点集拓扑学

程吉树　陈水利　编著

科学出版社
www.sciencep.com

内 容 简 介

本书系统介绍了点集拓扑学的基本概念和性质. 主要内容涵盖映射的性质; 度量空间及完备性; 拓扑空间中的开集、邻域、闭包、内部、边界、基与子基的等价刻画, 连续映射、开闭映射和同胚映射的等价条件; 网与滤子的收敛性及相互关系; 拓扑空间的子空间、乘积空间和商空间; 连通性、局部连通性、道路连通性及其拓扑性质; 可数性、可分性、$T_i\,(i=0,1,2,3,4,5)$ 分离性、正则和正规分离性、Urysohn 分离性、完全正则和完全正规分离性; 紧性、局部紧性和仿紧性及其应用; 紧度量空间、可度量化拓扑空间的条件以及广义开(闭)集、广义连续映射等.

本书内容丰富、理论新颖、思路清晰、通俗易懂. 本书适合高年级本科生、研究生阅读与参考. 也可供相关专业教师、科技人员教学和参考.

图书在版编目(CIP)数据

点集拓扑学 / 程吉树, 陈水利编著. —北京: 科学出版社, 2008
ISBN 978-7-03-020451-6

Ⅰ. 点… Ⅱ. ①程… ②陈… Ⅲ. 拓扑空间 Ⅳ. O189. 11

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 031090 号

责任编辑: 莫单玉 陈玉琢 / 责任校对: 陈玉凤
责任印制: 赵德静 / 封面设计: 中飞时代

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com
丽源印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2008 年 5 月第 一 版 开本: B5(720×1000)
2008 年 5 月第一次印刷 印张: 14
印数: 1—3 000 字数: 266 000

定价: 42.00元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈环伟〉)

前言

拓扑学是近代数学的一个重要分支，它的发展不仅深刻地影响着数学的其他分支，而且在其他诸多学科和社会实践中也得到日益广泛地应用. 如拓扑学在经济学、机械设计、计算机科学等领域中的应用. 这并不是拓扑学高深理论的杰作，而主要是因为拓扑学本质上整体的讨论方式适应了其他学科领域的要求.

在这样的背景下，广大读者迫切需要一本适合于他们阅读的拓扑书籍，以便学习、了解和掌握拓扑学的基本概念、基本知识以及拓扑学的思想方法，了解和掌握拓扑学的应用和拓扑学的最新成果. 这就是编写本书的目的.

本书共八章. 第 1 章是基础，介绍集合与集族、关系、映射及其性质等有关概念、记号和术语. 第 2 章介绍度量空间的基本概念和性质，内容包括点的邻域、开集的性质、序列及其收敛性以及度量空间的完备性. 目的是为介绍拓扑空间和相关概念以及拓扑空间可度量化做准备，使初学者更容易理解拓扑空间的概念. 第 3 章至第 6 章是点集拓扑学的核心部分，包括拓扑空间中的开集、邻域、闭包、内部、边界、基与子基的等价刻画，连续映射、开（闭）映射和同胚映射的等价条件；网与滤子的收敛性及其相互关系；拓扑空间的子空间、乘积空间和商空间的拓扑性质；连通性、局部连通性和道路连通性及其性质；第一（二）可数性、可分空间、Lindelöf 空间、T_i（i=0,1,2,3,4,5）分离性、正则和正规分离性、Urysohn 分离性、完全正则和完全正规分离性；紧性、可数紧性、聚点紧性、局部紧性和仿紧性的性质以及在分离空间中它们之间的关系等. 第 7 章介绍紧度量空间、可度量化拓扑空间的条件. 第 8 章介绍广义开（闭）集和广义连续映射的概念及其基本性质，连续与几乎连续映射的闭图等. 本书适当增加了近年得到的最新成果.

本书总结了作者多年来的教学实践经验和一些研究成果，能够比较全面地反映点集拓扑学的主要成果，同时也借鉴了不同著作和教材的优点. 由于拓扑学较为抽象，为了便于教师教学及学生自学，在写作和内容安排上有以下特点：

1. 力求表述确切、思路清晰、由浅入深、通俗易懂，并注意数学思维与数学方法的论述；

2. 融入丰富的实例来阐述难理解的概念和定理，结论的证明尽可能详细，便于学习和理解；

3. 从学生熟悉的概念入手逐步推广，循序渐进. 如从实数空间推广到度量空间，再过渡到拓扑空间；从数列到序列再到网等等；

4. 在概念引入前后，尽量用实例来说明概念的来源和背景；注意新旧知识的

联系和区别;

5. 尽可能涵盖点集拓扑学的主要成果, 既便于高年级本科生和研究生学习, 也便于研究者查阅参考;

6. 本书指出近年来发展的几个方向、研究热点，并提出了可研究的一些问题, 这些对读者尤其初学者的科研训练和科研能力的培养是有益的.

虽然作者尽心写作, 仔细校对, 但难免存在疏漏甚至错误. 不足之处, 恳请专家和读者不吝赐教和批评指正. 作者的电子邮箱是: jscheng@hdu.edu.cn; sgzx@jmu.edu.cn.

在本书的写作过程中, 自始至终得到陕西师范大学博士导师王国俊教授和首都师范大学博士导师郑崇友教授的鼓励、支持和帮助. 他们提出了许多宝贵的意见和建议, 使我们受益匪浅. 在此致以最衷心地谢意! 在本书的写作和出版过程中, 得到了科学出版社和杭州开元书局的大力支持, 在此一并致以真挚地感谢! 这里还要特别感谢杭州电子科技大学对出版本书给予的关心、支持和资助!

作　者

2008 年 2 月

目　录

前言
第 1 章　集合与映射……1
1.1　集合与集族……1
1.2　关系与等价关系……4
1.3　映射……9
1.4　笛卡儿积……13
1.5　可数集……16
1.6　选择公理……20
第 2 章　度量空间……22
2.1　度量空间……22
2.2　度量空间中的邻域与开集……25
2.3　极限与连续……32
2.4　完备度量空间……34
第 3 章　拓扑空间……40
3.1　拓扑空间……40
3.2　闭包与导集……44
3.3　内部与边界……48
3.4　θ闭包与δ闭包……51
3.5　拓扑基……54
3.6　网与滤子……59
3.7　连续映射……66
3.8　子空间……72
3.9　积空间……77
3.10　商拓扑……85
第 4 章　连通与局部连通空间……91
4.1　连通空间……91
4.2　$\mathbb{R}^n$的连通子集及应用……97
4.3　连通分支与局部连通空间……101
4.4　道路连通空间……106
第 5 章　可数性与分离性……112
5.1　可数性……112

5.2 T_0与 T_1空间 117
5.3 Hausdorff 空间 121
5.4 正则空间与 T_3空间 124
5.5 正规空间与 T_4空间 128
5.6 Urysohn 引理与 Tietze 扩张定理 131
5.7 完全正则空间与 Tychonoff 空间 136
5.8 Urysohn 空间 141
5.9 完全正规空间与 T_5空间 144
第 6 章 紧性 146
6.1 紧空间 146
6.2 欧氏空间中的紧子集及应用 156
6.3 可数紧、聚点紧与序列紧 160
6.4 局部紧空间 163
6.5 仿紧空间 166
6.6 紧化 173
第 7 章 可度量化空间与 Baire 空间 181
7.1 紧度量空间 181
7.2 可度量化空间 184
7.3 Baire 空间 188
第 8 章 连续映射的某些推广 194
8.1 半开集与半连续映射 194
8.2 α开集与α连续映射 197
8.3 近似连续映射与弱连续映射 201
8.4 闭图像 205
8.5 几乎连续映射 209
参考文献 214
索引 215

第 1 章　集合与映射

本章作为全书的基础和预备, 介绍集合与映射及其基本概念和事实. 目的是使读者熟悉这些术语、记号和性质.

1.1　集合与集族

假定读者已经熟悉集合及其运算, 这里简要介绍它们, 是为了统一术语和记号.

所谓集合是指具有某种属性的对象的集体. 例如“所有正整数的集合 $\mathbb{Z}_+$ ”, “所有自然数的集合 $\mathbb{N}$ ”, “所有有理数的集合 $\mathbb{Q}$ ”和“所有实数的集合 $\mathbb{R}$ ”等. 通常用大写英文字母 $A, B, C, \cdots$ 表示集合, 用小写字母 $x, y, z, t, \cdots$ 表示集合的成员 (元素或点). a 是集合 A 的元素, 记作 $a \in A$, 也称元素 a 属于集合 A , 点 a 不是集合 A 的元素, 记作 $a \notin A$.

我们用两种方式表示集合的元素. 把集合的所有元素一一列举出来的方法称为列举法. 例如小于 5 的正整数的集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$. 通过描述集合元素的共同特征来表示集合的方法, 称为描述法. 例如 $B = \{n \in \mathbb{N} | 2 \text{ 整除 } n\}$, 即偶数集. 一般地, 集合 $\{x | x \text{ 具有性质 } P\}$ 表示具有性质 P 的所有元素 x 构成的集合.

如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素, 则称 A 是 B 的子集, 记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$. 这时, 称集合 B 包含集合 A , 或 A 包含于 B. 当 $A \subset B$ 与 $B \subset A$ 同时成立时, 则称集合 A 与集合 B 相等, 记作 $A = B$. 当 $A \subset B$ 且 $A \neq B$, 称 A 是 B 的真子集.

一个集合称为空集当且仅当它没有任何成员 (元素), 记作 $\varnothing$. 规定: 空集 $\varnothing$ 是任何集合的子集, 空集是唯一的. 仅有一个元素的集合称为单点集. 如果将这个成员记作 x, 则单点集可表示为 $\{x\}$.

集合 A 与集合 B 的并集, 记作 $A \cup B$, 它是 A 或 B 的元素组成的集合, 即 $A \cup B = \{x | x \in A \text{或} x \in B\}$. 集合 A 与集合 B 的交集, 记作 $A \cap B$, 它是 A 与 B 的公共元素组成的集合, 即 $A \cap B = \{x | x \in A \text{且} x \in B\}$. 若 $A \cap B = \varnothing$, 则称集合 A 与 B 不相交或不交; 若 $A \cap B \neq \varnothing$, 则称集合 A 与 B 相交或有非空交.

当我们在讨论某一具体问题时, 所涉及的每个集合都是某一特定的“更大的”集合的子集, 称这个特定的“更大的”集合为基础集. 例如在实数范围内讨论问题时, 实数集 $\mathbb{R}$ 就是基础集. 如果在复数范围内讨论问题时, 复数集 $\mathbb{C}$ 就是基础集.

设 X 是基础集, $A,B\subset X$, 由属于 A 但不属于 B 的元素组成的集合, 称为 B 在 A 中的补集 (或余集), 记作 $A-B$, 即

$$A-B=\{x|x\in A,\text{但 } x\notin B\}.$$

如果 X 是基础集, A 在 X 中的补集简称为 A 的补集, 记作 A', 即

$$X-A=A'=\{x|x\in X,\text{但 } x\notin A\}.$$

但要注意, $B-A$ 不能记作 A', 除非 $B=X$. 为了书写简便, 在本书中采用逻辑符号:"$\forall$" 表示 "任意, 所有"; "$\Longleftrightarrow$" 表示 "当且仅当" 或 "充分必要条件"; 符号 "$A\Longrightarrow B$" 表示 "由 A 可以推出 B" 或 "A 蕴含 B".

根据以上的讨论, 有

定理 1.1.1　设 X 是基础集, A,B,C 是 X 的子集, 则

(1) $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C), A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$;

(2) $A-B=A\cap B'$;

(3) $A\cup A'=X, A\cap A'=\varnothing$;

(4) $A''=A, \varnothing'=X, X'=\varnothing$;

(5) (De Morgan 律) $(A\cup B)'=A'\cap B', (A\cap B)'=A'\cup B'$.

证明　仅以 (5) 为例证明. $x\in(A\cup B)'\Longleftrightarrow x\notin A$ 且 $x\notin B\Longleftrightarrow x\in A'$ 且 $x\in B'\Longleftrightarrow x\in A'\cap B'$. 所以 (5) 的第一式成立, 第二式类似可证. □

当集合的元素本身就是集合时, 称这种集合为集族. 用花写字母 $\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{C}$ 等表示. 设 T 是集合, $\mathscr{A}$ 是集族, 如果对每一个 $\alpha\in T$, 指定 $\mathscr{A}$ 中的一个成员 A_α, 则称 T 为指标集, 称集族 $\{A_\alpha|\alpha\in T\}$ 或 $\{A_\alpha\}$ 是以 T 为指标集的集族, 或简称 $\{A_\alpha|\alpha\in T\}$ 为集族.

设有集族 $\{A_\alpha|\alpha\in T\}$, 它的并与交分别定义如下:

$$\bigcup_{\alpha\in T}A_\alpha=\{x|\text{存在某个}\alpha\in T,x\in A_\alpha\},$$

$$\bigcap_{\alpha\in T}A_\alpha=\{x|\text{对每个}\alpha\in T,x\in A_\alpha\}.$$

当 $T=\{1,2,3,\cdots,n\}$ 时, $\bigcup\limits_{\alpha\in T}A_\alpha$ 可用 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 或 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 表示, $\bigcap\limits_{\alpha\in T}A_\alpha$ 可用 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 或 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$ 表示. 如果 $T=\mathbb{Z}_+$, 这时 $\bigcup\limits_{\alpha\in T}A_\alpha$ 用 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 表示, $\bigcap\limits_{\alpha\in T}A_\alpha$ 用 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 表示.

定理 1.1.2 设 A 是集合, $\{B_\alpha|\alpha\in T\}$ 是集族, 则

(1) $A\cap\left(\bigcup\limits_{\alpha\in T}B_\alpha\right)=\bigcup\limits_{\alpha\in T}(A\cap B_\alpha)$;

(2) $A\cup\left(\bigcap\limits_{\alpha\in T}B_\alpha\right)=\bigcap\limits_{\alpha\in T}(A\cup B_\alpha)$;

(3) $A-\left(\bigcup\limits_{\alpha\in T}B_\alpha\right)=\bigcap\limits_{\alpha\in T}(A-B_\alpha)$;

(4) $A-\left(\bigcap\limits_{\alpha\in T}B_\alpha\right)=\bigcup\limits_{\alpha\in T}(A-B_\alpha)$;

证明 仅以 (3) 为例证明.

$x\in A-\left(\bigcup\limits_{\alpha\in T}B_\alpha\right)\iff x\in A$ 并且 $x\notin\bigcup\limits_{\alpha\in T}B_\alpha\iff x\in A,\forall\alpha\in T,x\notin B_\alpha\iff\forall\alpha\in T,x\in A-B_\alpha\iff x\in\bigcap\limits_{\alpha\in T}(A-B_\alpha)$. □

设 $\{A_\alpha|\alpha\in T\}$ 是一个集族, 如果 $\forall\alpha,\beta\in T$, 当 $\alpha\neq\beta$ 时, 有 $A_\alpha\cap A_\beta=\varnothing$, 则称该集族两两不相交. 如果 $\forall\alpha\in T, A_\alpha$ 都是集合 X 的子集, 则称 $\{A_\alpha|\alpha\in T\}$ 是 X 的子集族. X 的所有子集组成的集族用符号 2^X 表示. 例如, 设 $X=\{a,b,c\}$, 则 $2^X=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},X\}$.

定理 1.1.3(De Morgan 律) 设 X 是基础集, $\{A_\alpha|\alpha\in T\}$ 是 X 的子集族, 则有

(1) $\left(\bigcup\limits_{\alpha\in T}A_\alpha\right)'=\bigcap\limits_{\alpha\in T}A'_\alpha$;

(2) $\left(\bigcap\limits_{\alpha\in T}A_\alpha\right)'=\bigcup\limits_{\alpha\in T}A'_\alpha$;

证明 仅以 (1) 为例证明. $x\in\left(\bigcup\limits_{\alpha\in T}A_\alpha\right)'\iff x\notin\bigcup\limits_{\alpha\in T}A_\alpha\iff\forall\alpha\in T$, $x\notin A_\alpha\iff\forall\alpha\in T,x\in A'_\alpha\iff x\in\bigcap\limits_{\alpha\in T}A'_\alpha$. □

有时为了方便起见, 不标明指标集或以集族本身作为指标集. 例如 $\mathscr{A}$ 是集族, $\mathscr{A}$ 的成员的并与交是集合:

$$\bigcup_{A\in\mathscr{A}}A=\{x|\text{存在某个}A\in\mathscr{A},\text{使}x\in A\}=\bigcup\mathscr{A}$$

$$\bigcap_{A\in\mathscr{A}}A=\{x|\forall A\in\mathscr{A},x\in A\}=\bigcap\mathscr{A}$$

设 X 是基础集, $\{A_\alpha|\alpha\in T\}$ 是 X 的子集族. 当 $T=\varnothing$ 时, 规定 $\bigcup\limits_{\alpha\in T}A_\alpha=\varnothing$, $\bigcap\limits_{\alpha\in T}A_\alpha=X$.

习　题　1.1

1. 设 A,B 是基础集 X 的子集, 则下列等价:
   (1) $A\subset B$;
   (2) $A\cap B=A$;
   (3) $A\cup B=B$;
   (4) $B'\subset A'$.
2. 设 X 是基础集, $A,B\subset X$, 则
   (1) $A\subset B'$ 当且仅当 $B\subset A'$;
   (2) $A\cap B=\varnothing$ 当且仅当 $A\subset B'$;
   (3) 若 $A\subset B$ 且 $B=\varnothing$, 则 $A=\varnothing$.
3. 设 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in T},\{B_\alpha\}_{\alpha\in T}$ 是 X 的两个子集族, 则
   (1) $\forall\alpha\in T, A_\alpha\subset\bigcup\limits_{\alpha\in T}A_\alpha$, $\bigcap\limits_{\alpha\in T}A_\alpha\subset A_\alpha$;
   (2) $\left(\bigcup\limits_{\alpha\in T}A_\alpha\right)\cup\left(\bigcup\limits_{\alpha\in T}B_\alpha\right)=\bigcup\limits_{\alpha\in T}(A_\alpha\cup B_\alpha)$;
   (3) $\left(\bigcap\limits_{\alpha\in T}A_\alpha\right)\cap\left(\bigcap\limits_{\alpha\in T}B_\alpha\right)=\bigcap\limits_{\alpha\in T}(A_\alpha\cap B_\alpha)$;
   (4) $\forall\alpha\in T$, 有 $A_\alpha\subset B_\alpha$, 则 $\bigcup\limits_{\alpha\in T}A_\alpha\subset\bigcup\limits_{\alpha\in T}B_\alpha$, $\bigcap\limits_{\alpha\in T}A_\alpha\subset\bigcap\limits_{\alpha\in T}B_\alpha$;
   (5) $D\subset X, D\cap\left(\bigcup\limits_{\alpha\in T}A_\alpha\right)=\bigcup\limits_{\alpha\in T}(D\cap A_\alpha), D\cup\left(\bigcap\limits_{\alpha\in T}A_\alpha\right)=\bigcap\limits_{\alpha\in T}(D\cup A_\alpha)$.
4. 设 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in T}$ 是集合 X 的子集族, $B\subset X$, 则
   (1) $B\subset\bigcap\limits_{\alpha\in T}A_\alpha\Longleftrightarrow\forall\alpha\in T, B\subset A_\alpha$;
   (2) $\bigcup\limits_{\alpha\in T}A_\alpha\subset B\Longleftrightarrow\forall\alpha\in T, A_\alpha\subset B$.

1.2　关系与等价关系

在讨论关系之前, 我们先考虑任意两个集合的笛卡儿积.

定义 1.2.1　设 X,Y 是集合, 则集合

$$\{(x,y)|x\in X,y\in Y\}$$

称为 X 与 Y 的笛卡儿积, 记作 $X\times Y$. X,Y 分别称为 $X\times Y$ 的第一坐标集与第二坐标集. 当 $Y=X$ 时, X 与 X 的笛卡儿积 $X\times X$ 可记作 X^2.

注 $X\times Y=\varnothing$ 当且仅当 $X=\varnothing$ 或 $Y=\varnothing$, 因此讨论集合的笛卡儿积时, 为了避免出现空集, 我们总假设 $X\neq\varnothing$ 且 $Y\neq\varnothing$.

例 1.2.2 设 $X=\{a,b\},Y=\{c,d,e\}$,

$$X\times Y=\{(a,c),(a,d),(a,e),(b,c),(b,d),(b,e)\}.$$

例 1.2.3 在几何学中, 熟知的坐标平面就是实数集 $\mathbb{R}$ 的笛卡儿积 $\mathbb{R}^2$.

例 1.2.4 设 X 与 Y 是集合, $X\times Y$ 的每个子集 R, 即 $R\subset X\times Y$, 称为从 X 到 Y 的关系.

当 $(x,y)\in R$ 时, 称 x 与 y 是 R 相关的, 记作 xRy. 如果 $X=Y$, 称关系 $R\subset X\times X$ 为 X 中的关系. X 中的关系 $\Delta=\{(x,x)|x\in X\}$ 称为恒同关系或对角线.

定义 1.2.5 设 X 是集合, R 是 X 中的关系.

(1) 如果 $\forall x\in X$, 有 $(x,x)\in R$, 则称关系 R 是自反的;

(2) $\forall x,y\in X$, 若 $(x,y)\in R$ 有 $(y,x)\in R$, 则称关系 R 是对称的;

(3) $\forall x,y,z\in X$, 若 $(x,y)\in R$ 且 $(y,z)\in R$, 蕴涵 $(x,z)\in R$, 则称关系 R 是传递的.

满足自反、对称和传递的 X 中的关系 R 称为 X 中的等价关系.

例 1.2.6 在整数集 $\mathbb{Z}$ 中, $\forall x,y\in\mathbb{Z}$, 定义 $\mathbb{Z}$ 中的关系 R 如下:

$$(x,y)\in R\Longleftrightarrow x-y=5k,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

则 R 是 $\mathbb{Z}$ 中的一个等价关系.

证明 $\forall x\in\mathbb{Z}$, 有 $x-x=0=5\times 0$, 所以 R 是自反的. $\forall x,y\in\mathbb{Z}$, 若 $(x,y)\in R$, 即 $x-y=5k$, 则 $y-x=5(-k)$. 因为 k 是整数, 所以 $-k$ 也是整数, 所以 $(y,x)\in R$. 因此 R 是对称的. $\forall a,b,c\in\mathbb{Z}$, 若

$$a-b=5k_1,b-c=5k_2,\quad k_1,k_2\in\mathbb{Z},$$

则

$$a-c=a-b+(b-c)=5k_1+5k_2=5(k_1+k_2),\quad k_1+k_2\in\mathbb{Z}.$$

因此 R 是传递的. 综上所述, R 是 $\mathbb{Z}$ 中的一个等价关系. □

例 1.2.7 设 X 是非空集合, $R=\{(A,A)|A\in 2^X\}$, 则容易验证 R 是 X 中的一个等价关系. 这个关系便是通常意义下集合相等关系.

定义 1.2.8　设 R 是集合 X 中的一个等价关系. 称集合 $[a]=\{b\in X|(a,b)\in R\}$ 是 a 的一个等价类. $\forall x\in[a]$, 称 x 为等价类 $[a]$ 的代表元素. 集族 $\{[x]|x\in X\}$ 称为 X 关于等价关系 R 而言的商集, 记作 X/R.

如果 R 是 X 中的一个等价关系, 有时为了方便, 用 $\sim$ 表示 R, 这时 $x\sim y\Longleftrightarrow x\in[y]$.

例 1.2.9　在例 1.2.6 中, 商集 $\mathbb{Z}/R$ 有 5 个成员, 即

$$\mathbb{Z}/R=\{[0],[1],[2],[3],[4]\}.$$

定理 1.2.10　设 R 是集合 X 中的一个等价关系, 则

(1) $\forall x\in X$, $[x]\neq\varnothing$;

(2) $\forall[x],[y]\in X/R$, $[x]\cap[y]=\varnothing$ 或 $[x]=[y]$.

证明　(1) $\forall x\in X$, 根据等价关系是自反的, 有 $(x,x)\in R$, 所以 $x\in[x]$.

(2) $\forall[x],[y]\in X/R$, 假设 $[x]\cap[y]\neq\varnothing$, 存在 $b\in[x]\cap[y]$. 于是有 $(x,b)\in R$ 及 $(b,y)\in R$, 因为 R 具有对称性和传递性, 所以 $(x,y)\in R$. $\forall d\in[y]$, 则有 $(y,d)\in R$ 与 $(x,y)\in R$. 由 R 的对称性与传递性有 $(d,x)\in R$, 即 $d\in[x]$. 因此 $[y]\subset[x]$. 类似可证 $[x]\subset[y]$. 因此 $[x]=[y]$. □

根据定理 1.2.10 有

定理 1.2.11　设 R 是 X 中的一个等价关系, 则 X 可以表示为两两不相交的等价类的并.

下面讨论另两类关系：

定义 1.2.12　设 R 是集合 X 中的关系, 如果

(1) 自反的, 即 $\forall a\in X,(a,a)\in R$;

(2) 传递的, 即 $\forall a,b,c\in X$, 若 $(a,b)\in R$ 且 $(b,c)\in R$, 则 $(a,c)\in R$;

(3) 反对称的, 即 $\forall x,y\in X$, 若 $(x,y)\in R$ 且 $(y,x)\in R$, 则 $x=y$.

则称 R 是集合 X 上的偏序关系, 具有偏序关系的集合称为偏序集.

例 1.2.13　实数集 $\mathbb{R}$ 上的小于或等于关系 $\leqslant$ 是偏序关系.

例 1.2.14　正整数集 $\mathbb{Z}_+$ 上的整除关系与小于或等于关系都是偏序关系.

例 1.2.15　设 X 是非空集合, R 是 X 上的包含关系, $\forall A,B\in 2^X$,

$$(A,B)\in R\Longleftrightarrow A\subset B,$$

则 R 是 X 上的偏序关系, X 按集合的包含关系 $\subset$ 构成一个偏序集.

定义 1.2.16 设 R 是集合 X 上的偏序关系. 如果 $\forall x, y \in X$, 或 $(x,y) \in R$ 或 $(y,x) \in R$, 即任意两个元素可以比较大小. 则称 R 为全序 (线性序) 关系, 具有全序关系的集合 X 称为全序集.

例 1.2.13 中, 关系 $\leqslant$ 是全序关系, 但例 1.2.14 中的整除关系和例 1.2.15 中的包含关系都不是全序关系. 例 1.2.14 还说明, 在一个集合上允许有多种关系.

为了书写方便, 我们作如下约定：

集合上的偏序关系用符号 $\leqslant$ 表示, 并且用 $x < y$ 或 $x = y$ 表示 $x \leqslant y$. 当 $x < y$ 时, 也可用 $y > x$ 表示. 用 $x < y < z$ 表示 $x < y$ 与 $y < z$. 读者注意, 这里虽然使用了熟知的符号, 但其含义已有很大的不同.

定义 1.2.17 设 X 是至少含有两元素的全序集, $\forall a, b \in X$ 且 $a < b$, 称集合

(1) $(a,b) = \{x \in X | a < x < b\}$ 为 X 中的开区间;

(2) $[a,b] = \{x \in X | a \leqslant x \leqslant b\}$ 为 X 中的闭区间;

(3) $(a,b] = \{x \in X | a < x \leqslant b\}, [a,b) = \{x \in X | a \leqslant x < b\}$ 为 X 中的半开半闭区间;

(4) $(a,+\infty) = \{x \in X | x > a\}, (-\infty, b) = \{x \in X | x < b\}$ 为 X 中的开射线;

(5) $(-\infty, b] = \{x \in X | x \leqslant b\}, [a, +\infty) = \{x \in X | x \geqslant a\}$ 为 X 中的闭射线.

如果 $(a,b) = \varnothing$, 则称 b 是 a 的紧接后元, 也称 a 是 b 的紧接前元.

例 1.2.18 设 $X = \{a,b,c,d\}$ 是全序集, 且 $a < b < c < d$. 则容易看出 $(a,b) = \varnothing, (a,d) = \{b,c\}, (b,+\infty) = \{c,d\}, (-\infty,b) = \{a\}, [a,d] = X, (a,d] = \{b,c,d\}$.

定义 1.2.19 设有全序关系 $(X, \leqslant_x)$ 与 $(Y, \leqslant_y)$. 笛卡儿积 $X \times Y$ 上的全序关系 $\leqslant$ 定义为：$\forall (x_1,y_1), (x_2,y_2) \in X \times Y$,

$$(x_1,y_1) < (x_2,y_2) \Longleftrightarrow x_1 <_x x_2, \text{或} x_1 = x_2 \text{且} y_1 <_y y_2.$$

这便是通常的字典序的简单情况.

定义 1.2.20 设 $(X, \leqslant)$ 是偏序集, $A \subset X$. 如果存在 $a \in A$, 使得

(1) $\forall x \in A$ 都有 $x \leqslant a$ $(x \geqslant a)$, 则称 a 是 A 的最大元 (最小元);

(2) 如果不存在 $y \in A$ $(y \neq a)$ 使 $a<y$ $(y<a)$, 或等价地 $\forall x \in A$, 若 $a \leqslant x$ $(a \geqslant x)$, 必有 $a = x$, 则称 a 是 A 的极大元 (极小元);

(3) 如果存在 $b \in X, \forall x \in A$ 有 $x \leqslant b$, 则称 b 是 A 的上界. 用 A_0 表示 A 的所有上界的集合. 如果 A_0 有最小元 a, 则称 a 是 A 的上确界, 记作 $\sup A = a$. 类似可以定义 A 的 (如果存在的话) 下确界 $\inf A = a$.

注　在一个偏序集 X 中, X 的子集 A 的最大元 (最小元) 和极大元 (极小元) 一定属于 A, 但上确界 (下确界) 未必属于 A. A 的最大元 (最小元) 必是 A 的极大元 (极小元), 反之不真. 如果 X 的子集 A 有唯一的极大 (小) 元, 这时, 极大元 (极小元) 就是 A 的最大元 (最小元).

例 1.2.21　设 $X=\{1,2,3,4\}$, 在 2^X 中定义关系 "$\leqslant$" 为通常的集合包含关系 "$\subset$". 设 $A=\{\{1\},\{2\},\{1,2\},\{2,4\}\}$, 则 $\{1,2\},\{2,4\}$ 都是 A 的极大元, A 没有最大元和最小元. 可见极大元不唯一. 设 $A=[0,1)\subset\mathbb{R}$. 按通常大小关系知 $\sup A=1$, 但 1 不是 A 的极大元.

定义 1.2.22　如果全序集 X 的每个非空有上界的子集 A 必有上确界, 则称 X 具有上确界性质. 如果全序集 X 的每个非空有下界的子集 B 必有下确界, 则称 X 具有下确界性质.

例 1.2.23　实数集 $\mathbb{R}$ 有上确界性质, 而集合 $X=(-1,0)\cup(0,1)$ 不具有上确界性质. 事实上, X 的子集 $B=\left\{-\dfrac{1}{n}|n\in\mathbb{Z}_+\right\}$ 有上界集 $(0,1)$, 但 $(0,1)$ 中没有最小元.

线性序集 X 称为良序集, 如果 X 的任何非空子集具有最小元.

习　题　1.2

1. 设 R 是自然整数集 $\mathbb{N}$ 上的一个关系, $\forall m,n\in\mathbb{N}$, 且满足:

$$(m,n)\in R\Longleftrightarrow m=nk,(k\in\mathbb{N}).$$

证明:

(1) R 是 $\mathbb{N}$ 上的偏序关系;

(2) R 是 $\mathbb{N}$ 上的等价关系.

2. 在整数集 $\mathbb{Z}$ 中, 定义关系 R:

$$\forall a,b,\in\mathbb{Z},(a,b)\in R\Longleftrightarrow ab>0.$$

问: R 是否是 $\mathbb{Z}$ 的等价关系?

3. 在 $\mathbb{R}^2$ 中定义关系 $\sim$:

$$\forall(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2,(x_1,y_1)\sim(x_2,y_2)\Longleftrightarrow y_1-x_1^2=y_2-x_2^2.$$

证明这是一个等价关系.

4. 证明全序集 X 具有上确界性质当且仅当它有下确界性质.
5. 证明全序集 X 的任意子集 A 最多有一个最大元, 也最多有一个最小元.
6. 证明全序集 X 的任意元素最多有一个紧接后元.

1.3 映　射

函数 (映射) 的概念我们已多次见到, 它在整个数学中占有重要的地位. 在这一节, 我们给出函数的精确定义, 并讨论它的性质及与映射相关的概念.

定义 1.3.1　设 f 是从 X 到 Y 的关系, 即 $f \subset X \times Y$. 如果 $\forall x \in X$, 存在唯一的 $y \in Y$ 使 $(x, y) \in f$, 则称 f 是从 X 到 Y 的映射 (函数), 记作 $f: X \to Y$, 而称 X 是 f 的定义域. 若 $(x, y) \in f$, 则用 $y = f(x)$ 表示, 并称 y 是 x 在 f 下的像或值.

注　这里利用关系来定义映射, 是映射的精确定义. 由此看出, 映射是 $X \times Y$ 中的一个特殊关系.

设 $f: X \to Y$, $A \subset X$, 称集合 $f(A) = \{f(x) | x \in A\}$ 是集合 A 在 f 下的像. 设 $B \subset Y$, 称集合 $f^{-1}(B) = \{x \in X | f(x) \in B\}$ 是集合 B 在 f 下的原像 (逆像). 当 $B = \{y\}$ 时, 将 $f^{-1}(\{y\})$ 简记为 $f^{-1}(y)$. 设 $f: X \to Y$ 是映射, $A \subset X$, $B \subset Y$. 为了简便, 将 $f^{-1}(f(A))$ 简记为 $f^{-1}f(A)$; 将 $f(f^{-1}(B))$ 简记为 $ff^{-1}(B)$.

下面讨论映射的基本性质, 这些性质在后面各章中经常用到.

定理 1.3.2　设 $f: X \to Y, \{A_\alpha\}_{\alpha \in T} \subset X; \{B_r\}_{r \in J} \subset Y$, 则有:

(1) $f(\varnothing) = \varnothing, f^{-1}(\varnothing) = \varnothing, f^{-1}(Y) = X$;

(2) (映射保序) 若 $A \subset B \subset X$, 则 $f(A) \subset f(B)$;

(3) (原像保序) 若 $C \subset D \subset Y$, 则 $f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$;

(4) $f(x) = y \Longleftrightarrow x \in f^{-1}(\{y\})$;

(5) $\forall A \subset X,\ A \subset f^{-1}f(A)$;

(6) $\forall B \subset Y,\ ff^{-1}(B) \subset B$;

(7) $\forall B \subset Y,\ f^{-1}(B') = (f^{-1}(B))'$ 或 $f^{-1}(Y - B) = X - f^{-1}(B)$;

(8) $A \subset X,\ B \subset Y$, 则 $f(A) \subset B \Longleftrightarrow A \subset f^{-1}(B)$;

(9) (映射保并) $f\left(\bigcup_{\alpha \in T} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in T} f(A_\alpha)$;

(10) (映射不保交)$f\left(\bigcap_{\alpha \in T} A_\alpha\right) \subset \bigcap_{\alpha \in T} f(A_\alpha)$;

(11) (原像保并) $f^{-1}\left(\bigcup_{r \in J} B_r\right) = \bigcup_{r \in J} f^{-1}(B_r)$;

(12) (原像保交) $f^{-1}\left(\bigcap_{r \in J} B_r\right) = \bigcap_{r \in J} f^{-1}(B_r)$.

证明　(1) $\sim$ (4) 是容易的.

(5) $\forall A \subset X, \forall x \in A$ 有 $f(x) \in f(A)$, 于是 $x \in f^{-1}(f(A))$, 所以 $A \subset f^{-1}(f(A))$;

(6) $\forall y \in f(f^{-1}(B))$, 存在 $x \in f^{-1}(B)$ 使 $y = f(x)$. 由 $x \in f^{-1}(B)$ 有 $y = f(x) \in B$. 因此 $f(f^{-1}(B)) \subset B$;

(7) $\forall B \subset Y$, 若 $f^{-1}(B') = \varnothing$, 则 $\forall x \in X, x \notin f^{-1}(B') \Longrightarrow f(x) \notin B' \Longrightarrow f(x) \in B \Longrightarrow x \in f^{-1}(B)$. 所以 $f^{-1}(B) = X$, 因此 $(f^{-1}(B))' = \varnothing$, 故等式成立. 设 $f^{-1}(B) \neq \varnothing$, 则 $\forall x \in f^{-1}(B') \Longleftrightarrow f(x) \in B' \Longleftrightarrow f(x) \notin B \Longleftrightarrow x \notin f^{-1}(B) \Longleftrightarrow x \in (f^{-1}(B))'$, 故等式也成立;

(8) 若 $f(A) \subset B$, 由 (3) 知, $f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(B)$. 又由 (5), $A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(B)$, 即 $A \subset f^{-1}(B)$. 反过来, 若 $A \subset f^{-1}(B)$, 由 (2) 与 (6) 得, $f(A) \subset f^{-1}(f(B)) \subset B$;

(9) $\forall y \in f\left(\bigcup\limits_{\alpha \in T} A_\alpha\right) \Longleftrightarrow$ 存在 $x \in \bigcup\limits_{\alpha \in T} A_\alpha$, 使 $y = f(x) \Longleftrightarrow$ 存在 $\alpha \in T$, $x \in A_\alpha$, 使 $y = f(x) \Longleftrightarrow$ 存在 $\alpha \in T, y = f(x) \in f(A_\alpha) \Longleftrightarrow y = f(x) \in \bigcup\limits_{\alpha \in T} f(A_\alpha)$, 即 (9) 成立;

(10) 类似可证;

(11) $x \in f^{-1}\left(\bigcup\limits_{r \in J} B_r\right) \Longleftrightarrow f(x) \in \bigcup\limits_{r \in J} B_r \Longleftrightarrow$ 存在 $r \in J, f(x) \in B_r \Longleftrightarrow$ 存在 $r \in J$ 使 $x \in f^{-1}(B_r) \Longleftrightarrow x \in \bigcup\limits_{r \in J} f^{-1}(B_r)$;

(12) 证明类似于 (11).

定义 1.3.3　设 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ 且 $f(X) \cap Y \neq \varnothing$. f 与 g 的复合是一个映射 $g \circ f : X \to Z$, 定义为: $(g \circ f)(x) = g(f(x)), x \in X$.

可以证明: $\forall C \subset Z$, 有 $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$.

定义 1.3.4　设 $f : X \to Y$ 为一个映射,

(1) 若 $\forall x_1, x_2 \in X$, $f(x_1) = f(x_2)$, 有 $x_1 = x_2$, 则称 f 是单射或一一映射;

(2) 若 $f(X) = Y$, 则称 f 是满射;

(3) 若 f 是单射和满射, 则称 f 是双射;

(4) $A \subset X$, $i_A : A \to X$ 定义为: $\forall x \in A$, $i_A(x) = x$, 则称 i_A 是 A 到 X 的内射. 当 $A = X$ 时, i_X 称为 X 上恒等映射.

设 $f : X \to Y$, 若存在 $g : Y \to X$ 使 $g \circ f = i_X$, 则称 f 是左可逆的, g 叫做 f 的左逆映射; 若 $f \circ g = i_Y$, 则称 f 是右可逆的, g 叫做 f 的右逆映射; 若 f 既是左可逆又是右可逆的, 则称 f 是可逆映射.

若 f 是可逆的, 则 f 的左、右逆映射相等且唯一, 称此唯一的映射为 f 的逆映

射, 记作 f^{-1}. 显然

$$f^{-1}\circ f=i_X,\quad f\circ f^{-1}=i_Y,\quad (f^{-1})^{-1}=f.$$

下面给出左、右可逆与可逆的等价条件.

定理 1.3.5　设 $f:X\to Y$, 则

(1) f 是左可逆的 $\Longleftrightarrow f$ 是单射;

(2) f 是右可逆的 $\Longleftrightarrow f$ 是满射;

(3) f 是可逆的 $\Longleftrightarrow f$ 是双射.

证明　(1) 设 f 是左可逆的, 即存在 $g:Y\to X$ 使 $g\circ f=i_X$. 任意 $x_1,x_2\in X$, 若 $f(x_1)=f(x_2)$, 则 $x_1=i_X(x_1)=(g\circ f)(x_1)=g(f(x_1))=g(f(x_2))=(g\circ f)(x_2)=i_X(x_2)=x_2$, 因此 f 是单射. 反过来, 设 f 是单射, 取定一个元 $x_\circ\in X$, 定义 $g:Y\to X$ 使 $\forall\, y\in Y$

$$g(y)=\begin{cases} x, & \text{如果 } x\in X\text{使 } f(x)=y,\\ x_0, & \text{如果 } x\in Y-f(X),\end{cases}$$

则 $g\circ f=i_X$, 即 f 是左可逆的.

(2) 设 f 是右可逆的, 即存在 $g:Y\to X$ 使 $f\circ g=i_Y$, $\forall y\in Y$, 有 $y=i_Y(y)=(f\circ g)(y)=f(g(y))$. 由于 $g(y)\in X$, 因此 f 是满射. 反之, 设 f 是满射, 则 $\forall y\in Y, f^{-1}(\{y\})\neq\varnothing$. 取定一元 $x_y\in f^{-1}(\{y\})$, 并令 $g(y)=x_y$, 则 $g:Y\to X$ 是一个映射, 并且 $f\circ g=i_Y$, 因此 f 是右可逆的.

(3) 由 (1) 与 (2) 可得.

在定理 1.3.2(5) 与 (10) 中的包含号不能换成等号. 下面给出它成为等号的条件.

定理 1.3.6　设 $f:X\to Y$, 则下列叙述等价:

(1) f 是单射;

(2) $\forall A,B\subset X,\ f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$;

(3) $\forall A\subset X,\ f^{-1}f(A)=A$;

(4) $\forall A\subset X,\ f(A')=f(X)-f(A)$.

证明　(1) $\Longrightarrow$ (2)　设 f 是单射, 由定理 1.3.2(10) 有, $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$. 只需证明 $f(A)\cap f(B)\subset f(A\cap B)$ 即可. $\forall y\in f(A)\cap f(B)$, 则 $y\in f(A)$ 且 $y\in f(B)$, 从而存在 $x_1\in A$ 使 $y=f(x_1)$, 存在 $x_2\in B$ 使 $y=f(x_2)$, 因为 f 是单射, 所以 $x=x_1=x_2\in A\cap B$, 于是 $y=f(x)\in f(A\cap B)$. 因此 $f(A)\cap f(B)\subset f(A\cap B)$.

(2) $\Longrightarrow$ (3)　由定理 1.3.2(5), 有 $A\subset f^{-1}(f(A))$. 只需证明 $f^{-1}(f(A))\subset A$.