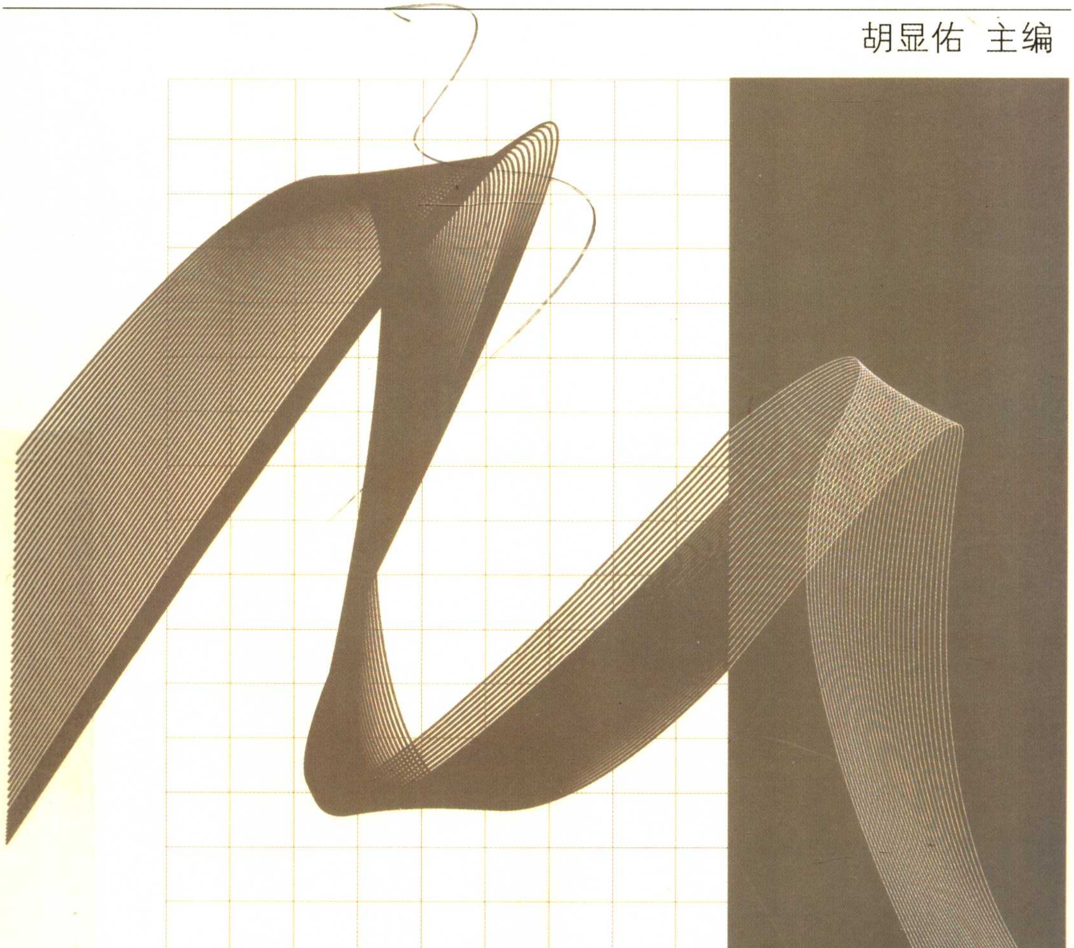
高等学校经济管理类
数学基础课程系列教材

经济应用数学基础（二）

线性代数

胡显佑 主编



高等教育出版社

高等学校经济管理类数学基础课程系列教材

经济应用数学基础(二)

线性代数

胡显佑　主编

高等教育出版社

内容提要

本书是“高等学校经济管理类数学基础课程系列教材”中的《经济应用数学基础（二）线性代数》分册，根据教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会制定的“经济管理类数学基础课程教学基本要求”和最新颁布的《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》的内容和要求编写而成。

本书包括五章内容：矩阵、行列式、线性方程组与向量、矩阵的特征值和特征向量、二次型。在编写中力求内容系统、重点突出、由浅入深、通俗易懂，充分体现教学的适用性。

本书可作为高等学校经济管理类专业线性代数课程的教材或教学参考书。

图书在版编目（CIP）数据

经济应用数学基础．2，线性代数/胡显佑主编．—北京：高等教育出版社，2008．4
ISBN 978-7-04-023906-5

Ⅰ．经…　Ⅱ．胡…　Ⅲ．①经济数学-高等学校-教学参考资料②线性代数-高等学校-教学参考资料　Ⅳ．F224．0 0151．2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 029226 号

策划编辑　马　丽　　**责任编辑**　崔梅萍　　**封面设计**　张志奇
版式设计　张　岚　　**责任校对**　王效珍　　**责任印制**　朱学忠

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	人民教育出版社印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2008年4月第1版
印　　张	11	印　　次	2008年4月第1次印刷
字　　数	200 000	定　　价	12.10元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　23906-00

前　言

“高等学校经济管理类数学基础课程系列教材”是根据教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会制定的“经济管理类数学基础课程教学基本要求”编写而成的。本系列教材共有三个分册:《经济应用数学基础(一)微积分》,《经济应用数学基础(二)线性代数》和《经济应用数学基础(三)概率论与数理统计》。

为了保证本系列教材的教学适用性,在编写过程中,我们对国内外近年来出版的同类教材的特点进行了比较和分析,在教材体系、内容安排和例题配置等方面吸取了它们的优点。尤其是在教材内容安排上进行了精当的取舍,避免了偏多、偏深的弊端。并根据目前教学学时普遍减少的情况,保证教材难易适中,同时为培养学生数学素质与应用能力,教材中又为教师在教学过程中的补充和发挥留有余地。此外,我们还参考了最新颁布的《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》的要求,力求教材的体系、内容既符合数学学科本身的特点,又兼顾报考研究生的学生的需求。因此,在本系列教材中,我们着重注意了如下问题:

1. 尽可能做到简明扼要,深入浅出,语言准确,易于学生阅读。在引入概念时,注意以学生易于接受的方式叙述。略去教材中一些非重点内容的定理证明,而以例题进行说明;教材中的重要定理、法则均给出了严格证明。个别较为冗长的定理证明则标示“*”号,教学时可根据实际情况处理,略去不讲或以例题说明都不会影响教材的系统性。

2. 力求例题、习题配置合理,难易适度,形式多样。教材每章后的习题均分为(A),(B)两组,其中(A)组习题反映了本科经济管理类专业数学基础课的基本要求,(B)组习题由两部分组成,其中的选择题部分可用作复习、总结,而解答题和证明题部分综合性较强,可供学有余力或有志报考硕士研究生的学生练习。各册书后均附有参考答案。

《经济应用数学基础(二)线性代数》分册,考虑到目前线性代数课时较少,没有编入有关线性代数应用的内容,有兴趣的读者可以参考文献[4]~[7],这些文献较详细地介绍了线性代数在经济学、计算机图形学、编码和工程技术中的应用。本书所需学时约为36学时(不含习题课)。

本系列教材的出版得到了高等教育出版社的大力支持,在此表示衷心感谢。

虽然我们希望编写出一套质量较高、适合当前教学实际需要的教材，但限于水平，教材中仍有不少未尽人意之处，敬请读者不吝指正。

编　者

2008年1月25日

目　　录

第一章 矩 阵

矩阵概念和理论的创建和发展源于求解线性方程组.矩阵理论作为一种基本工具,在现代数学的各个分支有广泛的应用.特别是计算机科学的迅速发展,使得矩阵理论和方法在经济管理、科学技术等诸多领域得到重要应用.

本章将引入矩阵的概念,并系统地介绍矩阵的运算、矩阵的初等变换和逆矩阵等基本理论.

§1.1 矩阵的概念

在科学实验、经济管理等领域,我们经常用列表的方式来处理相关的数据.

例 1.1 某公司下属的两个工厂 A_1,A_2 可生产型号为 B_1,B_2,B_3 的数码照相机.2007 年第一季度的产量(单位:千台)如表 1.1.

表 1.1

工厂 \ 产量 \ 型号	B_1	B_2	B_3
A_1	3	4.5	8
A_2	2	5.5	0

表中的数据按原顺序排列,可以记作

$$\begin{pmatrix} 3 & 4.5 & 8 \\ 2 & 5.5 & 0 \end{pmatrix}$$

这样的矩形数表就称为一个 2 行 3 列矩阵,其中横排、纵排分别称为该矩阵的行和列.

例 1.2 博弈论(Game Theory)是研究竞争、冲突问题的数学理论.目前,博弈论已成为现代经济学研究的重要理论工具.下面的问题是一个简化的博弈模型:两个飞机制造公司 A 和 B 为争夺大型飞机市场展开了激烈的竞争.假设在一段时间内,两家公司都开发生产某一类型飞机,由于市场容量有限,则都将亏损 25 亿美元;如果只有一家公司开发生产这一类型飞机,则该公司可获利润 200 亿美元.每一公司可选择的策略(行动方案)均为“开发生产”或“不开发生

产”. 两个公司选取策略后的利润如表 1.2.

表 1.2

		B	
		生产	不生产
A	生产	(−25, −25)	(200,0)
	不生产	(0,200)	(0,0)

由此可用矩形数表表示公司 A 和 B 在不同策略选择下的赢得:

$$\begin{pmatrix} -25 & 200 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 和 \quad \begin{pmatrix} -25 & 0 \\ 200 & 0 \end{pmatrix}$$

这是两个 2 行 2 列矩阵,称为公司 A,B 的赢得矩阵(支付矩阵).

例 1.3 在中学代数中,我们已学习了求解多元线性方程组. 例如,解三元线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 = -7 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$$

将此方程组中每一未知数的系数及常数项按原有相对位置排列成一个矩形数表,就得到

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & -7 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

这一矩形数表称为该线性方程组的增广矩阵.

上面的例子表明,科学技术、经济管理的许多问题都需要利用矩形数表来表达其中的相互关系,由此可抽象出矩阵的概念.

定义 1.1 由 $m \times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 组成一个 m 行 n 列的矩形数表,称为一个 $m \times n$ 的**矩阵**,记作

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

通常用大写字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 表示矩阵,也可以记作 $\boldsymbol{A}_{m \times n}$ 或 $(a_{ij})_{m \times n}$ 以标明行数 m 与列数 n,其中 a_{ij} 称为矩阵第 i 行、第 j 列的**元**. 在本书中矩阵的元均为实数,以后不再一一说明.

当矩阵的行数与列数都等于 n 时,称该矩阵为 n 阶矩阵或 n 阶方阵. n 阶矩

阵 $\boldsymbol{A}$ 可记为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

n 阶矩阵从左上角到右下角的对角线上的元 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 称为**主对角线元**.

特别地，我们把一阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{11})$ 当做普通数字 a_{11} 处理. 即一阶矩阵 $\boldsymbol{A}=a_{11}$.

在 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中，若主对角线以外的元都为零，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为**对角矩阵**，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

为了简便，n 阶对角矩阵常记为 $\boldsymbol{A}=\operatorname{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$. 例如，三阶对角矩阵

$$\operatorname{diag}(-1,2,3)=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

特别地，在对角矩阵中，当主对角线元均为 1 时，称该矩阵为**单位矩阵**，记作 $\boldsymbol{E}$，即

$$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

必要时在其右下角标明阶数，例如，

$$\boldsymbol{E}_3=\boldsymbol{E}_{3\times 3}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

如果 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 中主对角线下方元都等于零，即 $i>j$ 时，有 $a_{ij}=0(i,j=1,2,\cdots,n)$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶上三角形矩阵.

如果 n 阶矩阵 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 中主对角线上方元都等于零，即 $i<j$ 时，有 $a_{ij}=0(i,j=1,2,\cdots,n)$，则称 $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶下三角形矩阵.

例如，下面的矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别为 3 阶上三角形矩阵和下三角形矩阵：

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&3\\0&1&-1\\0&0&4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&-1&0\\5&3&-2\end{pmatrix}$$

所有元全为零的 $m\times n$ 矩阵,称为零矩阵.记作 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{O}$.一般,仅在容易产生误解时才标明零矩阵的阶数.例如:

$$\boldsymbol{O}_{2\times3}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{O}_{3\times3}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

如果矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的行数相同,列数也相同,则称 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同型矩阵.

定义 1.2 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n},\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 为同型矩阵,如果对于任意 $i,j(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$,都有 $a_{ij}=b_{ij}$,则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相等.记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

例 1.4 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a+b&b-2c\\a+2d&a-b\end{pmatrix}$,如果 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$,求 a,b,c,d 的值.

解 由已知条件,有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$,即

$$\begin{pmatrix}a+b&b-2c\\a+2d&a-b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

于是,$a+b=1,a-b=1,b-2c=0,a+2d=0$.解得 $a=1,b=0,c=0,d=-\dfrac{1}{2}$.

§1.2 矩阵的运算

对于从数学问题和实际问题抽象出的矩阵,在什么条件下可以进行何种运算,并具有合理的实际意义和理论价值,这是本节要研究的中心问题.

一、矩阵的加法

定义 1.3 设有两个同型矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n},\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$.将它们的对应元相加,所得到的 $m\times n$ 矩阵称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的和,记作 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.即

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij})_{m\times n}+(b_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$$

进一步规定:矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 的负矩阵为 $-\boldsymbol{A}=(-a_{ij})_{m\times n}$,由此可以定义矩阵减法:

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$$

即,如果 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n},\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$,则

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}$$

例 1.5 将 §1.1 的例 1.1 中两个工厂 A_1,A_2 在第一季度生产的各类型号的照相机(单位:千台)用矩阵 $\boldsymbol{A}$ 表示

$$A=\begin{pmatrix}3 & 4.5 & 8\\ 2 & 5.5 & 0\end{pmatrix}$$

在第二季度生产的各类型号的照相机用矩阵 $\boldsymbol{B}$ 表示：

$$B=\begin{pmatrix}3.5 & 4.5 & 9\\ 2 & 6 & 1\end{pmatrix}$$

则

$$\begin{aligned}A+B&=\begin{pmatrix}3 & 4.5 & 8\\ 2 & 5.5 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3.5 & 4.5 & 9\\ 2 & 6 & 1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}3+3.5 & 4.5+4.5 & 8+9\\ 2+2 & 5.5+6 & 0+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6.5 & 9 & 17\\ 4 & 11.5 & 1\end{pmatrix}\\B-A&=\begin{pmatrix}3.5 & 4.5 & 9\\ 2 & 6 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 4.5 & 8\\ 2 & 5.5 & 0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}3.5-3 & 4.5-4.5 & 9-8\\ 2-2 & 6-5.5 & 1-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.5 & 0 & 1\\ 0 & 0.5 & 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

不难看出，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 表示两个工厂在前两个季度各型号照相机的总产量；$\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}$ 表示两个工厂第二季度比第一季度增产的各型号照相机的数量.

根据矩阵加法的定义，只有同型矩阵才能相加（减），且矩阵相加就是它们的对应元相加. 由于数字相加满足交换律、结合律. 不难得到矩阵加法满足以下运算律：

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$（交换律）；

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$（结合律）；

(3) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$；

(4) $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$.

由性质(3)、(4)可以看出，零矩阵在矩阵代数中起着普通数 0 的作用.

二、数乘矩阵

定义 1.4 用数 k 乘以矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 中的每一个元所得到的 m 行 n 列矩阵称为**数 k 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的积**，记作 $k\boldsymbol{A}=(ka_{ij})_{m\times n}$，即

$$kA=\begin{pmatrix}ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n}\\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn}\end{pmatrix}.$$

根据定义 1.4，数与矩阵的乘法满足以下运算律：

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 $m\times n$ 矩阵，k,p 是两个常数，则

(1) $k(pA)=(kp)A$;

(2) $k(A+B)=kA+kB$;

(3) $(k+p)A=kA+pA$;

(4) $1A=A, 0A=O$.

例 1.6 在本节的例 1.5 中,如果该公司计划在第三季度各厂生产的各型号照相机产量均比上一季度提高 10%,则第三季度各工厂生产的各型号照相机的数量(单位:千台)可表示为

$$(1+10\%)\boldsymbol{B}=1.1\begin{pmatrix}3.5 & 4.5 & 9\\ 2 & 6 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3.85 & 4.95 & 9.9\\ 2.2 & 6.6 & 1.1\end{pmatrix}$$

例 1.7 已知矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2 & 4 & 6 & -2\\ -4 & 8 & 4 & 0\end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3 & 4 & -3 & 2\\ 5 & -3 & 2 & 4\end{pmatrix}$$

如果矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足关系式 $3\boldsymbol{X}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{X}+2\boldsymbol{B}$. 求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

解 由 $3\boldsymbol{X}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{X}+2\boldsymbol{B}$,可得 $2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}$. 所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}&=\frac{1}{2}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2 & 4 & 6 & -2\\ -4 & 8 & 4 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 4 & -3 & 2\\ 5 & -3 & 2 & 4\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3 & -1\\ -2 & 4 & 2 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 4 & -3 & 2\\ 5 & -3 & 2 & 4\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}2 & 6 & 0 & 1\\ 3 & 1 & 4 & 4\end{pmatrix}\end{aligned}$$

三、矩阵乘法

例 1.8 某化工公司下属的两个工厂都生产三种产品 B_1, B_2, B_3. 在 2007 年第一季度各厂生产的产品的数量(单位:t)如表 1.3.

表 1.3

产品 / 产量/t / 工厂	B_1	B_2	B_3
A_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}
A_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}

如果设产品 B_j 的出厂价格为 $p_j(j=1,2,3)$(单位:万元/吨),生产 B_j 的平均能耗为 $q_j(j=1,2,3)$(单位:kJ/t).

设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 表示该季度各工厂生产各种产品的数量;矩阵 $\boldsymbol{B}$ 表示各种产品的单位价格和单位能耗;矩阵 $\boldsymbol{C}$ 表示各工厂在第一季度的总收益和总能耗. 即

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}p_1&q_1\\p_2&q_2\\p_3&q_3\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}\\c_{21}&c_{22}\end{pmatrix}$$

B_1　B_2　B_3　　单位价格　单位能耗　　总收益　总能耗

不难看出矩阵 A,B,C 的元之间有下述关系：

$$\begin{pmatrix}a_{11}p_1+a_{12}p_2+a_{13}p_3 & a_{11}q_1+a_{12}q_2+a_{13}q_3\\ a_{21}p_1+a_{22}p_2+a_{23}p_3 & a_{21}q_1+a_{22}q_2+a_{23}q_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}\\c_{21}&c_{22}\end{pmatrix}$$

即 $c_{i1}=a_{i1}p_1+a_{i2}p_2+a_{i3}p_3\,(i=1,2)$；$c_{i2}=a_{i1}q_1+a_{i2}q_2+a_{i3}q_3\,(i=1,2)$.

矩阵 C 称为矩阵 A,B 的乘积，记作 $C=AB$. 一般，可引入

定义 1.5　设矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times s}$，$B=(b_{ij})_{s\times n}$，矩阵 A 与 B 的**乘积**定义为 $m\times n$ 矩阵 $C=(c_{ij})_{m\times n}$，其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}\quad(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)\tag{1.1}$$

记作 $C=AB$.

由定义可以看出：只有在矩阵 A 的列数与矩阵 B 的行数相同时，AB 才有意义. $C=AB$ 仍是一个矩阵，其行数与 A 的行数相同，其列数与 B 的列数相同. 为了便于记忆，矩阵 A 与 B 的乘法可直观地表示如下：

$$\begin{array}{c}\\ \\ \text{第 } i \text{ 行}\\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1s}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ \boxed{a_{i1}}&\boxed{a_{i2}}&\boxed{\cdots}&\boxed{a_{is}}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{ms}\end{pmatrix}\begin{array}{c}\begin{pmatrix}b_{11}&\cdots&\boxed{b_{1j}}&\cdots&b_{1n}\\ b_{21}&\cdots&\boxed{b_{2j}}&\cdots&b_{2n}\\ \vdots&&\boxed{\vdots}&&\vdots\\ b_{s1}&\cdots&\boxed{b_{sj}}&\cdots&b_{sn}\end{pmatrix}\\ \text{第 } j \text{ 列}\end{array}$$

$$=\begin{pmatrix}c_{11}&\cdots&c_{1j}&\cdots&c_{1n}\\ \vdots&&\vdots&&\vdots\\ c_{i1}&\cdots&\boxed{c_{ij}}&\cdots&c_{in}\\ \vdots&&\vdots&&\vdots\\ c_{m1}&\cdots&c_{mj}&\cdots&c_{mn}\end{pmatrix}$$

由上式或(1.1)式可以看出：乘积 C 的位于第 i 行、第 j 列的元 c_{ij} 等于 A 的第 i 行与 B 的第 j 列的对应元乘积之和.

例 1.9　设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 2 & 3 & -1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & 3\\ -5 & -1\end{pmatrix}$$

求 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$.

解

$$\begin{aligned}\boldsymbol{AB}&=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 2 & 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & 3\\ -5 & -1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}(-1)\times(-2)+0\times1+2\times(-5) & (-1)\times4+0\times3+2\times(-1)\\ 2\times(-2)+3\times1+(-1)\times(-5) & 2\times4+3\times3+(-1)\times(-1)\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-8 & -6\\ 4 & 18\end{pmatrix}\end{aligned}$$

类似地,有

$$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & 3\\ -5 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 2 & 3 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 12 & -8\\ 5 & 9 & -1\\ 3 & -3 & -9\end{pmatrix}$$

由例 1.9 可以看出,矩阵乘法一般不满足交换律,即当 $\boldsymbol{AB}$ 有意义时,$\boldsymbol{BA}$ 不一定有意义;即使 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$ 都有意义,$\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$ 也不一定相等.通常,当 $\boldsymbol{AB}$ 有意义时称 $\boldsymbol{A}$ 左乘矩阵 $\boldsymbol{B}$ 或称 $\boldsymbol{B}$ 右乘矩阵 $\boldsymbol{A}$.

例 1.10 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -3 & 5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & 1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

试验证 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{BC}$.由此例你可得到什么结论?

解

$$\boldsymbol{AC}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -3 & -3\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{BC}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -3 & -3\end{pmatrix}$$

所以 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{BC}$.

由此可知,当 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{BC}$,且 $\boldsymbol{C}\neq\boldsymbol{O}$ 时,一般不能得到 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$ 的结论.即矩阵乘法一般不满足消去律.

例 1.11 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 6 & 3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & -3\\ -2 & 6\end{pmatrix}$$

求 $\boldsymbol{AB}$,$\boldsymbol{AE}$.

解

$$AB=\begin{pmatrix}4&2\\6&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-3\\-2&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$AE=\begin{pmatrix}4&2\\6&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&2\\6&3\end{pmatrix}=A$$

由此例可知:即使矩阵 $A\neq O,B\neq O$,也可能得到 $AB=O$,或者说,当 $AB=O$ 时,一般不能得出 $A=O$ 或 $B=O$ 的结论.

由 $AE=A$ 可以看出:用单位矩阵右乘 A 仍等于 A.类似可验证:用单位矩阵左乘 A,仍等于 A.即,在矩阵乘法中,单位矩阵与数 1 在数的乘法中的作用类似.

例 1.12 如果两个 n 阶矩阵 A,B 满足 $AB=BA$,则称 A 与 B 是可换的,设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$.求所有与 A 可换的矩阵.

解 设矩阵 B 与 A 可换,则 $AB=BA$.由此可知 B 必为 2 阶矩阵.设

$$B=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{pmatrix}$$

于是

$$AB=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{11}+2x_{21}&x_{12}+2x_{22}\\x_{21}&x_{22}\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{11}&2x_{11}+x_{12}\\x_{21}&2x_{21}+x_{22}\end{pmatrix}$$

由 $AB=BA$,得方程组

$$\begin{cases}x_{11}+2x_{21}=x_{11}\\x_{12}+2x_{22}=2x_{11}+x_{12}\\x_{21}=x_{21}\\x_{22}=2x_{21}+x_{22}\end{cases}$$

解得 $x_{11}=x_{22},x_{21}=0$.取 $x_{11}=x_{22}=a,x_{12}=b$,则所有与 A 可换的矩阵为

$$B=\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}\ (a,b\text{ 为任意常数})$$

矩阵乘法与数的乘法满足以下运算律:

(1) 结合律 $(AB)C=A(BC)$;

(2) 左分配律 $A(B+C)=AB+AC$;

右分配律 $(B+C)D=BD+CD$;

(3) 对任意常数 k,

$$k(AB)=(kA)B=A(kB)$$

(4) $AO=O,OA=O$;

(5) 对任意的矩阵 $A_{m\times n}$,有

$$E_mA_{m\times n}=A_{m\times n},A_{m\times n}E_n=A_{m\times n}$$

上述运算律均可利用矩阵乘法定义直接验证,请读者自行证明.

由于矩阵乘法满足结合律,因此对于方阵可以定义矩阵的幂:

设 A 是一个 n 阶矩阵,对于正整数 k,

$$A^k=\underbrace{AA\cdots A}_{k个}$$

称为 A 的 k 次幂.规定 $A^0=E$.

容易证明:对于任意的正整数 k,l,有

$$A^kA^l=A^{k+l},(A^k)^l=A^{kl}$$

但应注意:由于矩阵乘法不满足交换律,所以 $(AB)^k$ 一般不等于 A^kB^k.此外,如果 $A^k=O$,也不一定有 $A=O$.例如,设

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\neq O$$

而

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

同时,由于矩阵乘法不满足交换律,中学代数中的乘法公式(或因式分解公式)对矩阵一般都不成立.例如,一般 $(A+B)(A-B)\neq A^2-B^2$,$(A\pm B)^2\neq A^2\pm 2AB+B^2$,等等.然而,如果 n 阶矩阵 A 与 B 可交换,即 $AB=BA$ 时,则有

$$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$$

$$(A\pm B)^2=A^2\pm 2AB+B^2$$

$$(A+B)^m=A^m+C_m^1A^{m-1}B+\cdots+C_m^{m-1}AB^{m-1}+B^m$$

四、矩阵的转置

定义 1.6 将 $m\times n$ 矩阵 A 的行与列互换,得到的 $n\times m$ 矩阵,称为矩阵 A 的转置矩阵.记作 A^{T} 或 A'.即如果

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix},则 A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1}\\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

例如,设

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -4\\ -5 & 2 & -1\end{pmatrix},则 A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}2 & -5\\ 1 & 2\\ -4 & -1\end{pmatrix}$$