21世纪高等教育规划教材

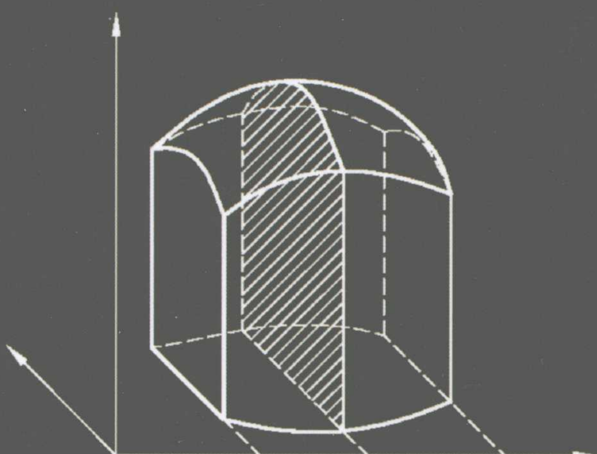
下册

高等数学

XIACE

GAODENG SHUXUE

主　编◎张波汉　谭千蓉
副主编◎温　松



西南交通大学出版社
Http://press.swjtu.edu.cn

21 世纪高等教育规划教材

高 等 数 学

（下册）

主　编　　张波汉　谭千蓉
副主编　　温　松
编　委　　徐丽君　严天艳
　　　　　李世权　杨昌树

西南交通大学出版社
·成　都·

内容提要

本书分为上、下两册. 下册内容包括：多元函数微分学及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、微分方程等五章.

本教材注重基础，取材优化，难易适度，叙述简明、清楚，便于教学和自学，可作为理工科应用型本科教材和参考书，也可供其他类型的本科生和专科生使用.

图书在版编目（CIP）数据

高等数学. 下册 / 张波汉，谭千蓉主编. 一成都：西南交通大学出版社，2008.3

21世纪高等教育规划教材

ISBN 978-7-81104-834-6

Ⅰ. 高… Ⅱ. ①张… ②谭… Ⅲ. 高等数学－高等学校－教材 Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 024391 号

21世纪高等教育规划教材

高等数学

（下册）

主编 张波汉 谭千蓉

*

责任编辑 张宝华

封面设计 本格设计

西南交通大学出版社出版发行

（成都二环路北一段 111 号 邮政编码：610031 发行部电话：028-87600564）

http: //press.swjtu.edu.cn

四川森林印务有限责任公司印刷

*

成品尺寸：170 mm×230 mm 印张：21.875

字数：414 千字 印数：1—3 000 册

2008 年 3 月第 1 版 2008 年 3 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-81104-834-6

定价：32.00 元

前　言

《高等数学》是理工科学生最重要的数学基础理论课程．为了适应高等教育的发展，根据国家教委对培养应用型本科人才的要求，我院具有多年丰富教学经验的教师编写了本教材．根据培养理工科应用型人才的要求和特点，本书的基础理论以必须、够用为度，以掌握概念、培养基本技能、强化应用、提高分析问题和解决实际问题的能力为重点，在保持课程自身的系统性、完整性、逻辑性的基础上作了适当削减．

作者在编写上强调微积分的基本思想与基本方法，着重处理好重点和难点．精选了一些例题和习题，难易适中，具有典型性和启发性．文字叙述简明易懂、详略得当，内容深入浅出、安排合理、便于自学．

本书的编写情况为：第一章、第二章由张波汉编写；第三章由杨昌树编写；第四章、第七章由徐丽君编写；第五章、第十二章由严天艳编写；第六章由李世权编写；第八章、第十一章由温松编写；第九章、第十章由谭千蓉编写．在编写过程中，攀枝花学院数理教学部的李思霖、唐琦琳、林宗兵、龚萍、刘裕君、韦建峰等老师也做了大量工作，在此一并致谢．

由于编者水平有限，错漏疏忽在所难免，恳请批评指正．

编　者

2008 年 1 月 18 日

目　　录

第八章　多元函数微分学及其应用

本章是一元函数微分学理论和应用在多元函数上的推广．在现实世界中，许多客观现象或过程的发生和发展都是受多种因素制约的，在数学上，就表现为一个变量与另外多个变量的相互依赖关系，由此需引入多元函数以及多元函数的微积分问题．一元函数的许多概念和定理都能相应的推广到多元函数上来，而且有些概念和定理还可以有进一步的发展．尽管多元函数的微分学与一元函数的微分学有许多共同点，但是两者之间也有许多差异．因此，学习时需要把前者与后者进行对比与分析．

本章主要讨论二元函数的微分学．这是因为，由一元函数到二元函数将会出现某些本质上的差异，进而产生新的问题．而由二元函数到二元以上的函数，就只是数量上的增加，理论可以类推．

第一节　多元函数的基本概念

一、平面点集

一元函数是在一维空间上讨论的，所应用的基本知识是区间，其中包括点集的构造、实数的连续性．而二元函数则是在二维空间，即在平面上讨论的，因此，需要介绍平面点集的构造．

1．平面点集的概念

将有序实数对(x,y)的集合$\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$称为二维空间，记为$R^2$．它的一个子集$E$，即平面上满足某个条件$P$的一切点构成的集合，称为平面点集$E$．按照这个说法，点集$E$是由条件$P$所确定的，不同的条件便产生了不同的点集，因此常把$R^2$中的条件$P$所确定的点集$E$，记为

$$E=\{(x,y)\mid (x,y)\text{满足条件 }P\}$$

例如，以原点为圆心、1 为半径的圆内部的所有点构成一个平面点集，记为

$$E=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$$

2．特殊的平面点集

（1）邻域（圆形邻域）．设 $P(a,b)$ 是 xOy 平面上的一个点，δ 是某一正数，以点 P 为中心、以 $\delta>0$ 为半径的圆内部的点 $P(x,y)$ 的全体，即

$$\{(x,y)\mid\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta\}$$

称为点 $P(a,b)$ 的 δ（圆形）邻域．并称 P 点为该邻域的中心，δ 为该邻域的半径，表示为 $U(P,\delta)$，即

$$U(P,\delta)=\{(x,y)\mid\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta\}$$

将

$$U(P,\delta)=\{(x,y)\mid |x-a|<\delta_1,|y-b|<\delta_2\}$$

称为方形邻域，且这两种邻域可以互相转化．

（2）内点、外点、边界点．设 E 是平面点集，P 是平面上任意一点，则点 P 与点集 E 之间必然存在以下三种关系之一：

① 如果存在点 P 的某个 δ 邻域 $U(P,\delta)$，使得 $U(P,\delta)\subset E$，则称 P 是 E 的内点（见图 8.1 中的点 P_1）．

② 如果存在点 P 的某个 δ 邻域 $U(P,\delta)$，且此邻域内的点都不属于 E，则称 P 是 E 的外点（见图 8.2 中的点 P_2）．

③ 如果在点 P 的任意邻域 $U(P,\delta)$ 内，既有点属于 E，同时又有点不属于 E，则称 P 是 E 的边界点（见图 8.2 中的点 P_3）．点集 E 的所有边界点的集合，称为 E 的边界．

注意：边界点不一定属于集合 E.

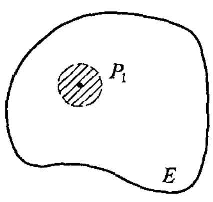


图 8.1

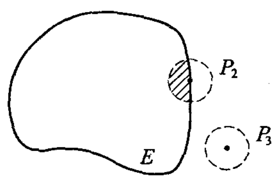


图 8.2

例 1 平面点集 $E=\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2\leqslant 4\}$ 是由小圆 $x^2+y^2=1$ 与大圆 $x^2+y^2=4$ 所围成的圆环内部的所有点及 $x^2+y^2=4$ 圆周上的点构成．满足条件 $x^2+y^2<1$ 和 $x^2+y^2>4$ 的点是 E 的外点；满足条件 $1<x^2+y^2<4$ 的点是 E

的内点；满足条件 $x^2+y^2=1$ 和 $x^2+y^2=4$ 的点是 E 的边界点，而后者属于 E，前者不属于 E（见图 8.3）.

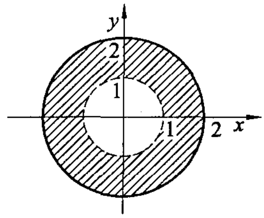


图 8.3

(3) 开集、闭集、连通集．如果点集 E 的点都是内点，则称 E 为开集．

例 2　集合 $E=\{(x,y)\mid 1<x<2,0<y<1\}$ 是开集．邻域是开集．

如果点集 E 是由它的内点和边界点构成的，则称 E 为闭集．

如果点集 E 内的任意两点，都可以用属于 E 的折线连接起来，且该折线上的点都属于 E，则称 E 为连通集．

(4) 区域（开区域）、闭区域．如果平面点集 E 是开集，并且是连通集，则称点集 E 是区域（或称开区域）．如果 E 是开区域加上它的边界点构成的集合，则称 E 是闭区域．

例 3　$E=\{(x,y)\mid x+y\geqslant 1\}$ 是闭区域（见图 8.4）；再如，例 2 为开区域．

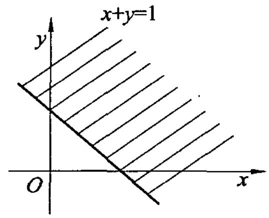


图 8.4

由定义可知，区域是具有连通性的，即区域内的任意两点都可以用完全落在该区域内的折线连接起来．

例 4　$E=\{(x,y)\mid x\neq 0,y\neq 0,x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$．该集合是一个开集，但不是一个连通集，因此不是一个区域．

(5) 有界区域与无界区域．如果区域 E 可以包含在某一个圆（或矩形）之内，则称 E 为有界区域；反之，则称 E 是无界区域．

前面针对平面点集所引入的概念，完全可推广到 n 维空间中．

3．n 维空间

我们用 $\mathbf{R}$，R^2，R^3 分别表示实数、有序二元数组 (x,y)、有序三元数组 (x,y,z) 的全体，它们分别对应于数轴、二维平面、三维立体空间．一般地，对于确定的自然数 n，称有序 n 元数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的全体为 n 维空间，记为 R^n．而称有序 n 元数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为 R^n 中的一个点，实数 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 称为该点的第 i 个坐标．

设 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 为 n 维空间 R^n 中的任意两点，则两点间的距离公式为

$$\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$$

二、多元函数的概念

1. 二元函数的定义

一元函数概念，仅仅揭示了量与量之间依赖关系中非常特殊的一类．然而在实际问题中，常常会遇到一个量随两个、三个或更多个量的变化而变化的情况．如：动能 $W=\frac{1}{2}mv^2$；三角形面积 $S=\frac{1}{2}bc\sin A$；教室内一点 $P(x,y,z)$ 在时刻 t 的温度变化情况 $T=T(x,y,z,t)$ 等．上述三例都是多元函数的实例．抽去其实际意义，保留它们的数量关系，则可看出它们都有一个共性——一个量与其他量之间存在内在的、本质的、必然的联系，这就是多元函数的概念．这里，仅给出二元函数的定义．

定义 8.1 在某一变化过程中，有三个变量 x,y,z，变量 x 和 y 的变化域为 D. 如果 D 是非空点集，对于 D 中的每一对值 (x,y)，按照某一对应关系 f，变量 z 总有唯一确定的数值与之对应，则称 f 是变量 x 和 y 的**二元函数**，通常记为

$$z=f(x,y) \text{或} z=z(x,y)$$

其中，x 和 y 称为**自变量**，z 称为**因变量**，D 称为函数的**定义域**．

与自变量的一对值 (x,y) 对应的因变量 z 的值，也称为函数值．函数值的全体所构成的集合称为函数 f 的**值域**．

注意：

(1) 和一元函数一样，上述定义包含两个要点：一是对应关系；二是定义域．后者在不致发生误解的情况下，常略去不写．

(2) 两个自变量 x 与 y 互相独立、彼此无关，即这两个自变量在它们的变化范围内可以各自任意取值，构成一对一对的有序实数对．

(3) 对二元函数 $z=f(x,y)$，由于自变量的一对数值 (x,y) 对应平面上的一个点 P，所以也称 z 是点 P 的函数，简记为

$$z=f(P)$$

采用这种术语很有好处，一方面叙述简单，另一方面便于推广．

(4) 关于多元函数的概念，仍然主要研究以下三个方面的问题：

① 求函数的定义域，即揭示函数的存在域．

② 建立函数关系．

③ 求函数值．

类似地，可以定义三元函数 $u=f(x,y,z)$，$(x,y,z)\in D$ 以及三元以上的函数．通常把上述定义中的平面点集 D 换成 n 维空间 R^n 内的点集 D，则称 n 元函数为

$$y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n),\quad (x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D$$

其中，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 称为自变量，y 称为因变量，D 称为定义域．当 $n\geqslant 2$ 时，n 元函数统称为多元函数．

关于多元函数的定义域，与一元函数类似，可约定：一般地，由解析式给出的多元函数 $u=f(P)$ 的定义域，就是使这个算式有意义的自变量所确定的点集．

例 5　求 $f(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2}+\ln(x^2+y^2-1)$ 的定义域．

解　$\sqrt{4-x^2-y^2}$ 的定义域为

$$4-x^2-y^2\geqslant 0$$

即

$$x^2+y^2\leqslant 4$$

而 $\ln(x^2+y^2-1)$ 的定义域为

$$x^2+y^2-1>0$$

即

$$x^2+y^2>1$$

所以，其公共部分是

$$1<x^2+y^2\leqslant 4$$

即由圆 $x^2+y^2=1$ 与 $x^2+y^2=4$ 所围成的圆环内部及圆周 $x^2+y^2=4$ 上的点集（见图 8.3）．

例 6　求 $z=\dfrac{\sin(x+y)}{x-y}$ 的定义域．

解　由 $x-y\neq 0$，得 $y\neq x$，因此 z 的定义域是平面内除去直线 $y=x$ 以外的部分（见图 8.5）．

注意：它是开集，不是区域．

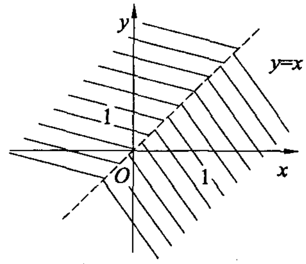


图 8.5

2．二元函数的几何意义

函数的几何图像是帮助我们理解概念，掌握理论的直观模型．

设二元函数 $z=f(x,y)$ 定义在区域 D 上，若对任一点 $P(x,y)\in D$，对应唯一一个数值 $z=f(x,y)$，则在三维空间 R^3 中唯一确定了一个点 $M(x,y,f(x,y))$．点集 $\{M(x,y,z)\mid(x,y)\in D,z=f(x,y)\}$ 称为函数 $z=f(x,y)$ 的图形（见图 8.6）．我们经常遇到的二元函数 $z=f(x,y)$ 的图形的绝大多数都是三维空间的曲面，因此，也把等式 $z=f(x,y)$ 叫做曲面的方程．把这种情况又称为满足方程 $z=f(x,y)$ 的点在曲面上．

如果三维空间有一曲面 S，且平行于 z 轴的直线与 S 至多交于一点，这时曲面 S 就确定了一个二元函数：把这种情况又称为在曲面上的点满足方程．

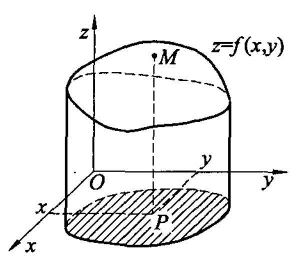


图 8.6

曲面 S 在 xOy 平面上的投影区域就是该函数的定义域.

例 7 画出函数 $z=x^2+2y^2$ 的草图(见图 8.7).

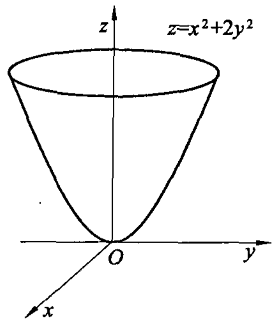


图 8.7

三、二元函数的极限定义

二元函数的极限可分为自变量趋于定点与自变量趋于无穷远处时的极限这样两种情形,下面只讨论二元函数 $z=f(x,y)$ 在 $x\to x_0$,$y\to y_0$(也记为 $P\to P_0$)时的极限,因为这种情况最常用.

已经知道,在一元函数中,极限概念刻画了当自变量趋于某一定点时,函数值的变化趋势.同样,对于二元函数所要考虑的也是当代表自变量的动点 $P(x,y)$ 趋向于定点 $P_0(x_0,y_0)$ 时,函数 $z=f(x,y)$ 的变化趋势,即二元函数的极限问题.

值得注意的是,在二元函数的极限问题中,自变量的变化情况远比一元函数复杂.这是因为求一元函数 $y=f(x)$ 在定点 x_0 的极限时,动点 x 向 x_0 趋近的方式只有两种,即只能从左侧与右侧两个方向趋近,而二元函数 $z=f(x,y)$ 的动点 $P(x,y)$ 是沿着不同的途径从四面八方向定点 $P_0(x_0,y_0)$ 趋近的.

1. 概　念

定义 8.2 设函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 上的一点 $P_0(x_0,y_0)$ 附近有定义(在 P_0 点可以没有定义),A 是一确定的常数.如果动点 $P(x,y)$ 沿任意路径趋近于定点 $P_0(x_0,y_0)$ 时,对应的函数值 $f(x,y)$ 总是无限趋近于常数 A,则称 A 是函数 $f(x,y)$ 当 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$ 时的极限.记为

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A \quad 或 \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$$

下面再用“ε-δ”语言给出二元函数极限的定量定义.

定义 8.2′　设函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 中的一点 $P_0(x_0,y_0)$ 附近有定义(在 P_0 点可以没有定义)，A 是一确定的常数．若对于任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，对任意一点 $P(x,y)\in D$，当 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时，总有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

恒成立，则称 A 是函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处当 $x\to x_0$，$y\to y_0$ 时的极限. 记为

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$$

像这样定义的二元函数极限又称为二重极限．

关于二元函数的极限概念，还应当理解以下几点：

(1) 不研究函数 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 点处的状态，仅研究点 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$ 的过程中，函数的变化趋势，即函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某个邻域内有定义，但不要求函数在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处有定义．

(2) 极限值 A 是一个确定的常数，它与 $P(x,y)$ 趋近 $P_0(x_0,y_0)$ 的方式无关．也就是说，$P(x,y)$ 以任何方式趋近于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，函数都无限接近于 A. 如果动点 $P(x,y)$ 沿着特殊路径趋近于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，函数趋向于不同的常数，则说明二元函数 $f(x,y)$ 在此处无极限．

(3) 一元函数有左、右极限的概念而二元函数则没有．如果动点 $P(x,y)$ 沿着某一条或几条特殊路径(如沿着一条定直线或定曲线)趋近于点 $P_0(x_0,y_0)$，即使这时函数 $f(x,y)$ 有极限，我们也不能由此断定函数极限存在．

下面对二元函数极限定义的描述作一推广：

如果把定义 8.2 中的函数分别理解为一元、二元或三元函数，同时把 D 看做是数轴上的、平面上的或空间内的点集，那么定义 8.2 所表达的分别就是一元、二元或三元函数的极限．

2. 举　例

例 8　设函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

讨论当 $P(x,y)\to P_0(0,0)$ 时 $f(x,y)$ 的极限．

解　在 x 轴上，$z=f(x,0)=0$，故当点 $P(x,y)$ 沿着 x 轴趋近于 $P_0(0,0)$ 时，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=0}} f(x,y)=0$.

在 y 轴上，$z=f(0,y)=0$，故当点 $P(x,y)$ 沿着 y 轴趋近于 $P_0(0,0)$ 时，$\lim\limits_{\substack{x=0\\y\to 0}} f(x,y)=0$.

但 $f(x,y)$ 在点 $P_0(0,0)$ 处并没有极限．因为当点 $P(x,y)$ 沿着直线 $y=kx$（过原点的直线）趋近于 $P_0(0,0)$ 时，有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{kx^2}{x^2+(kx)^2}=\frac{k}{1+k^2}$$

因此，随着直线的斜率 k 的改变，函数趋近于不同的实数（并非定数），这说明函数极限不存在．

四、极限的四则运算性质

1．运算性质

二元函数的极限运算法则与一元函数类似，简述如下：

若函数 $f(x,y)$ 与 $g(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 存在极限，则

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}[f(x,y)\pm g(x,y)]=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)\pm\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}g(x,y)$.

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}[f(x,y)\cdot g(x,y)]=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)\cdot\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}g(x,y)$.

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}\dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}=\dfrac{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)}{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}g(x,y)}$ （其中 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}g(x,y)\neq 0$）.

2．举　例

例 9　求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 1}}\dfrac{\cos(xy)+1}{1-2x+y^2}$.

解　$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 1}}\dfrac{\cos(xy)+1}{1-2x+y^2}=\dfrac{1+1}{1+1^2}=1$.

例 10　求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$.

解　令 $u=x^2+y^2$，当 $x\to 0,y\to 0$ 时，$u\to 0$，所以

$$\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}=\lim_{u\to 0}u\sin\frac{1}{u}=0$$

五、二元函数的连续性

1. 函数连续的概念

同一元函数的情形一样，二元函数在一点连续的概念也是研究函数连续性的基础．下面首先介绍连续的定义，它是一元函数连续定义的直接推广．

定义 8.3 设函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 上有定义，点 $P_0(x_0,y_0)\in D$，若有

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 P_0 处连续．也就是说，极限值等于函数值，这与一元函数一致．

二元函数在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处连续，以下三个条件要同时成立．

(1) 函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内有定义，且在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处也有定义；

(2) 函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处有极限（沿所有方向趋近的极限值都相等）；

(3) 函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处的极限值等于该点的函数值，即

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

条件(3)其实包含了条件(1)、(2)，所以，连续的本质仍是：极限值等于函数值．

定义 8.4 如果函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 上的每一点都连续，则称函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 上连续．

下面介绍间断点的概念．

若函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处不连续，则称点 P_0 是函数 $z=f(x,y)$ 的不连续点或间断点．

例如 函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

当 $P(x,y)\to(0,0)$ 时，$f(x,y)$ 的极限不存在（见例 8），故点 $O(0,0)$ 为 $z=f(x,y)$ 的一个间断点．

2. 举 例

例 11 讨论函数

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\cdot\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$$

在原点(0,0)处的连续性.

解 因为

$$0\leqslant\left|xy\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right|=|xy|\cdot\left|\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right|\leqslant|xy|$$

显然有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}|xy|=0$$

故有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}xy\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=0=f(0,0)$$

所以,$f(x,y)$在原点(0,0)处连续.

注意:曲面的间断点可以是一条曲线.例如,$z=\dfrac{2x}{y-x^2}$的间断点为 $y=x^2$.

3. 连续函数的运算

可以指出,二元连续函数的运算法则与一元连续函数类似.根据极限运算法则,可以证明多元连续函数的和、差、积均为连续函数;在分母不为零处,连续函数的商也是连续函数;多元连续函数的复合函数也是连续函数.

定理 8.1 如果函数 $f(x,y)$与 $g(x,y)$都在点 $P_0(x_0,y_0)$处连续,则函数

(1) $f(x,y)\pm g(x,y)$;

(2) $f(x,y)\cdot g(x,y)$;

(3) $\dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}$ $(g(x_0,y_0)\neq 0)$;

也在点 $P_0(x_0,y_0)$处连续.

定理 8.2(多元复合函数的连续性) 若函数 $u=\varphi(x,y)$,$v=\psi(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$处连续,并且函数 $f(u,v)$在点$(u_0,v_0)=(\varphi(x_0,y_0),\psi(x_0,y_0))$连续,则复合函数 $f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$在点 $P_0(x_0,y_0)$处连续.

例 12 求极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$.

解
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy(\sqrt{xy+1}+1)}{(xy+1)-1^2}$$
$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(\sqrt{xy+1}+1)=2.$$