通信原理课程建设教材系列

基本通信原理习题解答

JIBEN TONGXIN YUANLI XITI JIEDA

李宗豪　编著

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

通信原理课程建设教材系列

基本通信原理习题解答

李宗豪　编著

北京邮电大学出版社
·北京·

内容简介

本书是“通信原理课程建设教材系列”《基本通信原理》一书的配套参考书。本书对《基本通信原理》各章后所附习题进行详细解答，并给出有关的 MATLAB 程序。

本书可以用于读者自学时作练习参考。其中的 MATLAB 程序方便读者对复杂问题的处理。本书也可以作为本科学生的课外参考。

图书在版编目(CIP)数据

基本通信原理习题解答/李宗豪编著．—北京：北京邮电大学出版社，2007
(通信原理课程建设教材系列)
ISBN 978-7-5635-1540-0

Ⅰ．基… Ⅱ．李… Ⅲ．通信理论—高等学校—解题 Ⅳ．TN911-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 184313 号

书　　名：基本通信原理习题解答
编　　著：李宗豪
责任编辑：王晓丹
出版发行：北京邮电大学出版社
社　　址：北京市海淀区西土城路 10 号(100876)
发 行 部：电话：010-62282185　传真：010-62283578
E-mail：publish@bupt.edu.cn
经　　销：各地新华书店
印　　刷：北京市梦宇印务有限公司
开　　本：787 mm×960 mm　1/16
印　　张：7
字　　数：147 千字
印　　数：1—3 000 册
版　　次：2008 年 1 月第 1 版　2008 年 1 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-1540-0　　定　价：12.00 元

前　言

人类社会正在步入信息时代，通信在社会发展的作用越来越引起人们的关注。通信知识的普及成为时代的需要，许多读者都想通过自学很快了解和掌握现代通信的基本知识，但适合自学的有关教材不多。《基本通信原理》一书的出版就是希望为他们多提供一个选择。本书是它的配套参考书。

本书对《基本通信原理》各章后面所列的习题进行了详细解答。一般来说，这些习题所提的问题许多都只涉及基本概念的运用，也比较简单，只要认真阅读教材，读者都能自行解答。但本教材也强调以计算机为辅助工具来配合学习，希望通过一些繁杂的运算和波形描绘，加深对概念的理解和掌握，所以习题中也包含了一些用手工难以完成的计算和画图，它们需用 MATLAB 软件工具来完成，对此本书给出了相关的程序。

希望读者以计算机为辅助工具进行自学是作者的愿望。是否可行还有待广大读者的实践。鉴于作者学识有限，书中难免有不当之处，欢迎广大读者提出指正。

李宗豪

2007 年 9 月于北京邮电大学

目　录

第 2 章 信号与系统复习

2.1　画出下述信号的单边和双边幅度谱和相位谱。

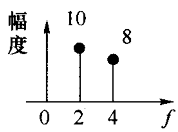
① $x_1(t)=10\cos(4\pi t+\pi/4)+8\sin(8\pi t+3\pi/4)$

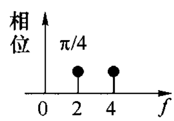
② $x_2(t)=7\cos(12\pi t-\pi/6)$

解

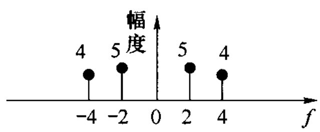
① 单边谱

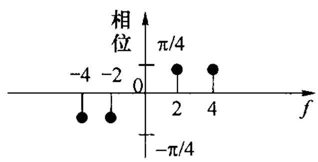
$$\begin{aligned}x_1(t)&=10\cos(4\pi t+\pi/4)+8\sin(8\pi t+3\pi/4)\\&=10\cos(4\pi t+\pi/4)+8\cos(8\pi t+\pi/4)\end{aligned}$$



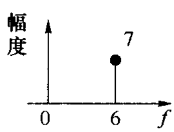


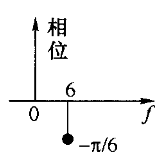
双边谱



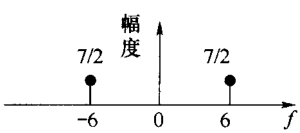


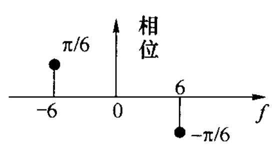
② 单边谱





双边谱





2.2　已知信号 $x(t)=\cos(4\pi t)+4\sin(10\pi t)$。

① 用它门的旋转相量的实部表示；

② 用它门的旋转相量和共轭表示。

解

①
$$\begin{aligned}x(t)&=\cos(4\pi t)+4\sin(10\pi t)\\&=\cos(4\pi t)+4\cos(10\pi t-\pi/2)\\&=\mathrm{Re}\{e^{j4\pi t}\}+\mathrm{Re}\{e^{j(10\pi t-\pi/2)}\}\end{aligned}$$

②
$$x(t)=\frac{1}{2}(e^{j4\pi t}+e^{-j4\pi t})+2[e^{j(10\pi t-\pi/2)}+e^{-j(10\pi t-\pi/2)}]$$

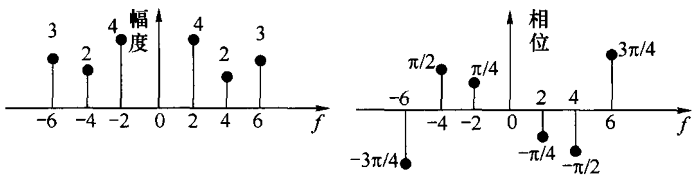
2.3　计算信号 $S(t)=3\cos\omega t+\cos(\omega t+\pi/3)$的幅度和相位。

解

$$\begin{aligned}S(t)&=3\cos\omega t+\cos(\omega t+\pi/3)\\&=3\cos\omega t+\cos\omega t\cdot\cos\pi/3-\sin\omega t\cdot\sin\pi/3\\&=\frac{7}{2}\cos\omega t-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\omega t\\&=\frac{\sqrt{52}}{2}\cos(\omega t+\theta)\end{aligned}$$

幅度：$\sqrt{52}/2$；相位：$\theta=\arctan(\sqrt{3}/7)$。

2.4　已知信号的幅度和相位的双边谱如题 2.4 图所示，写出信号的时域表达式。



题 2.4 图

解

$$S(t)=8\cos(4\pi t-\pi/4)+4\cos(8\pi t-\pi/2)+6\cos(12\pi t+3\pi/4)$$

2.5　计算下述积分：

① $x=\int_{5}^{100}e^{-2t}\delta(t-24)\,dt$

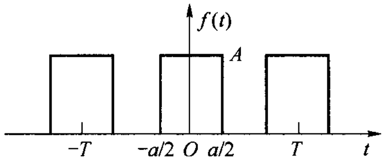
② $y=\int_{0}^{\infty}e^{-x}\delta(x-\pi)\,dx$

解

①
$$x=\int_{5}^{100}e^{-2t}\delta(t-24)\,dt=e^{-48}$$

②
$$y=\int_{0}^{\infty}e^{-x}\delta(x-\pi)\,dx=e^{-\pi}$$

2.6　已知题 2.6 图周期方波信号 $f(t)$ 的周期为 T，方波脉冲的持续时间为 a，脉冲高 $A=\sqrt{T/a}$。



题 2.6 图

① 计算 $f(t)$ 的平均功率 P；

② 求傅里叶级数系数；

③ 计算 $a=T/4$ 时，信号频谱主瓣内谐波的总功率 P_1 和 P_1/P；

④ 计算 $a=T/5$ 时，信号频谱主瓣内谐波的总功率 P_1 和 P_1/P。

解

①
$$
\begin{aligned}
P &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f^2(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T}\int_{-a/2}^{a/2} A^2\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T}\cdot\frac{T}{a}\cdot a = 1
\end{aligned}
$$

②
$$
\begin{aligned}
F_n &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} A\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T}\int_{-a/2}^{a/2} A\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{Aa}{T}\cdot\frac{\sin(n\omega_0 a/2)}{n\omega_0 a/2} \\
&= \sqrt{\frac{a}{T}}\cdot\frac{\sin(n\omega_0 a/2)}{n\omega_0 a/2}
\end{aligned}
$$

③ $a=T/4$

$$
\begin{aligned}
F_n &= \sqrt{\frac{a}{T}}\cdot\frac{\sin(n\omega_0 a/2)}{n\omega_0 a/2} \\
&= \sqrt{\frac{T/4}{T}}\cdot\frac{\sin(2n\pi f_0 T/8)}{2n\pi f_0 T/8} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(n\pi/4)}{n\pi/4}
\end{aligned}
$$

$n=0$　　$F_0=1/2$

$n=1$　　$F_1=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sin(\pi/4)}{\pi/4}=0.450\ 15$

$n=2$ $$F_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(2\pi/4)}{2\pi/4}=0.3183$$

⋮ $$F_3=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(3\pi/4)}{3\pi/4}=0.15005$$

$$F_4=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(4\pi/4)}{4\pi/4}=0$$

$$P_1=F_0^2+2(F_1^2+F_2^2+F_3^2+F_4^2)=0.9029$$

$$P_1/P=0.9029$$

④ $a=T/5$

$$F_n=\sqrt{\frac{a}{T}}\cdot\frac{\sin(n\omega_0 a/2)}{n\omega_0 a/2}$$

$$=\sqrt{\frac{T/5}{T}}\cdot\frac{\sin(2n\pi f_0 T/10)}{2n\pi f_0 T/10}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sin(n\pi/5)}{n\pi/5}$$

$n=0$ $$F_0=1/\sqrt{5}=0.44721$$

$n=1$ $$F_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sin(\pi/5)}{\pi/5}=0.41835$$

⋮ $$F_2=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sin(2\pi/5)}{2\pi/5}=0.33846$$

$$F_3=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sin(3\pi/5)}{3\pi/5}=0.22564$$

$$F_4=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sin(4\pi/5)}{4\pi/5}=0.10459$$

$$F_5=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sin(5\pi/5)}{5\pi/5}=0$$

$$P_2=F_0^2+2(F_1^2+F_2^2+F_3^2+F_4^2+F_5^2)=0.9028$$

$$P_1/P=0.9028$$

2.7 计算下述信号的傅里叶变换：

① $x_1(t)=\delta(t+7)+4\delta(t)$

② $x_2(t)=\delta(t+t_0)+\delta(t-t_0)$

解

① $$X_1(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}[\delta(t+7)+4\delta(t)]e^{-j\omega t}dt$$

$$=e^{j\omega 7}+4$$

② $$X_2(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}[\delta(t+t_0)+\delta(t-t_0)]e^{-j\omega t}dt$$
$$=e^{j\omega t_0}+e^{-j\omega t_0}$$
$$=2\cos\omega t_0$$

2.8 求下述信号的傅里叶变换并画出它的频谱图。

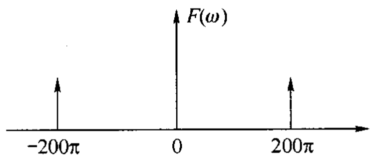
① $f(t)=2\cos(2\pi\times100\times t)$

② $f(t)=4\cos\omega_1 t\cdot\cos\omega_2 t$

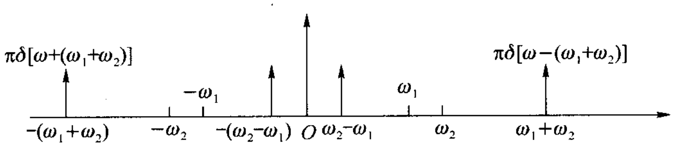
③ $f(t)=(1+\cos\omega_1 t)\cdot\cos\omega_2 t$

解

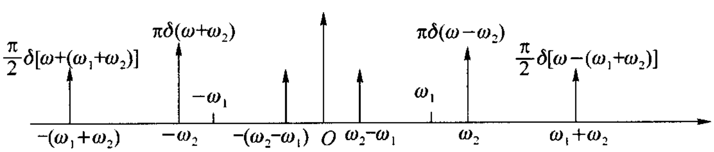
① $$F(\omega)=2\pi[\delta(\omega-200\pi)+\delta(\omega+200\pi)]$$



② $$f(t)=\frac{1}{2}\times4\,[\cos(\omega_1-\omega_2)t+\cos(\omega_1+\omega_2)t]$$
$$=2\,[\cos(\omega_1-\omega_2)t+\cos(\omega_1+\omega_2)t]$$
$$F(\omega)=2\pi\,\{\delta[\omega-(\omega_1-\omega_2)]+\delta[\omega+(\omega_1-\omega_2)]+\delta[\omega-(\omega_1+\omega_2)]+\delta[\omega+(\omega_1+\omega_2)]\}$$



③ $$f(t)=\cos\omega_2 t+\cos(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t)$$
$$=\cos\omega_2 t+\frac{1}{2}[\cos(\omega_1-\omega_2 t)+\cos(\omega_1+\omega_2 t)]$$
$$F(\omega)=\pi\,[\delta(\omega-\omega_2)+\delta(\omega+\omega_2)]+\frac{1}{2}\pi\,[\delta(\omega-\omega_1+\omega_2)+\delta(\omega+\omega_1-\omega_2)]$$
$$+\frac{1}{2}\pi\,[\delta(\omega-\omega_1-\omega_2)+\delta(\omega+\omega_1+\omega_2)]$$



2.9 用反傅里叶变换求下述频谱对应的时间函数。

① $F(\omega)=2\pi A\delta(\omega)+\pi B\,[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$

② $F(\omega)=\delta(\omega)+X(\omega)$，其中

$$X(\omega)=\begin{cases}1 & (-\omega_c \leqslant \omega \leqslant \omega_c)\\ 0 & \text{其余的 } \omega\end{cases}$$

解

① $f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi A\delta(\omega)e^{j\omega t}d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\pi B\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right]e^{j\omega t}d\omega$

$$=A+B\left(e^{-j\omega_0 t}+e^{j\omega_0 t}\right)$$

$$=A+\frac{B}{2}\cos\omega_0 t$$

②
$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\delta(\omega)+X(\omega)\right]e^{j\omega t}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega)e^{j\omega t}d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}1\cdot e^{j\omega t}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{jt}\cdot e^{j\omega t}\Big|_{-\omega_c}^{\omega_c}$$

$$=\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{jt}\cdot(j2)\cdot\sin\omega_c t$$

$$=\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{\pi t}\cdot\sin\omega_c t$$

2.10 指出下述的信号哪一个是能量信号或功率信号，计算它们的能量或功率。

① $x_1(t)=3\sin(5\pi t+\pi/4)\ (-\infty<t<\infty)$

② $x_2(t)=\begin{cases}e^{-2t} & (t\geqslant 0)\\ 0 & (t<0)\end{cases}$

③ $x_3(t)=\begin{cases}e^{-3t}\sin(4\pi t) & (t\geqslant 0)\\ 0 & (t<0)\end{cases}$

解

①
$$E_1=\int_{-\infty}^{\infty}\left[3\sin(5\pi t+\pi/4)\right]^2 dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{9}{2}\{1-\cos\left[2\times(5\pi t+\pi/4)\right]\}dt=\infty$$

$$P_1=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{9}{2}\{1-\cos\left[2\times(5\pi t+\pi/4)\right]\}dt=\frac{9}{2}$$

为功率信号。

②
$$E_2=\int_{-\infty}^{\infty}x^2(t)dt$$

$$=\int_0^{\infty}e^{-4t}dt$$

$$=\frac{-1}{4}e^{-4t}\Big|_0^{\infty}$$

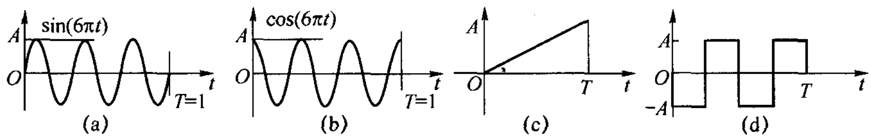
$$=\frac{1}{4}$$

为能量信号。

③
$$\begin{aligned}E_3 &= \int_{-\infty}^{\infty} x_3^2(t)\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-6t}\,\frac{1}{2}\,[1-\cos\,(8\pi t)]\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2}\times\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\times\frac{6}{6^2+(8\pi)^2}\\ &= 0.078\,84\end{aligned}$$

为能量信号。

2.11　计算下列信号的能量。



解

(a) $E_a = \int_0^T A^2\sin^2(6\pi t)\mathrm{d}t = \frac{A^2}{2}\int_0^1 \mathrm{d}t - \frac{A^2}{2}\int_0^1 \cos\,(12\pi t)\mathrm{d}t = \frac{A^2}{2}$

(b) $E_b = \int_0^T A^2\cos^2(6\pi t)\mathrm{d}t = \frac{A^2}{2}\int_0^1 \mathrm{d}t + \frac{A^2}{2}\int_0^1 \cos\,(12\pi t)\mathrm{d}t = \frac{A^2}{2}$

(c) $E_c = \int_0^T \left(\frac{A}{T}t\right)^2\mathrm{d}t = \frac{A^2}{T^2}\int_0^T t^2\mathrm{d}t = \frac{A^2}{3T^2}t^3\Big|_0^T = \frac{A^2T}{3}$

(d) $E_d = \int_0^T A^2\mathrm{d}t = A^2T$

2.12　已知传输系统的传输函数为 $H(\omega)$，系统的输入信号为 $x(t)$，其中

$$H(\omega)=\frac{1}{4+\mathrm{j}\omega}\qquad\qquad x(t)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-5t} & (t\geqslant 0)\\ 0 & (t<0)\end{cases}$$

① 计算 $x(t)$的傅里叶变换；

② 计算输出信号的能量谱密度；

③ 计算输出信号的能量。

解

①
$$\begin{aligned}X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-5t}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-(5+\mathrm{j}\omega)t}\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{-(5+\mathrm{j}\omega)}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(5+\omega)t}\Big|_0^{\infty}\\ &= \frac{1}{5+\mathrm{j}\omega}\end{aligned}$$

②
$$E(\omega)=|H(\omega)|^2\cdot|X(\omega)|^2=\frac{1}{16+\omega^2}\cdot\frac{1}{25+\omega^2}$$

③
$$\begin{aligned}E&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{16+\omega^2}\cdot\frac{1}{25+\omega^2}\mathrm{d}\omega\\&=2\int_0^{\infty}\frac{1/9}{4^2+\omega^2}\mathrm{d}\omega-2\int_0^{\infty}\frac{1/9}{5^2+\omega^2}\mathrm{d}\omega\\&=\frac{2}{9}\times\frac{\pi}{2\times4}-\frac{2}{9}\times\frac{\pi}{2\times5}\\&=\frac{\pi}{180}=0.0174\end{aligned}$$

2.13　已知信号的功率谱密度函数为 $S(f)$，求它通过理想微分器后信号的功率谱密度函数。

解

设输入信号为 $x(t)$，经过理想微分器的输出为 $y(t)$：

$$y(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(x)$$

根据傅里叶变换的性质，输出信号的傅里叶变换为 $Y(\omega)=\mathrm{j}\omega X(\omega)$，则传输函数为

$$H(\omega)=\frac{Y(\omega)}{X(\omega)}=\mathrm{j}\omega$$

于是输出信号的功率谱便为

$$|H(\omega)|^2S(\omega)=\omega^2S(\omega)$$

2.14　已知信号功率谱密度为

$$P(f)=\left[\frac{\sin(\pi f)}{\pi f}\right]^2\qquad(-\infty<f<\infty)$$

① 求信号功率 P（参考附录的积分公式）；

② (MATLAB)求 95%功率和 99%的信号带宽。

解

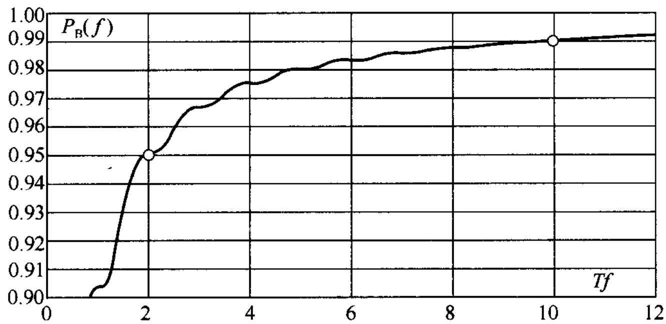
①
$$\begin{aligned}P&=2\int_0^{\infty}P(f)\mathrm{d}f\\&=2\int_0^{\infty}\frac{\sin^2(\pi f)}{(\pi f)^2}\mathrm{d}f\\&=\frac{2}{\pi^2}\cdot\frac{\pi^2}{2}=1\end{aligned}$$

②
$$P_B(f)=2\int_0^{f}\frac{\sin^2(\pi\xi)}{(\pi\xi)^2}\mathrm{d}\xi$$

用 MATLAB 计算 $P_B(f)$-f 并画曲线，文件如下：

```
clear
df = 0.00001;
f_end = 12
```

```
f = 0:df:f_end;
f = f + eps;
x = sin(pi * f)./(pi * f);
x2 = x.^2;
y = 2 * trapz(x2) * df
z = 2 * df * cumsum(x2);
plot(f,z,'r');
axis([0.0,f_end,0.9,1]);
hold on
grid
```



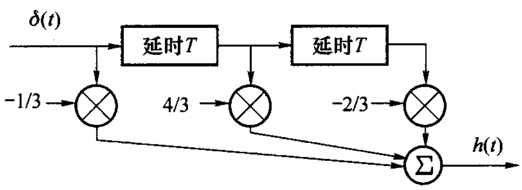
从图可以看出:95%功率带宽近似为 $B=2/T$;99%功率带宽近似为 $B=10/T$。

2.15　已知一线性系统的结构如题 2.15 图所示。

① 求其冲激响应 $h(t)$;

② 求其传输函数 $H(\omega)$;

③ (MATLAB)画出 $H(\omega)$幅度特性和相位特性($-1.5<f<1.5$)。



题 2.15 图

解

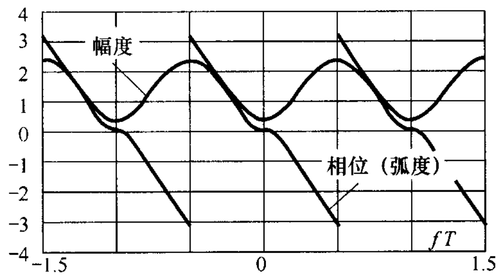
① $$h(t)=\frac{-1}{3}\delta(t)+\frac{4}{3}\delta(t-T)+\frac{-2}{3}\delta(t-2T)$$

② $$H(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$=\frac{-1}{3}+\frac{4}{3}e^{-j\omega T}+\frac{-2}{3}e^{-j2\omega T}$$

③ 用 MATLAB 计算和绘图

```
clear
df = 0.00001; T = 1;
f_end = 1.5;f = - f_end:df:f_end;
H = ( - 1/3) + (4/3) * exp( - j * 2 * pi * f. * T);
H = H + ( - 2/3) * exp( - j * 2 * pi * f. * 2 * T);
H_w = abs(H);b = angle(H);
plot(f,H_w,'r',f,b,'b');
grid
```



2.16 由电阻电容组成的传输系统如题 2.16 图所示。若要使系统无失真传输，这些电阻电容应当有什么关系（如何取值）？

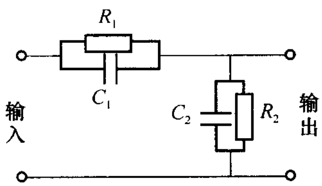


图 2.16

解

$$H(\omega)=\frac{1/(\mathrm{j}\omega C_1+1/R_1)}{1/(\mathrm{j}\omega C_1+1/R_1)+1/(\mathrm{j}\omega C_2+1/R_2)}$$

$$=\frac{1}{1+\dfrac{\mathrm{j}\omega C_1R_1+1}{\mathrm{j}\omega C_2R_2+1}\cdot\dfrac{R_2}{R_1}}$$

若 $R_1C_1=R_2C_2$，则

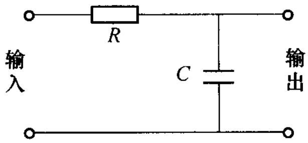
$$H(\omega)=\frac{R_1}{R_1+R_2}$$

系统的输入输出信号没有相位失真，仅是幅度相差一个常数。

2.17 (MATLAB)有周期方波信号 $f(t)$(题 2.6 图)，其周期为 $T=1$，脉冲持续时

间为 $a=0.4T$，高度为 $A=1$。一阶 RC 滤波器如题 2.17 图，传输函数为

$$H(f)=\frac{1}{1+\mathrm{j}(f/f_{3\,\mathrm{dB}})}$$



题 2.17 图

① 取前 $N=20$ 次谐波作为信号 $f(t)$ 的近似 $x_{20}(t)$，画出每次谐波的波形和它们的合成波形 $x_{20}(t)$（观察时间 $-1.5T\leqslant t\leqslant 1.5T$）；

② 设滤波器 $f_{3\,\mathrm{dB}}=1/T$，观察时间 $-1.5T\leqslant t\leqslant 1.5T$，计算并画出 $x_{20}(t)$ 通过该低通滤波器后输出的波形 $y_{20}(t)$；

③ 设滤波器 $f_{3\,\mathrm{dB}}=10/T$，观察时间 $-1.5T\leqslant t\leqslant 1.5T$，计算并画出 $x_{20}(t)$ 通过该低通滤波器后输出的波形 $y_{20}(t)$；

④ 比较②、③结果，说明 $y_{20}(t)$ 波形不同的原因。

MATLAB 文件（部分）

```
T = 1;f0 = 1/T;a = 0.4 * T;A = 1;                          % 信号参数
N = 20;fn = f0 * [1:N];                                    % N个谐波频率点
Fn = A * sin(pi * a * fn)./(pi * fn);                      % 傅里叶级数系数
f3dB = 1;
H = 1./(1 + j * fn./f3dB);Hn = abs(H);gn = angle(H);       % 谐波频率点上的传输特
                                                           性;幅度;幅角
```

解

① 傅里叶级数系数为

$$\begin{aligned}F_n &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{T}\int_{-a/2}^{a/2} A\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t \\ &= A\frac{\sin(n\pi a/T)}{n\pi}\end{aligned}$$

直流分量为

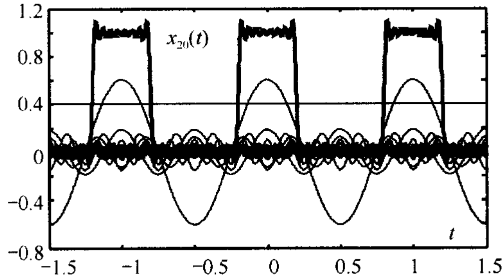
$$c_0=F_0=\frac{Aa}{T}$$

第 k 次谐波 $c_k(t)$ 为

$$c_k(t)=F_{-k}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi kt/T}+F_k\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi kt/T}$$

$$x_{20}(t)=\sum_{k=-20}^{20}F_k\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi kt/T}=c_0+\sum_{k=1}^{20}c_k(t)$$

$x_{20}(t)$的波形如图(a)(MATLAB 文件见后)。



图(a) 前 20 个谐波叠加的信号

② $f_{3\,dB}=1/T$，滤波器的传输函数为

$$H_1(f)=\frac{1}{1+j(f/f_{3\,dB})}=\frac{1}{1+j(f\cdot T)}$$

滤波器输出信号的傅里叶级数系数为

$$Y_n=H_1(nf_0)\cdot F_n(f_0)$$

直流分量为

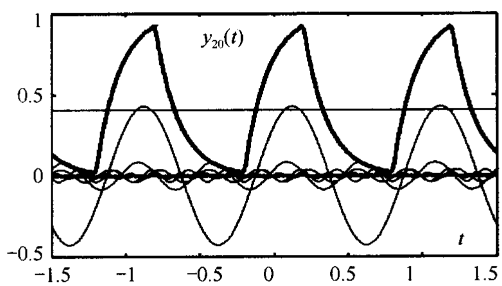
$$c_0=H_1(0)F_0=1\times Aa/T$$

第 k 次谐波 $c_k(t)$ 为

$$c_k(t)=Y_{-k}e^{-j2\pi kt/T}+Y_k e^{j2\pi kt/T}$$

$$y_{20}(t)=\sum_{k=-20}^{20}Y_k e^{j2\pi kt/T}=c_0+\sum_{k=1}^{20}c_k(t)$$

$y_{20}(t)$的波形如图(b)(MATLAB 文件见后)。



图(b) $x_{20}(t)$经过 $f_{3\,dB}=1/T$ 低通滤波器后的信号

③ $f_{3\,dB}=10/T$，滤波器的传输函数为

$$H_{10}(f)=\frac{1}{1+j(f/f_{3\,dB})}$$

$$=\frac{1}{1+j(f\cdot T/10)}$$