江西省教师教育专业教材

SHUXUE

总主编 蔡春祥

数学

第二册

主 编 赖南燕 朱爱民

江西高校出版社

江西省教师教育专业教材

SHUXUE

总主编 蔡春祥

数学

第二册

主编 赖南燕 朱爱民

江西高校出版社

编写说明

根据原国家教育委员会1992年制定的《三年制中等师范学校数学教学大纲(试行)》编写的必修课教材，即中等师范学校数学教科书(试用本)已使用多年，知识老化，不能适应当前中小学推行的新课程标准的需要. 尤其是这几年国家相继调整了中等师范学校的办学规格，提高了对小学教师的学历要求，因此，专门培养小学教师的学校急需一套符合教师教育的数学教科书. 为了满足广大教师和学生的需要，我们组织长期从事师范教育的一线特级教师和高级讲师编写了这套教师教育专业《数学》教材.

教师教育专业《数学》教材的编写，旨在新的教育形式下提高师范学生的思想道德品质、文化科学知识、审美情趣和身体心理素质，培养师范生的创新精神、实践能力、终身学习的能力和适应学校教育的能力，促进学生的全面发展，为基础教育输送合格的小学教师.

这套教师教育专业《数学》教材共分四册，适用于招收初中毕业生的五年制高等专科学校学生使用，每学期一册，每周4课时.

全套书在体例上有下列特点：

1. 每章开头均有目录和引言，以便学生了解本章的学习内容.

2. 书中习题分为两类：习题和复习参考题.

每一小节后都配有习题，便于学生作业选用，少数标有*号的题目有一定难度，可供学有余力的学生选用.

每章最后有A、B两组复习参考题，A组题是基础题，供复习全章使用；B组题带有一定的灵活性，有一定难度，可供学有余力的学生使用.

3. 每章后面均安排了“本章小结”，包括内容提要、学习要求和需要注意的问题，供复习全章时使用.

4. 书中附有少量的阅读教材，力求体现师范性，使学生视野得到

扩大，从而激发学生的学习兴趣，提高教师教育的质量.

在编写过程中，我们阅读了大量的资料，参考了国内同行的研究成果，注意把握新课程标准，并结合师范专科学校的教学实际，力求达到教材既适用又有特色的目的。

由于时间仓促，加上我们水平有限，书中难免有错误和疏漏，欢迎广大师生和其他读者批评指正.

编者

2006年12月

本书部分常用符号

$\sin x$		x 的正弦
$\cos x$		x 的余弦
$\tan x$		x 的正切
$\cot x$		x 的余切
$\sin^2 x$		$\sin x$ 的平方
$\cos^2 x$		$\cos x$ 的平方
$\arcsin x$		x 的反正弦
$\arccos x$		x 的反余弦
$\arctan x$		x 的反正切
$\Rightarrow$ 或 $\Leftarrow$	$p\Rightarrow q$ 或 $q\Leftarrow p$	由条件 p 可推出结论 q，p 是 q 的充分条件，q 成立只需 p 成立；q 是 p 的必要条件，p 成立必须 q 成立
$\Leftrightarrow$	$p\Leftrightarrow q$	$p(q)$是 $q(p)$的充分必要条件，$p(q)$成立当且仅当 $q(p)$成立，$p(q)$等价于 $q(p)$
$(a,b)\mid c$		(a,b)能整除 c
$(a,b)\nmid c$		(a,b)不能整除 c

图书在版编目(CIP)数据

数学.2/赖南燕,朱爱民主编.—南昌:江西高校出版社,2007.2

ISBN 978-7-81075-858-1

Ⅰ.数… Ⅱ.①赖… ②朱… Ⅲ.数学-高等学校:技术学校-教材 Ⅳ.01

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第165263号

《数学》编写委员会

(以姓氏笔画为序)

冯全民　刘一平　朱彦保　朱爱民
何雨明　黄宇晨　曾东升　曾　青
赖南燕　廖宇凡　蔡春祥

出版发行	江西高校出版社
社　　址	江西省南昌市洪都北大道96号
邮政编码	330046
电　　话	(0791)8529392,8504319
网　　址	www.juacp.com
印　　刷	南昌市光华印刷有限责任公司印刷
照　　排	江西太元科技有限公司照排部
经　　销	各地新华书店
开　　本	787mm×1092mm　1/16
印　　张	9.75
字　　数	120千字
版　　次	2007年1月第1版第1次印刷
印　　数	1~3500册
书　　号	ISBN 978-7-81075-858-1
定　　价	17.00元

目录

第四章　三角函数

在现实世界中，存在着许多随时间而发生周期性变化的现象. 研究这类现象的数学模型就是三角函数，三角函数在高等数学、物理学、天文学、测量学等领域有广泛的应用. 在这一章里，我们将用集合与函数的知识系统地研究任意角的三角函数，掌握三角函数的一些基本关系式；并在此基础上研究三角式的变形，了解三角函数的图像和性质；最后介绍三角函数在解三角形中的应用.

一　任意角的三角函数

4.1　角的概念的推广

我们已经知道，角可以看成是平面内一条射线绕着它的端点从一个位置旋转到另一个位置形成的图形. 如图 4－1 所示，平面上一条射线由原来的起始位置 OA，绕着它的端点 O 旋转到终止位置 OB，就形成了角 α. 射线的端点 O 做角 α 的**顶点**，起始时的射线 OA 叫做角 α 的**始边**，终止时的射线 OB 叫做角 α 的**终边**.

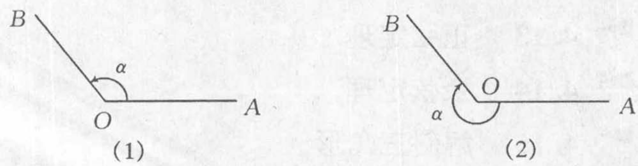

图 4－1

由于旋转的方向由两种：一种是逆时针方向旋转，一种是顺时针方向旋转. 为了区别这两种因旋转方向不同而形成的角，我们规定，按逆时针方向旋转形成的角叫做**正角**，按顺时针方向旋转形成的角叫做**负角**. 图 4－1(1)中的角 α 是一个正角，图 4－1(2)中的角 β 是一个负角.

过去我们研究过 0°到 360°的周内角，但在日常生活、生产劳动和科学实验中，经常会遇到大于 360°的角或小于 0°的角. 例如，在体操中的“转体 720°”(即前滚翻转体两周)，一昼夜里时钟转过的角度是－720°，分钟转过 24 周为－8640°. 图4－2

中的角为正角 750°. 图 4－3 中，正角 $\alpha=210°$，负角 $\beta=-150°$，负角 $\gamma=-660°$.

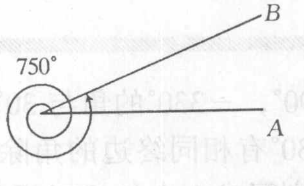

图 4－2

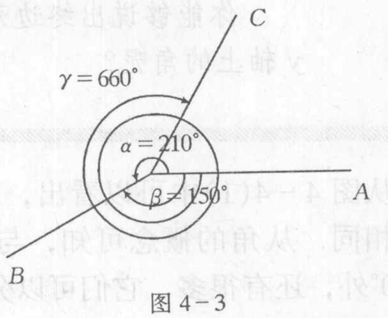

图 4－3

我们还规定：当一条射线没有作任何旋转时也形成一个角，称为**零角**. 零角的始边和终边重合. 零角记为 0°.

这样，我们把角的概念推广到了任意大小的角，包括正角、负角、零角.

为了研究方便，我们总是把角放在直角坐标系内加以讨论，具体的放置方法：(1) 使角的顶点与坐标原点重合；(2) 使角的始边与 x 轴的非负半轴重合. 把一个角这样放置在直角坐标系中，就叫做放置在标准位置. 根据一个放置在标准位置的角的终边落在直角坐标系的位置，可以把角分为两类：一类是角的终边落在第几象限，就把它叫做**第几象限的角**(也称为这个角属于第几象限)；另一类是角的终边落在坐标轴上的角，就把它叫做**坐标轴上的角**. 如图 4－4(1)中的 30°，390°，－330°角都是第一象限的角；图 4－4(2)中的－60°，330°的角是第四象限的角，585°的角是第三象限的角.

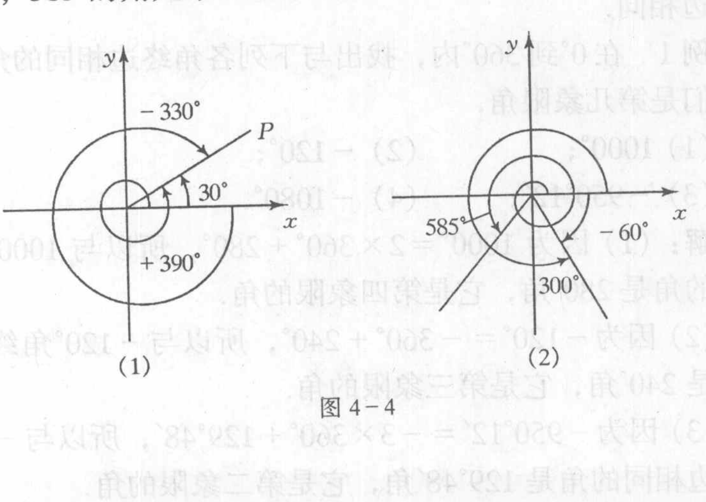

图 4－4

想一想

你能够说出终边落在 x 轴上的角吗？y 轴上的角呢？

从图 4－4(1)中可以看出，390°，－330°的角与 30°的角的终边相同．从角的概念可知，与 30°有相同终边的角除 390°和－330°外，还有很多，它们可以分别写成 k 个($k\in\mathbf{Z}$)周角与 30°角的和的形式：

$1\times360°+30°$； $(-1)\times360°+30°$；

$2\times360°+30°$； $(-2)\times360°+30°$；

$3\times360°+30°$； $(-3)\times360°+30°$；

…… ……

由此可知，所有与 30°角有相同终边的角，连同 30°的角在内，都是集合 $S=\{\beta\mid\beta=k\cdot360°+30°,\ k\in\mathbf{Z}\}$ 的元素；反过来，集合 S 的任一元素显然都与 30°角终边相同．

一般地，所有与角 α 终边相同的角，连同角 α 在内，可构成一个集合

$$S=\{\beta\mid\beta=k\cdot360°+\alpha,\ k\in\mathbf{Z}\},$$

即任一与角 α 终边相同的角，都可以表示成角 α 与整数个周角的和的形式．

显然，如果 β 表示成 $k\cdot360°+\alpha(k\in\mathbf{Z})$ 的形式，那么 β 和 α 的终边相同．

例 1　在 0°到 360°内，找出与下列各角终边相同的角，并判定它们是第几象限角．

(1) 1000°； (2) －120°；

(3) －950°12′； (4) －1080°．

解：(1) 因为 $1000°=2\times360°+280°$，所以与 1000°角终边相同的角是 280°角，它是第四象限的角．

(2) 因为 $-120°=-360°+240°$，所以与－120°角终边相同的角是 240°角，它是第三象限的角．

(3) 因为 $-950°12'=-3\times360°+129°48'$，所以与－950°12′角终边相同的角是 129°48′角，它是第二象限的角．

(4) 因为 $-1080^\circ=-3\times360^\circ+0^\circ$，所以与 -1080° 角终边相同的角是 0° 角，它不是象限角，它是终边落在 x 轴的非负半轴上的角.

例 2 写出与下列各角终边相同的角的集合，并把集合中在 -720° 到 360° 间的角写出来.

(1) 60°；　　(2) -70°.

解：(1) $S=\{\beta\mid\beta=k\cdot360^\circ+60^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}$.

S 中在 -720° 到 360° 间的角是：

$$-2\times360^\circ+60^\circ=-660^\circ\ (k=-2),$$
$$-1\times360^\circ+60^\circ=-300^\circ\ (k=-1),$$
$$0\times360^\circ+60^\circ=60^\circ\ (k=0).$$

(2) $S=\{\beta\mid\beta=k\cdot360^\circ-70^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}$.

S 中在 -720° 到 360° 间的角是：

$$-1\times360^\circ-70^\circ=-430^\circ\ (k=-1),$$
$$0\times360^\circ-70^\circ=-70^\circ\ (k=0),$$
$$1\times360^\circ-70^\circ=290^\circ\ (k=1).$$

例 3 写出终边在 y 轴上的角的集合.

解：在 0° 到 360° 的周内角范围内，终边在 y 轴上的角有 90° 与 270° 两个角(图 4－5)．因此，所有与 90° 角终边相同的角组成的集合是：

$$S_1=\{\beta\mid\beta=k\cdot360^\circ+90^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}$$
$$=\{\beta\mid\beta=2k\cdot180^\circ+90^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}.$$

所有与 270° 角终边相同的角组成的集合是：

$$S_2=\{\beta\mid\beta=k\cdot360^\circ+270^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}$$
$$=\{\beta\mid\beta=(2k+1)\cdot180^\circ+90^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}.$$

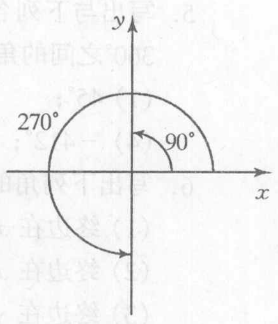

图 4－5

于是，终边在 y 轴上的角的集合是：

$$S=S_1\cup S_2$$
$$=\{\beta\mid\beta=2k\cdot180^\circ+90^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}$$
$$\cup\{\beta\mid\beta=(2k+1)\cdot180^\circ+90^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}.$$

集合 S_1 中的元素是 180° 的偶数倍加 90°，集合 S_2 中的元素是 180° 的奇数倍加 90°，两式合并起来就是 180° 的任意整数倍加 90°，即 $k\cdot180^\circ+90^\circ$，$k\in\mathbf{Z}$．所以，终边在 y 轴上的角的集合 S 可写作：

$$S=\{\beta \mid \beta=k\cdot 180^\circ+90^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}.$$

/想一想/

你能分别写出终边在 y 轴的非负半轴上的角的集合和终边在 y 轴的非正半轴上的角的集合吗？

习题 4.1

1. 第一象限角，锐角，小于 90° 角是同一个概念吗？如果不是，它们的区别是什么？
2. 把下列各角放置在直角坐标系的标准位置，画出下列各角，并指出它们是第几象限的角.

   (1) -94°； (2) $379^\circ15'$； (3) 1000°；

   (4) -1246°； (5) 1080°.
3. 下列各角中，哪些角的终边与 -30° 角的终边相同？为什么？

   390°，-390°，330°，-330°，750°，-1050°
4. 在 0° 到 360° 的角内，找出与下列各角终边相同的角，并判定它们是第几象限角.

   (1) $1186^\circ26'$； (2) -1000°； (3) 1920°；

   (4) $-841^\circ12'$； (5) -18°； (6) 4320°；
5. 写出与下列各角终边相同的角的集合，并把集合中在 -720° 到 360° 之间的角写出来.

   (1) 45°； (2) -60°； (3) $396^\circ18'$；

   (4) -412°； (5) 0°； (6) -90°.
6. 写出下列角的集合：

   (1) 终边在 x 轴上的角的集合；

   (2) 终边在 x 轴的非负半轴上的角的集合；

   (3) 终边在 y 轴的非负半轴上的角的集合.
7. 填空题

   (1) 如果角 α 的终边经过点 $p(-2,\ -1)$，那么角 α 是第________象限角.

   (2) 角 α 是锐角，那么 $-\alpha$ 是第________象限角，$180^\circ+\alpha$ 是第________象限角，$180^\circ-\alpha$ 是第________象限角，$360^\circ-\alpha$ 是第________象限角.
8. 选择题

(1) 下列命题为真命题的是(　　)

(A) 三角形的内角是第一象限的角.

(B) 第二象限的角比第一象限角大.

(C) 第二象限的角是钝角.

(D) 角 α 是第一象限角的充要条件是

$k\cdot 360^\circ < \alpha < k\cdot 360^\circ + 90^\circ$ ($k\in \mathbf{Z}$).

(2) 若角 α 与角 β 的终边相同，那么(　　)

(A) $\alpha+\beta=k\cdot 360^\circ$ ($k\in \mathbf{Z}$).　　(B) $\alpha+\beta=180^\circ$.

(C) $\alpha+\beta=0^\circ$.　　(D) $\alpha-\beta=k\cdot 360^\circ$ ($k\in \mathbf{Z}$).

4.2　弧度制

我们在初中已学过角的度量，规定周角的$\dfrac{1}{360}$为 1 度的角，记作 1°角. 这种以"度"为单位来度量角的制度叫做**角度制**.

在数学和其他科学中常常用到另一种度量角的单位制——**弧度制**，它的单位是弧度，用符号 rad 表示. 下面我们介绍"弧度"这个单位.

我们把长度等于半径长的弧所对的圆心角(即所对弧长与半径之比等于 1 的圆心角)叫做 **1 弧度的角**，记作 1 rad 或 1 弧度. 如图 4－6，弧$\overset{\frown}{AB}$的长度等于半径 r，弧$\overset{\frown}{AB}$所对的圆心角$\angle AOB$ 就是 1 弧度的角. 在图 4－7 中，圆心角$\angle AOC$ 所对的弧$\overset{\frown}{AC}$的长 $l=2r$，那么$\angle AOC$ 的弧度数就是$\dfrac{l}{r}=\dfrac{2r}{r}=2$.

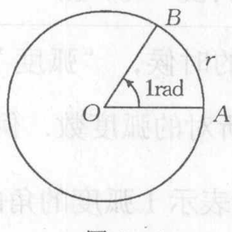

图 4－6

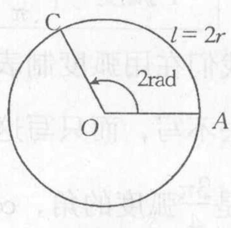

图 4－7

于是，在半径为 r 的圆中，长度为 l 的弧所对的圆心角就是$\dfrac{l}{r}$弧度(或 rad).

由于角分正角、负角和零角，因此我们规定：正角的弧度数是一个正数，负角的弧度数是一个负数，零角的弧度数是零. 并且有

$$|\alpha| = \frac{l}{r}.$$

其中 α 为一个角的弧度数，l 是以角 α 当作圆心角时所对的弧长，r 是圆的半径：这种以“弧度”作为单位来度量角的制度叫做弧度制.

/ 想一想 /

为什么在不同的圆中，长度分别等于它们半径的弧所对的圆心角相等？

用弧度制和角度制度量同一个角时，由于单位不同，所得的量数就不同(除零角以外)，这就要研究弧度和角度之间的换算关系.

我们知道，当圆心角为周角时，它所对的弧(即圆周)长 $l = 2\pi r$，所以周角的弧度数是 2π，而整个圆周所对的圆心角是 360°，所以

$$360^\circ = 2\pi \text{ 弧度},$$
$$180^\circ = \pi \text{ 弧度}.$$

因此得到角度制和弧度制的换算公式：

$$\boxed{\begin{aligned} &1^\circ = \frac{\pi}{180}\text{弧度} \approx 0.01745 \text{ 弧度} \\ &1 \text{ 弧度} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57.30^\circ \approx 57^\circ 18' \end{aligned}}$$

今后我们在用弧度制表示角的时候，“弧度”或“rad”二字通常略去不写，而只写这个角所对的弧度数. 例如，角 $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ 就表示 α 是 $\frac{3\pi}{4}$ 弧度的角，$\cos 1$ 就表示 1 弧度的角的余弦.

下面是一些特殊角的度数与弧度数的对应表：

角度	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

角的概念推广以后，正角、负角和零角都有意义. 于是，在弧度制下，角的集合与实数集 **R** 之间建立了这样一种对应关

系：每一个角都有唯一一个实数(即这个角的弧度数)与它对应；反过来，每一个实数也都有唯一的一个角(弧度数等于这个实数的角)与它对应.

根据前面的公式 $|\alpha|=\frac{l}{r}$，可以得到弧度制下的弧长公式：

$$l=|\alpha|r.$$

显然，它比角度制下的弧长公式 $l=\frac{n\pi r}{180}$(其中 n 是弧所对圆心角的度数)简单.

应当注意的是，在应用弧度制下的弧长公式 $l=|\alpha|r$ 时，角 α 的单位必须是“弧度”. 如果角 α 的单位是“度”，则要把“度”化成“弧度”.

例 1　把 $67°30'$ 化成弧度.

解：因为 $67°30'=67.5°=(\frac{135}{2})°$，所以

$$60°30'=\frac{\pi}{180}\text{弧度}\times\frac{135}{2}=\frac{3\pi}{8}\text{弧度}.$$

例 2　把 $\frac{2\pi}{5}$ 弧度和 1.5 弧度化成度.

解：
$$\frac{2\pi}{5}\text{弧度}=\frac{2}{5}\times180°=72°;$$

$$1.5\text{弧度}=(\frac{180}{\pi})°\times1.5\approx57.30°\times1.5$$
$$=85.95°=85°57'.$$

例 3　计算：(1) $\sin\frac{\pi}{3}$；　　(2) $\cos 1.5$.

解：(1) 因为 $\frac{\pi}{3}=\frac{1}{3}\times180°=60°$，所以

$$\sin\frac{\pi}{3}=\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(2) 因为 $1,5\approx85°57'$，所以

$$\cos 1.5\approx\cos 85°57'=0.0708.$$

例 4　化下列各角成 $2k\pi+\alpha$ ($0\leqslant\alpha<2\pi$，$k\in\mathbf{Z}$)的形式：

(1) $\beta=\frac{20}{3}\pi$；　(2) $\gamma=-1050°$.

解：(1) $\beta=\frac{20}{3}\pi=6\pi+\frac{2\pi}{3}$ (其中 $k=3$，$\alpha=\frac{2\pi}{3}$)；

(2) $\gamma=-1050°=\frac{\pi}{180}\times(-1050)=-\frac{35}{6}\pi$