	(132)
4.3.6	变形梯度导数、旋转率、伸缩率张量	(134)
4.3.7	Rivlin—Ericksen 张量	(138)
4.3.8	算例	(140)
	习题	(141)
4.4	无旋流场	(141)
4.4.1	无旋流动场的速度位	(141)
4.4.2	不可压无旋流动的基本方程	(142)
4.4.3	给定了速度的散度场的无旋流动以及点、线、面源	(143)
	习题	(144)
4.5	有旋流动	(145)
4.5.1	涡量、涡线、涡管、自由涡、强迫涡	(145)
4.5.2	Helmholtz 第一定理	(147)
4.5.3	毕奥—沙伐定理	(148)
	习题	(150)
<b>第五章 流体动力学基本方程</b>		<b>(151)</b>
5.1	拉格朗日型积分形式基本方程	(151)
5.1.1	引言	(151)
5.1.2	封闭系统	(151)
5.1.3	拉格朗日型积分形式质量方程	(151)
5.1.4	体力与面力、Cauchy 应力原理	(152)
5.1.5	拉格朗日型积分形式动量方程和动量矩方程	(153)
5.1.6	拉格朗日型积分形式能量方程	(154)
5.2	欧拉型积分形式基本方程	(154)
5.2.1	控制区	(154)
5.2.2	雷诺传输定理	(155)
5.2.3	欧拉型积分形式基本方程	(156)
5.3	积分形式基本方程的应用	(157)
5.3.1	积分形式方程应用于微元流管	(157)
5.3.2	积分形式方程应用于工程管流	(159)
5.3.3	动量矩方程用于洒水管	(161)
5.3.4	能量方程用于两股流体混合问题	(162)
	习题	(163)
5.4	关于应力和应力偶张量的 Cauchy 应力基本定理	(164)

5.4.1	Cauchy 应力基本定理	(164)
5.4.2	直角坐标系中应力张量的表示	(167)
5.5	由积分形方程推导微分形式基本方程方法之一	(168)
5.5.1	微分形式质量方程	(168)
5.5.2	微分形式动量方程	(170)
5.5.3	微分形式能量方程	(171)
5.5.4	任意曲线坐标系中微分形式基本方程	(173)
5.6	由积分形式方程推导微分形式基本方程方法之二	(178)
5.6.1	微分形式质量方程	(178)
5.6.2	Cauchy 动量、动量矩方程	(179)
5.6.3	应力张量对称问题	(181)
5.6.4	微分形式能量方程	(182)
	习题	(183)
5.7	热力学第二定律在连续介质力学中的形式	(183)
5.7.1	热力学第一定律	(183)
5.7.2	完全气体与液体的状态方程	(186)
5.7.3	热力学第二定律开尔文—普朗克说法及其推论卡诺原理	(188)
5.7.4	基于克劳修斯不等式的两个热力学第二定律说法	(190)
5.7.5	克劳修斯—杜海姆不等式	(192)
5.7.6	流动状态介质的热力学性质	(193)
	习题	(194)
5.8	本构方程	(194)
5.8.1	基本方程的封闭性	(194)
5.8.2	本构方程的原理、客观量	(195)
5.8.3	Stokes 流体、牛顿流体、Reiner—Rivlin 流体	(197)
5.8.4	简单流体	(199)
5.8.5	线性热粘性流体、N—S 方程	(200)
	习题	(208)
5.9	间断面	(208)
5.9.1	包含间断面的区域上积分的时间变化率	(208)
5.9.2	在运动间断面上的跳变条件	(209)
	习题	(213)
5.10	运动方程的两个积分	(213)
5.10.1	物体力有势的定常理想流中沿流线或涡线运动方程积分	(213)
5.10.2	理想无旋正压流场中运动方程的积分	(215)
	习题	(219)
	第六章 气体动力学问题	(220)
6.1	气体动力学基本方程	(220)

6.1.1	气体动力学中常用热力学公式 .....	(220)
6.1.2	音速计算公式 .....	(221)
6.1.3	气体动力学基本方程 .....	(223)
6.2	一维定常等熵流 .....	(225)
6.2.1	绝热流三个特殊状态 .....	(225)
6.2.2	速度系数 .....	(227)
6.2.3	气体动力学函数 .....	(228)
6.2.4	一维定常等熵变截面管流的参数变化 .....	(230)
	习题 .....	(233)
6.3	膨胀波 .....	(233)
6.3.1	小扰动传播图画 .....	(233)
6.3.2	超音速气流绕二维凸壁流动 .....	(234)
	习题 .....	(237)
6.4	激波 .....	(237)
6.4.1	激波前后参数关系式 .....	(237)
6.4.2	激波倾角 $\beta$ 与气流折转角 $\delta$ 的关系 .....	(243)
	习题 .....	(244)
6.5	拉伐尔喷管 .....	(244)
6.5.1	拉伐尔喷管的临界截面 .....	(244)
6.5.2	拉伐尔喷管中的各种流动状态 .....	(245)
	习题 .....	(247)
6.6	一维定常绝热等截面摩擦管流 .....	(248)
6.6.1	一维定常绝热摩擦直管流的支配方程 .....	(248)
6.6.2	定常绝热摩擦直管流计算 .....	(250)
	习题 .....	(253)
6.7	一维定常加热光滑直管流 .....	(253)
6.7.1	定常加热光滑直管流支配方程 .....	(253)
6.7.2	热力壅塞 .....	(256)
	习题 .....	(257)
6.8	一维定常变截面换热摩擦管流 .....	(257)
6.8.1	一维定常管流 .....	(257)
6.8.2	几点说明 .....	(258)
<b>第七章 非牛顿流体力学问题 .....</b>		<b>(259)</b>
7.1	非牛顿流体分类 .....	(259)
7.1.1	聚合物工业中的非牛顿流体力学问题 .....	(259)
7.1.2	粘性系数 .....	(259)
7.1.3	非牛顿流体分类 .....	(260)
7.1.4	纯粘性流体 .....	(261)

7.1.5	粘塑性流体 .....	(263)
7.1.6	有时间依赖性的流体 .....	(263)
7.1.7	粘弹性流体 .....	(263)
7.1.8	一些非牛顿流体特有流动现象 .....	(264)
7.2	测粘流动 .....	(265)
7.2.1	曲线流动的粘度函数和法向应力差系数 .....	(265)
7.2.2	圆柱和球坐标系不可压连续和运动方程 .....	(270)
7.2.3	圆管内流动 .....	(273)
7.2.4	锥板间流动 .....	(278)
7.2.5	两圆筒间流动(Couette 流动) .....	(280)
7.2.6	平行圆板间流动 .....	(283)
7.3	拉伸流动 .....	(287)
7.3.1	单轴拉伸流动 .....	(287)
7.3.2	双轴拉伸流动 .....	(289)
7.3.3	二维拉伸流动(纯剪切流动) .....	(290)
	习题 .....	(290)
7.4	常拉伸史流动 .....	(291)
7.4.1	常拉伸史流动的定义及其 $C_t$ 的形式 .....	(291)
7.4.2	常拉伸史流动举例 .....	(292)
	习题 .....	(293)
7.5	随动坐标系 .....	(293)
7.5.1	随动坐标系 .....	(293)
7.5.2	随动导数 .....	(295)
7.6	共转坐标系 .....	(299)
7.6.1	共转导数 .....	(299)
7.6.2	几种导数间的关系 .....	(301)
	习题 .....	(302)
7.7	由简单流体导出的近似的本构方程 .....	(302)
7.7.1	随动系中建立简单流体本构方程 .....	(302)
7.7.2	由简单流体导出的微分型近似本构方程 .....	(303)
7.7.3	由简单流体导出的积分型近似本构方程 .....	(306)
	习题 .....	(308)
7.8	Maxwell—Oldroyd 型本构方程 .....	(308)
7.8.1	线性粘弹性 .....	(308)
7.8.2	非线性本构方程 .....	(313)
	习题 .....	(322)
7.9	聚合物熔体挤出膨胀和纺丝 .....	(323)
7.9.1	熔体纺丝 .....	(323)
7.9.2	熔体挤出膨胀 .....	(327)

<b>第八章 湍流基本知识</b> .....	(332)
8.1 湍流的描述方法 .....	(332)
8.1.1 雷诺实验中层流与湍流 .....	(332)
8.1.2 湍流物理量的统计平均值 .....	(332)
8.1.3 湍流强度 .....	(334)
8.1.4 湍流尺度 .....	(335)
8.1.5 湍流能谱 .....	(336)
8.1.6 湍流的间歇性 .....	(338)
8.2 湍流的平均运动方程 .....	(339)
8.2.1 湍流仍作连续介质流动处理 .....	(339)
8.2.2 湍流平均量的连续性方程 .....	(339)
8.2.3 雷诺方程 .....	(340)
8.2.4 平均量的能量方程 .....	(340)
8.2.5 平均运动的动能方程 .....	(341)
8.2.6 雷诺应力输运方程 .....	(342)
8.2.7 涡量与涡的拉伸 .....	(343)
8.2.8 湍流能量耗散方程 .....	(344)
8.3 湍流模型 .....	(346)
8.3.1 湍流模式理论 .....	(346)
8.3.2 零方程模型 .....	(346)
8.3.3 湍流附面层基础知识 .....	(347)
8.3.4 Prandtl 混合长度 $l_m$ 经验公式 .....	(350)
8.3.5 一方程模型 .....	(352)
8.3.6 二方程模型 .....	(354)
8.3.7 雷诺应力方程的模式化 .....	(356)
8.3.8 大涡模拟 .....	(358)
<b>第九章 数值解算法应用的数学基础知识</b> .....	(362)
9.1 集合论基础知识 .....	(362)
9.1.1 集合符号与集合运算 .....	(362)
9.1.2 上限集与下限集 .....	(364)
9.1.3 集到集的映射 .....	(365)
习题 .....	(366)
9.2 泛函分析基础知识 .....	(366)
9.2.1 距离空间(度量空间)定义 .....	(366)
9.2.2 完备的距离空间 .....	(368)
9.2.3 距离空间中的开集与闭集 .....	(368)
9.2.4 Banach 不动点定理 .....	(369)

习题	(370)
9.3 线性空间	(370)
9.3.1 线性空间定义	(370)
9.3.2 线性相关性	(371)
9.3.3 线性赋范空间定义	(372)
9.3.4 内积空间	(374)
9.3.5 Banach 空间和 Hilbert 空间	(375)
9.3.6 极小化向量定理	(378)
习题	(380)
9.4 线性算子	(380)
9.4.1 线性算子定义	(380)
9.4.2 线性算子连续性与有界性关系	(382)
9.4.3 线性逆算子	(382)
9.4.4 线性有界算子全体所成空间	(383)
9.4.5 线性泛函	(384)
9.4.6 有界线性算子扩张定理和一致有界定理	(386)
习题	(387)
9.5 广义函数与广义导数	(388)
9.5.1 广义函数	(388)
9.5.2 广义函数导数	(389)
9.5.3 多维问题中的广义函数	(389)
9.6 勒贝格积分	(391)
9.6.1 开集构造定理和勒贝格测度	(391)
9.6.2 勒贝格积分	(393)
9.6.3 空间 $L_p[a, b]$	(394)
9.7 索波列夫(Sobolev)空间	(394)
9.7.1 索波列夫空间	(394)
9.7.2 索波列夫空间的一些性质	(396)
9.8 变分法	(397)
9.8.1 函数的极小值	(397)
9.8.2 泛函的极小值	(397)
习题	(401)
<b>第十章 流体力学问题解法</b>	<b>(402)</b>
10.1 基本方程线性或线化情形解法	(402)
10.1.1 奇点法与叠加法	(402)
10.1.2 二维不可压位流流函数与复位	(405)
10.1.3 三维不可压位流奇点法	(407)
10.1.4 可压位流方程小扰动线化后的奇点法	(408)

10.1.5	二维不可压位流的复变函数法及保角变换法	(420)
10.1.6	二维定常位流的速度图法	(426)
	习题	(428)
10.2	双曲型拟线性方程的特征线解法	(429)
10.2.1	特征线法概述	(429)
10.2.2	特征线法在定常无旋均熵平面或轴对称超音速流动中的应用	(432)
	习题	(434)
10.3	有限基本解法和格林函数法	(434)
10.3.1	有限基本解法	(434)
10.3.2	格林函数法	(439)
10.4	摄动法	(441)
10.4.1	摄动法概述	(441)
10.4.2	正则摄动问题	(442)
10.4.3	奇异摄动问题	(445)
10.5	差分法	(451)
10.5.1	差分方程的相容性	(451)
10.5.2	差分方程解的收敛性与稳定性	(453)
10.5.3	Banach 空间中初值问题的适定性及其差分逼近的相容性收敛性稳定性	(455)
10.5.4	$\epsilon_{ax}$ 等价定理	(457)
10.5.5	多层差分方程在辅助 Banach 空间中的表示	(459)
10.5.6	差分方程稳定性的矩阵分析法	(460)
10.5.7	一些常用的差分格式及其精度	(461)
10.5.8	有限体积离散法	(462)
10.5.9	一些常见的流体力学方程差分格式	(464)
10.6	加权余量法	(474)
10.6.1	加权余量法解题步骤	(474)
10.6.2	各种加权余量法	(476)
10.7	有限元法和边界元法	(482)
10.7.1	从加权余量法解释有限元和边界元法	(482)
10.7.2	伽辽金有限元法	(485)
10.7.3	高斯求积公式	(494)
10.7.4	变分原理的应用	(495)
10.7.5	虚功原理	(502)
10.7.6	边界元法	(503)
	附录 习题解答	(511)
	参考文献	(555)

# 第一章 矢量代数与微积

## 1.1 矢量代数

### 1.1.1 引言

矢量代数与微积是学习流体力学、电磁学等专业课的必备基础知识。本章系统地给出大量实用公式,而且绝大多数公式都有推导。其特点是,基本公式的推导不依赖于具体坐标系,推导后再给出它们在具体坐标系中的形式。本章讨论限于三维空间。

### 1.1.2 数量和矢量

数量(标量):不需给出在空间的方向就可完全确定的纯数或物理量称数量。

例 物体个数,物体体积、密度、温度、动能、位能等是数量。

矢量:既要给出大小,又要给定方向才能完全确定的量称矢量。矢量也称向量。

例 物体的位移、速度、加速度,物体所受力等是矢量。

在作某种矢量运算时,应注意矢量能否平移,约定下文中如无特别说明矢量可作平移。

矢量的符号,书写时一字母上加一箭头表示,如 $\vec{F}$ , $\vec{v}$ , $\vec{a}$ 等,印刷时需用字母的黑斜体(不加箭头)表示。任意矢量 $V$ 的大小(模)可用 $|V|$ ,或 $V$ 表示。

矢量的几何表示:画一长度正比于它的大小的直线段加一箭头表示。箭头方向为矢量方向,箭头处为矢量的终点,直线段另一端点称为始点,参见图 1.1.1。

矢量相等:如果两个矢量的大小相等且方向相同,则称两矢量相等。

在不同坐标系中,标量具有相同的值。用矢量形式写出的物理定理,如力系平衡条件,与具体坐标系无关。

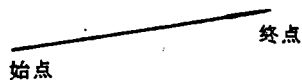


图 1.1.1

### 1.1.3 矢量加减法

我们要讨论的矢量是物理量,所以必须受到自然规律的支配,矢量运算法则是以这些自然规律为基础的。

加法(平行四边形法则):移动两矢量使其始点重合,以这两矢量始点为始点,这两矢量为邻边的平行四边形的对角线矢量,即为这两矢量之和。参见图 1.1.2。

加法也可叙述为,经过平移,将第二个矢量 $U$ 的始点置于第一个矢量 $V$ 的终点,则矢量和 $V+U$ 为始点在 $V$ 的始点,终点在 $U$ 的终点的矢量。

矢量加法满足

$$V + U = U + V \text{ (交换律)} \quad (1.1.1)$$



$$V + (U + W) = (V + U) + W \text{ (结合律)} \quad (1.1.2)$$

零矢量:若  $U$  与  $V$  大小相等方向相反,则矢量和  $V + U$  为零矢量,记作

$$V + U = 0, \quad U = -V, \quad V + (-V) = 0$$

显然

$$V + 0 = V \quad (1.1.3)$$

减法定义为

$$V - U = V + (-U) \quad (1.1.4)$$

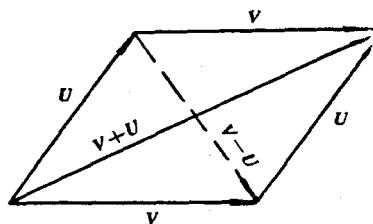


图 1.1.2

### 1.1.4 数乘矢量

单位矢量:大小为 1 的矢量称单位矢量。

矢量  $V$  的几何表示中,直线段长度与规定的单位长之比为矢量的大小  $|V|$ 。若再画一单位长线段平行于  $V$ ,并加上与  $V$  相同方向的箭头,就构成与  $V$  平行且指向相同的单位矢量  $e_v$ ,参看图 1.1.3。显然将  $e_v$  伸缩  $|V|$  倍后作平移可与  $V$  重合, $V$  可表示为  $V = |V|e_v$ ,由此规定数乘矢量法则如下。

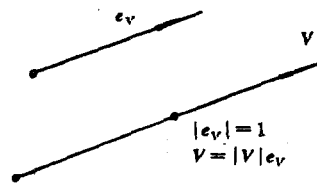


图 1.1.3

数乘矢量:实数  $b \neq 0$  与矢量  $V$  相乘所得的矢量  $bV$  的大小为  $|b||V|$ ,方向视  $b > 0$  还是  $b < 0$  而定,若  $b > 0$  则  $bV$  与  $V$  方向相同,若  $b < 0$ ,则  $bV$  与  $V$  方向相反。如果  $b = 0$ ,则  $bV$  为零矢量,参见图 1.1.4。

数乘矢量满足

$$1V = V \quad (1.1.5)$$

$$bV = Vb \quad (1.1.6)$$

$$b(cV) = (bc)V \quad (1.1.7)$$

$$(b+c)V = bV + cV \quad (1.1.8)$$

$$b(U+V) = bU + bV \quad (1.1.9)$$

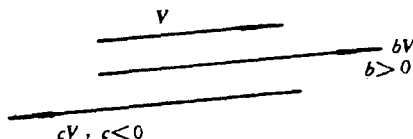


图 1.1.4

### 1.1.5 矢量的分解

设有  $m$  个矢量  $V_1, V_2, \dots, V_m$ , 存在  $m$  个不全为零的数  $c_1, c_2, \dots, c_m$ , 使下式成立

$$c_1V_1 + c_2V_2 + \dots + c_mV_m = 0 \quad (1.1.10)$$

则称  $(V_1, V_2, \dots, V_m)$  是线性相关矢量系,否则称为线性独立系。

若两矢量线性相关,  $c_1V_1 + c_2V_2 = 0$ , 则称  $V_1$  与  $V_2$  平行。

在三维空间中,若三矢量线性相关,则称三矢量共面。若矢量  $V_1, V_2, V_3$  共面,则

$$c_1V_1 + c_2V_2 + c_3V_3 = 0$$

因  $c_1, c_2, c_3$  不全为零,设  $c_1 \neq 0$ , 则(见图 1.1.5)

$$V_1 = -\frac{c_2}{c_1}V_2 - \frac{c_3}{c_1}V_3$$