西安交通大学研究生教育系列教材

数学物理方程
Hilbert空间方法

李开泰 马逸尘 编著

科学出版社
www.sciencep.com

西安交通大学研究生教育系列教材

数学物理方程
Hilbert 空间方法

李开泰　马逸尘　编著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书内容包含两个部分：一部分内容包括椭圆边值问题的变分原理、变分逼近理论和方法、发展方程的半群理论和方法；另一部分内容是关于物理力学中重要方程的讨论，如流体力学的 Navier-Stokes 方程、弹性力学的 Navier-Lamé 方程、电磁场的 Maxwell 方程等，并讨论了这些方程的背景、弱解和强解的存在唯一、解的吸引子、解的渐近行为以及相应的迭代逼近方法和理论等.阅读本书需要具备广义函数和 Sobolev 空间理论、泛函分析、初等的偏微分方程理论和方法以及数理方程等基础知识.

本书可以作为计算数学、应用数学以及力学和物理相关专业的研究生教材，对从事数学、物理、力学研究的学者也有很好的参考价值.

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方程 Hilbert 空间方法/李开泰，马逸尘编著.—北京：科学出版社，2008

(西安交通大学研究生教育系列教材)

ISBN 978-7-03-020144-7

Ⅰ.数… Ⅱ.①李…②马… Ⅲ.数学物理方程-希尔伯特空间-研究生-教材 Ⅳ.O175.24

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 009068 号

责任编辑：吕 虹 赵彦超/责任校对：陈玉凤

责任印制：赵德静/封面设计：王 浩

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008 年 4 月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2008 年 4 月第一次印刷 印张：21 1/2

印数：1—3 000 字数：413 000

定价：56.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈新欣〉)

前　言

数学物理方程是数学中最为活跃的分支之一,是数学和物理学中很多内容的基础,有助于人们从微观到宏观对物质运动规律进行认识. 自然科学基本规律的精确数学表达式大都是微分方程,如 Newton 运动方程、Euler 方程、Navier-Stokes 方程、Navier-Lamé 方程、Maxwell 方程、Boltzmann 方程、Schrödinger 方程和 Einstein 方程等. 这些基本方程及其派生出来的方程几乎在科学技术各个领域都有应用. 现代大型科学工程计算的主要任务就是用大型计算机求解这些方程.

数学物理方程理论发展到今天,经典和现代互相融合,数学和自然科学的其他各个分支相结合,互相渗透,不断创新,形成了内容十分丰富的分支. 使计算数学、应用数学、力学和物理专业的研究生在较短的时间内尽快地了解这一庞大理论体系中的主要结果和方法,是近代科学综合发展趋势的要求,也是培养新一代科学工作者必不可少的环节.

从一个庞大的理论体系中选取一定素材,使它不仅包含原体系的主要结果和方法,还要自成体系,满足作为一本教材的种种要求,这不能不说是一件非常困难的事情. 1980 年以来,我们经过多年的教学探索和实践,多次修改,撰写成本书,较好地达到了上述要求.

本书建立在 Sobolev 空间,尤其是向量值 Sobolev 空间的相关理论基础之上. 有关内容,作者在另一本书[6]中有详细的阐述.

本书第一部分(第 1～4 章)是椭圆边值问题和发展方程的 Hilbert 空间方法,对椭圆型方程而言,着重变分原理、正则性理论和变分逼近理论;对发展方程而言,着重用半群理论来讨论它的适定性问题;第二部分(第 5,6 章)讨论力学、物理中的经典方程,如流体力学中的 Navier-Stokes 方程、弹性力学中的 Navier-Lamé 方程、电磁场中的 Maxwell 方程等,主要讨论弱解和强解的存在唯一、解的吸引子以及解的渐近行为等,其中有些内容是 20 世纪 80 年代以后才发展起来的.

第 1 章是抽象的椭圆变分问题. 讨论了线性椭圆变分问题、混合变分问题、三线性和拟线性变分问题、解的存在性、变分逼近解的存在性、收敛性和正则性,以及一些迭代方法及其收敛性等问题,对它们的理论根据、实际背景均有一定交代.

第 2 章是第 1 章建立的理论方法在椭圆边值问题中的应用,主要是在 $2m$ 阶线性椭圆型方程和拟线性椭圆型方程中的应用. 为了更好地理解其概念和理论,给出了一些例子,使较短的篇幅包含了较多的内容.

第 3,4 章讨论一阶、二阶发展方程. 这两章采用从抽象到具体的方法,不仅讲

授内容，而且展现了整个抽象过程和方法，使读者很自然地获得较完整的概念.

第 5 章对定常和非定常的 Navier-Stokes 方程解的存在唯一性、多解、奇异点集、分歧和吸引子等问题的近代理论及研究方法进行了系统的讨论. 这些内容反映了理论流体力学和非线性偏微分方程研究中的重要进展.

第 6 章应用前面提供的理论工具，系统地讨论了弹性力学中 Navier-Lamé 方程、电磁场中的 Maxwell 方程、磁流体动力学方程等相应变分问题的适定性问题.

为了内容上的自封闭，以附录形式给出了两部分内容. 附录 A 介绍非线性泛函分析中的若干问题. 主要内容为非线性泛函分析中的极值原理、位势型算子和单调算子等. 多数命题、定理给出了严格证明. 附录 B 介绍紧算子的 Riesz-Schauder 理论，这部分内容是经典的，故不加证明.

这里特别感谢周天孝、黄艾香两位教授，他们仔细阅读了全部书稿，提出了非常宝贵的意见.

由于作者水平有限，错误在所难免，热忱欢迎读者提出宝贵意见，谢谢!

作　者

2007 年 6 月

目　录

第 1 章　椭圆边值问题的变分原理

本章将介绍抽象的变分问题及其解的存在性和正则性，并讨论它的有限维逼近以及与椭圆边值问题的关系.

1.1　抽象的变分问题

设 U,V 为两个 Hilbert 空间，U',V' 分别为 U,V 的拓扑对偶，$(\cdot,\cdot)_U$，$(\cdot,\cdot)_V$ 分别记为 U,V 的内积，$\langle\cdot,\cdot\rangle_U$，$\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ 分别记为 $U\times U'$，$V\times V'$ 的对偶积. 在不致引起混淆处，下标 U 或 V 将略去. $\|\cdot\|_U$，$\|\cdot\|_V$ 分别记为空间 U 和 V 的范数.

另外，H,G 分别为另外两个 Hilbert 空间，它们可以作为 Hilbert 空间套 (U,H)，(V,G) 中的主元空间，即

$$U\subset H=H'\subset U',\quad V\subset G=G'\subset V',$$

其中嵌入是稠密和连续的.

1. 双线性形式

$B(\cdot,\cdot)$ 称为 $U\times V\to\mathbf{R}$ 的双线性形式，如果 $\forall u\in U$，$v\to B(u,v)$ 是线性的，$\forall v\in V$，$u\to B(u,v)$ 也是线性的，即 $\forall \alpha_i,\beta_i\in\mathbf{R}$，$u_i\in U$，$v_i\in V$，$i=1,2$，那么有

$$\begin{aligned}B(\alpha_1u_1+\alpha_2u_2,\beta_1v_1+\beta_2v_2)=&\alpha_1\beta_1B(u_1,v_1)+\alpha_1\beta_2B(u_1,v_2)\\&+\alpha_2\beta_1B(u_2,v_1)+\alpha_2\beta_2B(u_2,v_2).\end{aligned}$$

双线性形式 $B(\cdot,\cdot)$ 称为是有界的，如果存在 $M>0$，使得

$$|B(u,v)|\leqslant M\|u\|_U\cdot\|v\|_V,\quad \forall u\in U,v\in V.$$

线性算子有界性和连续性等价，所以 $B(\cdot,\cdot)$ 的连续性等价于 $B(\cdot,\cdot)$ 的有界性.

当 $U=V$ 时，如果 $B(\cdot,\cdot)$ 满足

$$B(u,v)=B(v,u),\quad \forall u,v\in U,$$

则称双线性形式 $B(u,v)$ 是对称的.

设 $U\times V$ 上双线性形式 $B(\cdot,\cdot)$ 是连续的，那么存在 $A\in\mathcal{L}(U,V')$，使得

$$B(u,v)=\langle Au,v\rangle,\quad \forall u\in U,v\in V,\tag{1.1.1}$$

这里 $\mathcal{L}(U,V')$ 记为 U 到 V' 的一切线性连续算子所组成的空间，并赋以通常的算

子范数，根据 Hilbert 空间的 Riesz 定理，必存在唯一的 $\alpha u \in V$，使得

$$B(u,v) = \langle Au, v\rangle = (\alpha u, v)_V, \quad \forall u \in U, v \in V, \tag{1.1.2}$$

并且 α 是 $U \to V$ 的连续线性算子，同理有

$$B(u,v) = \langle u, A^* v\rangle = (u, \alpha^* v)_U, \quad \forall u \in U, v \in V, \tag{1.1.3}$$

其中 $A^* \in \mathcal{L}(V,U')$，$\alpha^* \in \mathcal{L}(V,U)$ 分别称为 A 和 α 的共轭算子.

考察下列变分问题(记为 V. P.)：$\forall f \in V'$，

$$\begin{cases} 求\ u \in U, 使得 \\ B(u,v) = \langle f, v\rangle_V, \quad \forall v \in V \end{cases} \tag{1.1.4}$$

以及它的共轭问题(记为 $V^*.P^*.$)：$\forall g \in U'$，

$$求\ v \in V, 使得\ B(u,v) = \langle g, u\rangle_U, \forall u \in U. \tag{1.1.5}$$

设 $J_U \in \mathcal{L}(U',U)$，$J_V \in \mathcal{L}(V',V)$ 分别为 Riesz 映射，那么(1.1.4)和(1.1.5)可以表示为

$$\alpha(u) = J_V(f), \tag{1.1.6}$$

$$\alpha^*(v) = J_U(g), \tag{1.1.7}$$

变分问题(V. P.)和($V^*.P^*.$)的可解性等价于算子 α 和 α^* 的可逆性，通常称 U 为试验空间，V 为检验空间.

定义 1.1.1　双线性形式 $B(\cdot,\cdot)$ 是弱强制的，如果满足

(1) 存在正常数 $\delta > 0$，使得

$$\inf_{\|u\|_U=1} \sup_{\|v\|_V \leqslant 1} |B(u,v)| \geqslant \delta > 0, \tag{1.1.8}$$

(2)

$$\sup_{\substack{u \in U \\ u \neq 0}} |B(u,v)| > 0, \quad \forall v \in V, v \neq 0. \tag{1.1.9}$$

如果 $B(\cdot,\cdot)$ 是定义在 $U \times U$ 上，且存在常数 $\mu > 0$，使得

$$B(u,u) \geqslant \mu \|u\|_U^2, \quad \forall u \in U. \tag{1.1.10}$$

则称 $B(\cdot,\cdot)$ 是 U 强制的.

如果 $B(\cdot,\cdot)$ 定义在 $U \times U$ 上，且存在常数 $\mu > 0, \lambda > 0$，使得

$$B(u,u) \geqslant \mu \|u\|_U^2 - \lambda \|u\|_H^2, \quad \forall u \in U. \tag{1.1.11}$$

称 $B(\cdot,\cdot)$ 是 U-H 强制的.

命题 1.1.1　若双线性形式 $B(\cdot,\cdot)$ 是连续的，那么由式(1.1.2)所定义的算子 α 也是连续的.

证　由下列不等式可立即证得命题

$$\|\alpha(u)\|_V = \sup_{v \in V} \frac{(\alpha(u), v)_V}{\|v\|_V} \leqslant M \|u\|_U, \quad \forall u \in U.$$

证毕.

命题 1.1.2　$B(\cdot,\cdot)$ 是定义在 $U \times U$ 上的双线性形式，如果 $B(\cdot,\cdot)$ 是 U 强

制的，则 $B(\cdot,\cdot)$ 也是弱强制的.

证 由 U 强制性，有

$$\sup_{\|v\|_U\leqslant 1}|B(u,v)|\geqslant\sup_{v\in U}\frac{|B(u,v)|}{\|v\|_U}\geqslant\frac{|B(u,u)|}{\|u\|_U}\geqslant\mu\|u\|_U,$$

从而(1.1.8)成立，另外，$\forall v\in U$，有

$$\sup_{u\in U}|B(u,v)|\geqslant B(v,v)\geqslant\mu\|v\|_U^2>0,\quad v\neq 0.$$

即得到(1.1.9). 证毕.

2. 变分问题解的存在唯一

定理 1.1.1 (Lax-Milgram 定理) 设 $B(\cdot,\cdot)$ 是定义在 $U\times U$ 上的双线性形式，并且

(1) $B(\cdot,\cdot)$ 是连续的，

(2) $B(\cdot,\cdot)$ 是 U 强制的.

那么 $\forall f\in U'$，变分问题(V.P.)存在唯一解 u，满足

$$\|u\|_U\leqslant\mu^{-1}\|f\|_{U'}.\tag{1.1.12}$$

证 由强制性条件及算子 α 和 α^* 定义，可得

$$\mu\|u\|_U^2\leqslant B(u,u)=(\alpha(u),u)\leqslant\|\alpha(u)\|_U\|u\|_U,$$

即

$$\|\alpha(u)\|_U\geqslant\mu\|u\|_U.\tag{1.1.13}$$

同理，

$$\|\alpha^*(u)\|_U\geqslant\mu\|u\|_U.$$

这说明，算子 α,α^* 均有下界，因而 $u\to\alpha(u)$ 和 $u\to\alpha^*(u)$ 是一对一的.

为了证明 α 也是 U 到 U 的满映射，先证值域 $R(\alpha)$ 是 U 中的闭子空间. 实际上，若 $R(\alpha)$ 中有一收敛点列，它们是由 $\{u_i\}$ 产生的，即 $\alpha(u_i)$ 在 U 中收敛. 设极限为 $w_0\in U$，现在证明 $w_0\in R(\alpha)$. 由(1.1.13)可以推出 $\{u_i\}$ 是 U 中 Cauchy 点列，故有 $\lim\limits_{i\to\infty}u_i=u_0$，由 α 的连续性有 $\alpha(u_i)\to\alpha(u_0)$，即 $w_0=\alpha(u_0)$，故 $w_0\in R(\alpha)$，即 $R(\alpha)$ 是 U 中的闭子空间，因此，$U=R(\alpha)\oplus R(\alpha)^{\perp}$. 其中，$R(\alpha)^{\perp}$ 表示 $R(\alpha)$ 在 U 中的正交补.

$$\begin{aligned}R(\alpha)^{\perp}&=\{v\in U:(\alpha(u),v)_U=0,\forall u\in U\}\\&=\{v\in U:B(u,v)=0,\forall u\in U\},\end{aligned}$$

若 $R(\alpha)^{\perp}\neq\{0\}$，则必有 $w_0\neq 0,w_0\in R(\alpha)^{\perp},B(u,w_0)=0,\forall u\in U$，取 $u=w_0$，则 $B(w_0,w_0)=0$，这与 U 强制性条件相矛盾，因此 $u\to\alpha(u)$ 是 $U\to U$ 一对一的满映射，根据 Banach 定理，$\alpha(u)=J_Uf$ 有唯一解，并且

$$\|\alpha(u)\|_U=\|J_Uf\|_U=\|f\|_{U'},$$

代入(1.1.13)，就可以得到(1.1.12). 证毕.

定理 1.1.2（广义 Lax-Milgram 定理）　设 $B(\cdot,\cdot)$ 是定义在 $U\times V$ 上的双线性形式，并且(1)$B(\cdot,\cdot)$ 是连续的，(2)$B(\cdot,\cdot)$ 是弱强制的. 那么 $\forall f\in V'$ 变分问题(V. P.)存在唯一解 u，满足

$$\|u\|_U\leqslant\delta^{-1}\|f\|_{V'}. \tag{1.1.14}$$

证　设 α 为与 $B(\cdot,\cdot)$ 相对应的由(1.1.2)所定义的算子，由(1.1.8)得

$$\forall u\in U,\quad \|\alpha(u)\|_V=\sup_{v\in V}\frac{|(\alpha(u),v)|}{\|v\|_V}\geqslant\delta\|u\|_U. \tag{1.1.15}$$

这说明 α 有下界，所以 $u\to\alpha(u)$ 是 $U\to V$ 的一对一的映射. 由于 $B(\cdot,\cdot)$ 的连续性以及 α 有下界，可知 $R(\alpha)$ 是 V 中闭子空间(参看定理 1.1.1 的证明). 故 $V=R(\alpha)\oplus R(\alpha)^{\perp}$. 为了证明 α 也是 U 到 V 的满映射，只需证明 $R(\alpha)^{\perp}=\{0\}$. 若不然，设有 $v_0\in R(\alpha)^{\perp}, v_0\neq 0$，则有

$$(\alpha(u),v_0)_V=0,\quad \forall u\in U,$$

或

$$B(u,v_0)=0,\qquad \forall u\in U, v_0\neq 0.$$

与(1.1.9)矛盾，故 $u\to\alpha(u)$ 是 U 到 V 上的一对一的满射，根据 Banach 定理，存在有界逆 α^{-1}，

$$u=\alpha^{-1}(J_Vf).$$

由(1.1.15)有

$$\|\alpha^{-1}(J_Vf)\|_U\leqslant\delta^{-1}\|J_Vf\|_V=\delta^{-1}\|f\|_{V'},$$

即

$$\|u\|_U\leqslant\delta^{-1}\|f\|_{V'}.$$

证毕.

3. Ritz 变分和 Galerkin 变分

当 $U=V$ 时，变分问题(V. P.)称为 Galerkin 变分问题，尤其是当 $B(\cdot,\cdot)$ 是对称的时，可以引入泛函 J：$\forall f\in U'$，

$$J(u)=\frac{1}{2}B(u,u)-\langle f,u\rangle, \tag{1.1.16}$$

在物理上，称 J 为能量泛函.

定理 1.1.3　设 $B(\cdot,\cdot)$ 是 $U\times U\to\mathbf{R}$ 连续、对称和 U 强制的双线性形式. 那么，由(1.1.16)所定义的能量泛函 J 满足：

(1) J 在 U 上处处 Fréchet 可导，它的导算子 $J'(u)$ 满足

$$\langle J'(u),v\rangle=B\langle u,v\rangle-\langle f,v\rangle, \tag{1.1.17}$$

也就是

$$J'(u)=Au-f, \tag{1.1.18}$$

其中，A 是由(1.1.1)所定义的，

(2) J 在 U 上是严格凸的,即 $\forall t \in [0,1]$,

$$J(tv+(1-t)u) < tJ(v)+(1-t)J(u), \quad \forall u,v \in U, u \neq v, \tag{1.1.19}$$

(3)
$$J(v) \geqslant J(u)+\langle J'(u), v-u\rangle, \quad \forall u,v \in U, \tag{1.1.20}$$

(4) J 在 U 上弱下半连续(见附录 A),即若 $\{u_n\} \subset U$ 在 U 中弱收敛于 u_0,则

$$\liminf_{n\to\infty} J(u_n) \geqslant J(u_0), \tag{1.1.21}$$

(5) J 在 U 上是强制的,即一致成立

$$\frac{J(u)}{\|u\|_U} \to +\infty, \quad 当\ \|u\|_U \to +\infty. \tag{1.1.22}$$

证 $\forall u,v \in U$, 利用 $B(\cdot,\cdot)$ 对称性,有

$$B(u,u)-B(v,v)=B(u+v,u-v),$$

故

$$J(u)-J(v)=\frac{1}{2}B(u+v,u-v)-\langle f,u-v\rangle.$$

它的 Gâteaux 导数

$$\langle J'(u),v\rangle=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(J(u+tv)-J(u))=B(u,v)-\langle f,v\rangle,$$

由于 $J'(u)$ 关于 u 是连续的,根据熟知的泛函分析定理,可知 $J'(u)$ 等于 Fréchet 导数. 所以(1.1.17)成立.

另一方面

$$J(tv+(1-t)u)=tJ(v)+(1-t)J(u)-\frac{1}{2}t(1-t)B(u-v,u-v).$$

利用 $B(\cdot,\cdot)$ 的 U 强制就可以得到(1.1.19).

利用凸性(1.1.19),有

$$J(v)-J(u)>t^{-1}[J(u+t(v-u))-J(u)],$$

令 $t\to 0$,就可得到(1.1.20).

为了证明弱下半连续,注意到,当 u_n 在 U 中弱收敛于 u_0 时,有

$$\lim_{n\to\infty}\langle f,u_n\rangle=\langle f,u_0\rangle, \quad \lim_{n\to\infty}B(u_n,u_0)=B(u_0,u_0).$$

另外

$$0\leqslant B(u_n-u_0,u_n-u_0)=B(u_n,u_n)-2B(u_n,u_0)+B(u_0,u_0),$$

从而

$$B(u_n,u_n)\geqslant 2B(u_n,u_0)-B(u_0,u_0),$$

那么有

$$\liminf_{n\to\infty} J(u_n)\geqslant \frac{1}{2}B(u_0,u_0)-\langle f,u_0\rangle=J(u_0).$$

这就是(1.1.21).

利用 $B(\cdot,\cdot)$ 的 U 强制性,得

$$J(u) \geqslant \left(\frac{\mu}{2}\|u\|_U - \|f\|_{U'}\right)\|u\|_U,$$

于是不难得到(1.1.22). 证毕.

定理 1.1.4 设 $B(\cdot,\cdot)$ 是定义在 Hilbert 空间 U 上的对称、连续双线性形式,且是 U 强制的,那么 Galerkin 变分问题(V. P.)等价于 Ritz 变分问题

$$\text{求 } u \in U, \text{使得 } J(u) = \inf_{v\in U} J(v). \tag{1.1.23}$$

证 设 u 是 Ritz 变分问题(1.1.23)的解,由于 $J \in C^1$,故

$$\langle J'(u), v\rangle = 0, \quad \forall v \in U \tag{1.1.24}$$

(参看附录 A). 由(1.1.17)可以推出,u 也是(V. P.)的解,反之,若 u 是(V. P.)的解,那么由(1.1.17) 推出(1.1.24). 再由(1.1.20) 可得 u 也是 Ritz 变分问题的解. 证毕.

由附录 A 可以看到,由于 J 在 U 上弱下半连续,并且是 U 强制(有增长性质),那么极小值问题(1.1.23) 至少存在一个解. 由于 J 的严格凸性,这个解也是唯一的. 这与 Galerkin 变分问题解的存在唯一性的结果是一致的.

4. 有限维逼近

设 $U_h \subset U$, $V_h \subset V$ 分别为两个有限维子空间,那么变分问题(V. P.)的有限维逼近(V_h. P_h.)是

$$\begin{cases} \text{求 } u_h \in U_h, \text{使得} \\ B(u_h, v_h) = \langle f, v_h\rangle_V, \quad \forall v_h \in V_h, \end{cases} \tag{1.1.25}$$

这里 $B(\cdot,\cdot)$ 是 $U\times V \to \mathbf{R}$ 的连续双线性形式,$f \in V'$.

设 u, u_h 分别是(V. P.)和(V_h, P_h)的解,那么在(V. P.)中,令 $v = v_h \in V_h$,并与(1.1.25)相减,得

$$B(u-u_h, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in V_h. \tag{1.1.26}$$

这说明 $u-u_h$ 在 $B(\cdot,\cdot)$ 度量下正交于 V_h.

变分问题(1.1.25) 还有一个最佳逼近性质,设 $U=V$, $U_h = V_h$,双线性形式 $B(\cdot,\cdot)$ 是 U 强制和对称的,那么 $\forall v_h \in V_h$,

$$\begin{aligned} B(u-v_h, u-v_h) &= B(u-u_h+u_h-v_h, u-u_h+u_h-v_h) \\ &= B(u-u_h, u-u_h) + B(u_h-v_h, u_h-v_h). \end{aligned} \tag{1.1.27}$$

这里利用了(1.1.26),(1.1.27)表明,在 $B(\cdot,\cdot)$ 度量下,V_h 中任一元素 v_h 到 u 的距离均大于 u_h 到 u 的距离,即

$$B(u-u_h, u-u_h) < B(u-v_h, u-v_h), \quad \forall v_h \in V_h, v_h \neq u_h. \tag{1.1.28}$$

定理 1.1.5 (Cèa 引理) 设 $B(\cdot,\cdot)$ 定义在 $U\times U$ 上的连续、对称和 U 强制的

双线性形式，$U_h \subset U$ 是有限维子空间. u, u_h 分别为(V. P.)和(V_h. P_h.)的解，那么存在一个与 u_h 无关的常数 c，成立

$$\| u - u_h \|_U \leqslant c \inf_{v_h \in U_h} \| u - v_h \|_U. \tag{1.1.29}$$

证 设 $w_h \in U_h$ 为任一元素，利用(1.1.26)和 $B(\cdot,\cdot)$ 的强制性和对称性，有

$$\begin{aligned}\mu \| u - u_h \|_U^2 &\leqslant B(u - u_h, u - u_h) = B(u - u_h, u - v_h) \\ &\leqslant M \| u - u_h \|_U \cdot \| u - v_h \|_U.\end{aligned}$$

因而可得(1.1.29)，这里 $c = M/\mu$. 证毕.

注 如果存在一个单参数有限维空间族 $\{U_h\}(h \geqslant 0) \subset U$，使得 $\forall u \in U$，有

$$\lim_{h \to 0} \inf_{v_h \in U_h} \| u - v_h \|_U = 0, \tag{1.1.30}$$

那么 (V_k, P_h) 的解收敛于(V. P.)的解，

$$\| u - u_h \|_U \leqslant \sqrt{\frac{M}{\mu}} \inf_{v_h \in U_h} \| u - v_h \|_U. \tag{1.1.31}$$

定理 1.1.6 设 $B(\cdot,\cdot)$ 是 $U \times V \to \mathbf{R}$ 的双线性连续形式，$U_h \subset U, V_h \subset V$ 分别为有限维子空间，$f \in V'$. 如果

(1) $$\inf_{\substack{u_h \in U_h \\ \| u_h \|_U = 1}} \sup_{\substack{v_h \in V_h \\ \| v_h \|_V \leqslant 1}} | B(u_h, v_h) | \geqslant \delta_h > 0, \quad \delta_h \in \mathbf{R}^+, \tag{1.1.32}$$

(2) $$\sup_{u_h \in U_h} | B(u_h, v_h) | > 0, \quad \forall v_h \neq 0, \tag{1.1.33}$$

那么 (V_h. P_h.) 有唯一解 u_h，

(3) $B(\cdot,\cdot)$ 是弱强制的，

那么(V. P.)存在唯一解 u，并且有逼近不等式

$$\| u - u_h \|_U \leqslant \left(1 + \frac{M}{\delta_h}\right) \| u - w_h \|_U, \quad \forall w_h \in U_h. \tag{1.1.34}$$

证 设 $\alpha \in \mathcal{L}(U,V)$ 为 $B(\cdot,\cdot)$ 相应的线性连续算子：

$$B(u,v) = (\alpha u, v)_V, \quad \forall u \in U, v \in V.$$

算子 $A \in \mathcal{L}(U,V')$：

$$B(u,v) = \langle Au, v \rangle_V, \quad \forall u \in U, v \in V.$$

若 $J_V \in \mathcal{L}(V',V)$ 为 Riesz 同构等距算子，那么

$$\alpha u = J_V A u, \quad \forall u \in U. \tag{1.1.35}$$

同样，设 $\alpha_h \in \mathcal{L}(U_h, V_h)$：

$$B(u_h, v_h) = (\alpha_h u_h, v_h)_V, \quad \forall u_h \in U_h, v_h \in V_h.$$

若 P_h 为 V 到 V_h 上的正交投影算子，并且记

$$Q_h \equiv P_h \alpha \in \mathcal{L}(U, V_h).$$

由于 P_h 对称的，有 $\forall u_h \in U_h, v_h \in V_h$，

$$(Q_h u_h, v_h)_V = (P_h \alpha u_h, v_h)_V = (\alpha u_h, P_h v_h)_V$$

$$= (\alpha u_h, v_h)_V = B(u_h, v_h),$$

因而 α_h 是 Q_h 在 U_h 上的限制，$\alpha_h = Q_h|_{U_h}$.

利用 Riesz 表现定理，令 $v_0 \in V_h$，使得

$$(v_0, v_h)_V = \langle f, v_h \rangle_V, \quad \forall v_h \in V_h.$$

由于 u_h 是(V$_h$. P$_h$.) 的解，故

$$B(u_h, v_h) = (\alpha_h u_h, v_h)_V = \langle f, v_h \rangle_V = (v_0, v_h)_V, \quad \forall v_h \in V_h,$$

即 $\alpha_h u_h = v_0$. 同理，u 是(V. P.) 的解，有

$$B(u, v_h) = (\alpha u, P_h v_h)_V = (P_h \alpha u, v_h)_V = (v_0, v_h)_V, \quad \forall v_h \in V_h,$$

因而 $P_h \alpha u = v_0$. 从而 $u_h = \alpha_h^{-1} P_h \alpha u$. 设 $w_h \in U_h$ 为任一元素，那么

$$u - u_h = u - w_h - \alpha_h^{-1} P_h \alpha (u - w_h) = (I - \alpha_h^{-1} P_h \alpha)(u - w_h),$$

这里用到 $\alpha_h^{-1} Q_h|_{U_h} = I$. 由此得

$$\begin{aligned} \| u - u_h \|_U &\leqslant \| I - \alpha_h^{-1} P_h \alpha \| \ \| u - w_h \|_U \\ &\leqslant (1 + \| \alpha_h^{-1} \|_{\mathcal{L}(V_h, U_h)} \| \alpha \|_{\mathcal{L}(U,V)}) \| u - w_h \|_U, \\ &\forall w_h \in U_h. \end{aligned}$$

再由 $B(\cdot, \cdot)$ 的连续性可推出

$$\| \alpha \|_{\mathcal{L}(U,V)} \leqslant M.$$

而根据(1. 1. 32)，$\forall w_h \in U_h$，有

$$\| \alpha_h(w_h) \|_V = \sup_{v \in V_h} \frac{|(\alpha_h(w_h), v)|}{\| v \|_V} = \sup_{v \in V_h} \frac{|B(w_h, v)|}{\| v \|_V} \geqslant \delta_h \| w_h \|_U,$$

故

$$\| \alpha_h^{-1} \|_{\mathcal{L}(V_h, U_h)} \leqslant \delta_h^{-1}.$$

最后可得

$$\| u - u_h \|_U \leqslant \left(1 + \frac{M}{\delta_h}\right) \| u - w_h \|_U, \quad \forall w_h \in U_h.$$

证毕.

逼近定理表明，变分问题逼近解的精度取决于有限维子空间 U_h 逼近 U 的精度. $\inf\limits_{v_h \in U_h} \| u - v_h \|_U$ 是真解 u 到 U_h 的最短距离，这个数取决于有限维插值精度.

在(1. 1. 34)中，δ_h 依赖于有限维空间 U_h，如果(1. 1. 32) 有一致均匀下界，那么将存在一个常数 δ_0，使得(1. 1. 34) 对所有的 u_h 都成立. 但是如果 $\delta_h \to 0 (h \to 0)$，那么逼近解的误差可能无法控制.

5. 约束极小化和不等变分

设 V 是个 Hilbert 空间，$K \subset V$ 是一个非空子集. $B(\cdot, \cdot)$ 是 $V \times V \to \mathbf{R}$ 的连续双线性形式，f 是 $V \to \mathbf{R}$ 的连续线性泛函，设能量泛函：

$$J(v)=\frac{1}{2}B(v,v)-\langle f,v\rangle,$$

于是可以构造如下极小值问题：

$$\text{求 } u\in K\text{，使得 } J(u)=\inf_{v\in K}J(v). \tag{1.1.36}$$

下面的结果是经典的：

定理 1.1.7 设 V 是一个 Hilbert 空间，并且

(1) K 是 V 中一个闭凸子集，

(2) 双线性形式 $B(\cdot,\cdot)$ 是对称、连续和 V 强制的，即

① $B(u,v)=B(v,u),\quad \forall u,v\in V$,

② 存在 $M>0$，$|B(u,v)|\leqslant M\|u\|_V\|v\|_V,\quad \forall u,v\in V$,

③ 存在 $\mu>0$，$B(u,u)\geqslant\mu\|u\|_V^2,\quad \forall u\in V$,

那么(1.1.36)存在唯一的解.

证 由(2)，根据 Lax-Milgram 定理，下列变分问题：

$$\text{求 } u\in V\text{，使得 } B(u,v)=\langle f,v\rangle,\quad \forall v\in V$$

有唯一解 u_f，于是能量泛函可以表示为

$$J(v)=\frac{1}{2}B(v,v)-B(u_f,v)=\frac{1}{2}B(v-u_f,v-u_f)-\frac{1}{2}B(u_f,u_f).$$

如果把 $B(\cdot,\cdot)$ 作为 V 的内积，$B(u,u)$ 为 V 的等价范数，那么极小值问题(1.1.36)等价于求 u_f 到 K 的最短距离，也就是求 u_f 到 K 上的投影. 由于 K 是 V 中的闭凸集，根据投影定理，这样的投影存在且唯一. 证毕.

定理 1.1.8 设 $u\in K$ 是极小值问题(1.1.36)的一个解，当且仅当它满足下列三条件之一：

(1) 如果 K 是实闭凸集，那么

$$B(u,v-u)\geqslant\langle f,v-u\rangle,\quad \forall v\in K, \tag{1.1.37}$$

(2) 如果 K 是 V 中以 O 为顶点的闭凸锥，那么

$$B(u,u)=\langle f,u\rangle,\quad B(u,v)\geqslant\langle f,v\rangle,\quad \forall v\in K, \tag{1.1.38}$$

(3) 如果 K 是 V 中的闭子空间，那么

$$B(u,v)=\langle f,v\rangle,\quad \forall v\in K. \tag{1.1.39}$$

证 由定理 1.1.7 的证明过程可知，极小值问题(1.1.36)等价于求 u_f 在 K 上的投影. 设投影为 u，u 可以表述为

$$u\in K,B(u_f-u,v-u)\leqslant 0,\quad \forall v\in K. \tag{1.1.40}$$

这表明向量 u_f-u 和 $v-u$ 的夹角是钝角，(1.1.40)也可以写成

$$B(u,v-u)\geqslant B(u_f,v-u)=\langle f,v-u\rangle.$$

这就证明了(1.1.37).

如果 K 是 V 中顶点在 O 的闭凸锥，只要 $v\in K$，那么 $u+v$ 也属于 K，所以在

(1.1.37) 中用 $u+v$ 仍然成立,即

$$B(u,v) \geqslant \langle f,v\rangle.$$

特别地, $B(u,u) \geqslant \langle f,u\rangle$. 另一方面,在(1.1.37) 中令 $v=0$,则得 $B(u,u) \leqslant \langle f,u\rangle$,所以(1.1.38) 成立,反之亦然.

如果 K 是一个闭子空间,那么(1.1.38) 对 v 和 $-v$ 均成立,于是有 $B(u,v) \geqslant \langle f,v\rangle$ 和 $B(u,v) \leqslant \langle f,v\rangle$, $\forall v \in K$. 故(1.1.39)成立. 反之亦然. 证毕.

(1.1.37)～(1.1.39)称为对应于(1.1.36)的变分问题. (1.1.37)和(1.1.38)称为变分不等式问题,(1.1.39)为 Galerkin 变分问题.

利用 J 的可微性质也容易证明(1.1.37)～(1.1.39). 事实上,在定理 1.1.3 中已证明了(1.1.39),而且有

$$\langle J'(u),v\rangle = B(u,v) - \langle f,v\rangle, \quad \forall v \in V.$$

设 u 是极小值问题(1.1.36) 的解,那么若 $v=u+w \in K$ 是任意一个点,由于 $u+\theta w$, $(\theta \in [0,1])$ 也在 K 内,故

$$0 \leqslant J(u+\theta w) - J(u) = \langle J'(u),w\rangle + \theta \| w \|_V \varepsilon(\theta), \quad \forall \theta \in [0,1],$$

这里 $\lim\limits_{\theta\to 0}\varepsilon(\theta)=0$,从而 $\langle J'(u),w\rangle \geqslant 0$, 这就是(1.1.37). 反之,若(1.1.37)成立,那么

$$\begin{aligned}\langle J'(u),w\rangle &= \langle J'(u),v-u\rangle \\ &= B(u,v-u) - \langle f,v-u\rangle \geqslant 0, \quad \forall v \in K.\end{aligned}$$

另一方面,

$$J''(u)(v,w) = B(v,w), \quad \forall v,w \in V,$$

与 u 无关,由 Taylor 展式,对于任何一个点 $v=u+w \in K$,

$$J(u+w) - J(u) = \langle J'(u),w\rangle + \frac{1}{2}B(w,w) \geqslant \frac{\mu}{2}\| w \|_V^2.$$

这说明 u 是(1.1.36)的解,(1.1.38)也可以用类似的方法得到.

1.2　混合问题和对偶原理

1. 问题描述

一类相当广泛的带有约束的变分问题,可以归结为下面抽象的混合变分问题.

设 X 和 M 是两个 Hilbert 空间, $\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_M$ 分别为它们的范数, X', M' 分别为 X 和 M 的对偶空间. 记 $\|\cdot\|_{X'}$, $\|\cdot\|_{M'}$ 为对偶范数, $\langle\cdot,\cdot\rangle_X$, $\langle\cdot,\cdot\rangle_M$ 分别为 $X\times X'$ 和 $M\times M'$ 的对偶积,在不会引起混淆的情况下,略去下标.

引入两个连续的双线性形式,

$$a(\cdot,\cdot): X\times X \to \mathbf{R}, \quad b(\cdot,\cdot): X\times M \to \mathbf{R},$$

定义算子范数 $\forall u,v \in X, u\neq 0, v\neq 0, \mu \in M, \mu \neq 0$,