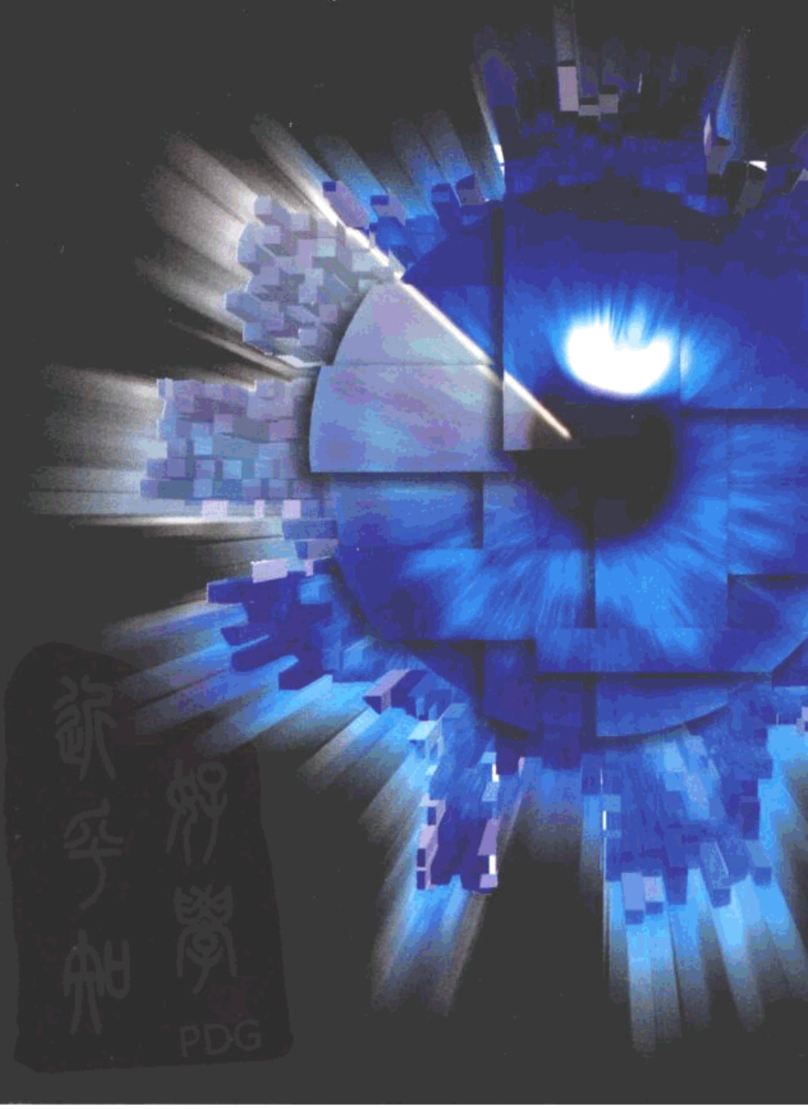
凤凰百通工具书

苏教金牌书系

新课程 新高考
搜索引擎 强力出击

考点全搜索



高中数学

凤凰出版传媒集团
江苏教育出版社
JIANGSU EDUCATION PUBLISHING HOUSE

凤凰百通工具书

苏教金牌书系

高中数学
考点全搜索

主编 李善良
王玉宏

凤凰出版传媒集团
江苏教育出版社
JIANGSU EDUCATION PUBLISHING HOUSE

图书在版编目(CIP)数据

考点全搜索. 高中数学 / 李善良，王玉宏主编. 一南京：江苏教育出版社，2008.5

ISBN 978-7-5343-8725-8

Ⅰ. 考…　Ⅱ. ①李…②王…　Ⅲ. 数学课一高中一升学参考资料　Ⅳ. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 064434 号

书　　名	凤凰百通工具书 **考点全搜索·高中数学**
主　　编	李善良　王玉宏
责任编辑	沙国祥
装帧设计	张金凤
出版发行	凤凰出版传媒集团 江苏教育出版社(南京市马家街 31 号　210009)
网　　址	http://www.1088.com.cn
集团网址	凤凰出版传媒网 http://www.ppm.cn
经　　销	江苏省新华发行集团有限公司
照　　排	南京前锦排版服务有限公司
印　　刷	南京爱新印务有限公司
厂　　址	南京市雨花台东路 152 号(邮编　210012)
电　　话	025-52417550
开　　本	787×1092 毫米　1/16
印　　张	19.25
插　　页	1
版　　次	2008 年 5 月第 1 版 2008 年 5 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN　978-7-5343-8725-8
定　　价	44.00 元
批发电话	025-83260760,83260768
邮购电话	025-85400774,8008289797
短信咨询	10602585420909
E-mail	jsep@vip.163.com
盗版举报	025-83204538

编 者 的 话

高中阶级是学生应对高考的关键时期，而这一阶段的课程，涉及的内容很多，难度较大，考试要求复杂，因此在这宝贵的三年时间里，如何有效且高效地学习、记忆、提高是广大教师、学生在高中入门时就非常关注的问题。

《凤凰百通工具书·高中考点全搜索》是我社经过充分的市场调研，邀请特级教师精心打造推出的一套全新的词典类工具书。它全面搜索了高中阶段的定义定理、概念规律，通过例题及其分析，融学法指导、解题技巧于一体，旨在帮助学生及时理解知识点，消化疑难点，掌握技巧点，从而用**最少的时间精力，取得最好的学习效果**。

与以往的传统工具书相比，《高中考点全搜索》具有以下三大优势：

一、全程同步优势。《高中考点全搜索》和学校的教学进程完全同步，是高一学生就可以使用的，也是学好高中课程必备的助学读物，具有强大的学法指导功能。

二、新题好题优势。《高中考点全搜索》大量采用了近年来的高考题作为例题，紧密追踪高考新动态，具有强大的备战高考功能。

三、高考考点优势。《高中考点全搜索》以高考考点为词条，突显词典类工具书条目化优势，具有强大的查阅速记功能。

我们相信，《凤凰百通工具书·高中考点全搜索》从策划定位到内在质量都代表了教育大省——江苏的一流水平，是学生完成高中学业、顺利迈入理想大学的最强有力的支持！

参加本书编写的作者有李善良、王玉宏、陶兆龙、季斌、周家宽、张爱平、韩蕾、仇惠玲、戚有建、刘晓静、陈海华、龚海滨、蒋同山、葛文明、葛丹、胡志勇等。

欢迎使用本套工具书，并对书中的不足之处提供意见和建议，帮助我们做得更好。我们的地址是南京市马家街31号江苏教育出版社高中事业部，邮政编码：210009。E-mail：like@1088.com.cn。

江苏教育出版社

2008 年 4 月

目　录

第一章 集合

1.1 集合的含义及其表示

集合的含义 一定范围内某些确定的、不同对象的全体构成一个集合. 集合中的每一个对象称为该集合的元素.

集合的表示 (1)列举法:将集合的元素一一列举出来,并置于花括号“{}”内,元素之间要用“,”隔开,列举时与元素的次序无关,例如集合$\{1, 2, 3\}$与集合$\{2, 1, 3\}$表示同一个集合. (2)描述法:将集合的所有元素都具有的性质(满足的条件)表示出来,写成$\{x|P(x)\}$的形式. 竖线左边的x叫作此集合的代表元素,竖线右边的$P(x)$表示元素x所具有的公共属性. (3)Venn图表示法:将集合的所有元素写在一个圆圈内来形象直观地表示这个集合.

几个特殊数集的记号 自然数集:$\mathbf{N}$;正整数集:$\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$;整数集:$\mathbf{Z}$;有理数集:$\mathbf{Q}$;实数集:$\mathbf{R}$.

例1 用列举法表示下列集合A:

① $A = \{x \mid x 是 10 的约数, x \in \mathbf{N}^*\}$;

② $A = \{(x, y) \mid x \in \{1, 2\}, y \in \{2, 3\}\}$;

③ $A = \{x \mid x = (-1)^n, n \in \mathbf{N}\}$.

解析 ① $A = \{1, 2, 5, 10\}$;

② $A = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)\}$;

③ $A = \{1, -1\}$.

解后语 用列举法表示一个集合时,首先要仔细分析条件对集合元素的描述,弄清集合中元素的特征,然后不重不漏地写出所有符合条件的元素.

例2 用描述法表示下列集合:

① 偶数集;

② 不等式 $2x-1>0$ 的解集;

③ $\{1, 3, 5, 7, 9\}$.

解析 ① $\{x \mid x = 2n, n \in \mathbf{Z}\}$;

② $\{x \mid 2x-1>0\}$;

③ $\{x \mid x = 2n+1, n \in \mathbf{N}, n \leqslant 4\}$.

解后语 用描述法表示一个集合时,首先要仔细分析条件中描述的各元素的共同特征,用恰当的公式等数学语言概括这些特征,然后用描述法写出集合.

元素和集合之间的关系 如果a是集合A的元素,就记作$a \in A$;如果a不是集合A的元素,就记作$a \notin A$.

例3 用“$\in$”或“$\notin$”填空:

(1) $\frac{1}{2}$ ______ $\mathbf{N}$, -1 ______ $\mathbf{Z}$,

$-\sqrt{5}$ ______ $\mathbf{Q}$, $-\sqrt{5}$ ______ $\mathbf{R}$;

(2) $\sqrt{2}$ ______ $\left\{x \middle| x < \frac{3}{2}\right\}$,

$\frac{3}{2}$ ______ $\left\{x \middle| x < \frac{3}{2}\right\}$;

(3) $A = \{x \mid x > 3 或 x < 1, x \in \mathbf{Z}\}$,则 3.5 ______ A, -2 ______ A.

解析 (1) $\notin$, $\in$, $\notin$, $\in$;

(2) $\in$, $\notin$;

(3) $\notin$, $\in$.

解后语 判断元素和集合之间的关系时,首先要弄清所给集合中的元素满足的条件,然后再判断所给元素是否满足条件.

集合的分类 含有有限个元素的集合称为有限集;若一个集合不是有限集,就称此集合为无限集;把不含任何元素的集合称为空集,记作$\varnothing$. 如集合$\{1, 2, 3\}$是有限集,集合$\{x \mid 1 < x < 3\}$是无限集,集合$\{x \mid x^2 + 2 = 0, x \in \mathbf{R}\}$是空集.

两个集合相等 如果两个集合所含的元素完全相同，则称这两个集合相等. 如 $\{x \mid x^2-3x+2=0\}=\{1, 2\}=\{2, 1\}$.

集合中元素的特征 集合中的元素具有互异性、无序性和确定性.

例4 （根据2007年全国高考理科题改编） 设 $a, b \in \mathbf{R}$，集合 $\{1, a+b, a\}=\left\{0, \frac{b}{a}, b\right\}$，则 $b-a=$ ________.

解析 由条件得 $a \neq 0$，因此 $a+b=0$，所以 $a \neq b$，于是 $b=1, a=-1$，所以 $b-a=2$.

解后语 在运用两个集合相等条件解题时，要注意集合中的元素间互异、无序的特征，不要遗漏情形，也不能使集合中出现相同的元素.

例5 （2005年湖北省高考题） 设 P, Q 为两个非空实数集合，定义集合 $P+Q=\{a+b \mid a \in P, b \in Q\}$，若 $P=\{0, 2, 5\}$，$Q=\{1, 2, 6\}$，则 $P+Q$ 中元素的个数是（　　）

A. 9　　B. 8　　C. 7　　D. 6

解析 分别在集合 P, Q 中各取出一个元素相加，共得 $3 \times 3=9$ 个和，但 $0+6=5+1$，根据集合中元素的互异性，和 $0+6$ 与 $5+1$ 只能算一个元素，故选 B.

解后语 本题定义了一种新的集合运算. 对于这种“新概念”或“新运算”问题，先要理解新概念、新运算的含义再求解. 以上计算集合“$P+Q$”的元素个数时，一要运用合理的计算方法，二要注意“相等的和”只能算作一个.

1.2 子集、全集、补集

子集的定义 对于两个集合 A 和 B，如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，则称集合 A 为集合 B 的子集，记为 $A \subseteq B$（或 $B \supseteq A$），读作“集合 A 包含于集合 B”或“集合 B 包含集合 A”. 即：若任意 $x \in A \Rightarrow x \in B$，则 $A \subseteq B$.

规定：空集是任何集合的子集.

子集的性质 ① $A \subseteq A$，$\varnothing \subseteq A$；②若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$，则 $A=B$；③若 $A \subseteq B$，$B \subseteq C$，则 $A \subseteq C$.

真子集 如果 $A \subseteq B$，并且 $A \neq B$，这时集合 A 称为集合 B 的真子集，记为 $A \subsetneqq B$（或 $B \supsetneqq A$），读作“A 真包含于 B”或“B 真包含 A”.

例1 用适当的符号填空：

(1) $\{a\}$ ________ $\{a, b, c\}$；

(2) $\{a, b\}$ ________ $\{b, a\}$；

(3) $\{3, 5\}$ ________ $\{1, 3, 5, 7\}$；

(4) $\{2, 4, 6, 8\}$ ________ $\{2, 8\}$；

(5) $\varnothing$ ________ $\{1, 2, 3\}$

解析 (1) $\subsetneqq$；(2) $=$；(3) $\subsetneqq$；(4) $\supsetneqq$；(5) $\subsetneqq$.

解后语 (1)在判断满足“$A \subseteq B$”的集合 A 是否为集合 B 的真子集时，只需判断集合 B 中是否有元素**不属于** A 即可. (2)对于(1)(2)(3)(5)各题，均可填“$\subseteq$”，而第(2)、(4)题也可填“$\supseteq$”，但原来给出的答案更确切些.

例2 写出集合 $\{1, 2, 3\}$ 的所有子集.

解析 集合 $\{1, 2, 3\}$ 的所有子集是：$\varnothing$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{1, 2\}$，$\{1, 3\}$，$\{2, 3\}$，$\{1, 2, 3\}$.

解后语 若一个有限集合中的元素个数为 n，则它的子集共有 2^n 个. 如：集合 $\{a\}$ 的子集分别是：$\varnothing$，$\{a\}$，共 2^1 个；集合 $\{a, b\}$ 的子集分别是：$\varnothing$，$\{a\}$，$\{b\}$，$\{a, b\}$，共 2^2 个；…

例3 满足 $\{1, 2\} \subsetneqq M \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 集合 M 有 ________ 个.

解析 集合 M 中一定有元素 1，2，且至少含 3，4，5 中的一个，因此，集合 M 的个数等于集

合{3, 4, 5}的非空子集的个数，共 $2^3-1=7$ 个.

解后语　(1)对于含有 n 个元素的有限集合 M，真子集、非空子集、非空真子集的个数依次为 2^n-1, 2^n-1, 2^n-2. (2)转化思想在数学里是常用的，例如本题可以转化为较简单的例 2 求解.

例 4　(2006 年上海市高考题)　已知集合 $A=\{-1, 3, 2m-1\}$，集合 $B=\{3, m^2\}$. 若 $B\subseteq A$，则实数 $m=$ ________.

解析　由 $m^2=2m-1$ 得 $m=1$，经检验，$m=1$ 为所求.

解后语　在运用子集关系解有限集的问题时，要考察两个集合中的元素相等的各种可能情况，且要注意各自集合中元素的互异性.

例 5　(2003 年上海市春季高考题)　已知集合 $A=\{x\mid |x|\leqslant 2, x\in \mathbf{R}\}$，$B=\{x\mid x\geqslant a\}$，且 $A\subsetneqq B$，则实数 a 的取值范围是________.

解　集合 $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 2\}$，在数轴上表示出集合 A, B，使 $A\subsetneqq B$，如图 1-2-1，得 $a\leqslant -2$. 故填 $\{a\mid a\leqslant -2\}$.

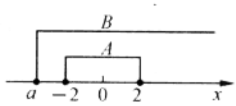


图 1-2-1

例 6　已知 $A=\{x\mid -2<x\leqslant 5\}$，$B=\{x\mid -m+1\leqslant x\leqslant 2m-1\}$，且 $B\subseteq A$，求实数 m 的取值范围.

解析　(1) $B\neq\varnothing$，即 $-m+1\leqslant 2m-1$ 时，依题意有 $B\subseteq A$，在数轴上作出包含关系图形，如图 1-2-2，有 $\begin{cases}-m+1\leqslant 2m-1,\\ -m+1>-2,\\ 2m-1\leqslant 5,\end{cases}$ 解得 $\dfrac{2}{3}\leqslant m<3$.

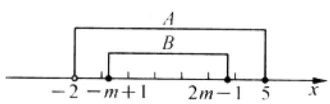


图 1-2-2

(2) $B=\varnothing$，即 $-m+1>2m-1$ 时，解得 $m<\dfrac{2}{3}$.

综上可知实数 m 的取值范围是 $m<3$.

解后语　在运用子集关系"$B\subseteq A$"解题时，往往会遗漏 $B=\varnothing$ 的情况，这是处理集合问题时经常出现的错误，对此要引起重视；另外，对于有关不等式解集的问题(如例 5、例 6)，要善于借助数轴求解.

补集的概念和表示　设 $A\subseteq S$，由 S 中不属于 A 的所有元素组成的集合称为 S 的子集 A 的补集，记为 $\complement_S A$(读作"A 在 S 中的补集")，即 $\complement_S A=\{x\mid x\in S, 且\ x\notin A\}$. 如图 1-2-3 所示，阴影部分表示集合 A 在集合 S 中的补集 $\complement_S A$.

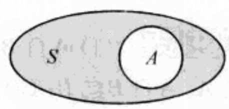


图 1-2-3

如果集合 S 含有我们所要研究的各个集合的全部元素，这个集合就可以看作一个全集，全集通常用字母 U 表示. 如：在实数范围内讨论问题时，可以把实数集看作全集 U，那么，有理数集 $\mathbf{Q}$ 的补集 $\complement_U\mathbf{Q}$ 就是全体无理数的集合.

注意点　(1)补集是相对于全集而言，离开全集谈补集没有意义. (2)若 $B=\complement_S A$，则 $A=\complement_S B$，即 $\complement_S(\complement_S A)=A$. (3) $\complement_S S=\varnothing$，$\complement_S\varnothing=S$.

例 7　(根据 2007 年陕西省高考题改编)　已知全集 $U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$，集合 $A=\{x\mid x\in\mathbf{Z}, |x-3|<2\}$，则集合 $\complement_U A$ 等于________

解析　由 $|x-3|<2$，得 $-2<x-3<2$，

所以 $1<x<5$，又 $x\in\mathbf{Z}$，得 $A=\{2, 3, 4\}$，

故 $\complement_U A=\{1, 5\}$.

解后语　在解集合问题时，常需先化简所给的集合，并用恰当的方法表示集合.

1.3 交集、并集

交集 由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素构成的集合，称为 A 与 B 的交集，记作 $A\cap B$，读作“A 交 B”，即 $A\cap B=\{x\mid x\in A$，且 $x\in B\}$. $A\cap B$ 可用图 1-3-1 中的阴影部分表示.

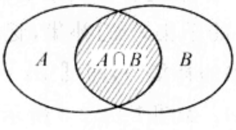


图 1-3-1

交集的性质 (1) $A\cap B=B\cap A$；(2) $A\cap B\subseteq A$，$A\cap B\subseteq B$；(3) 若 $A\subseteq B$，则 $A\cap B=A$；若 $A\cap B=A$，则 $A\subseteq B$. 如图 1-3-2.

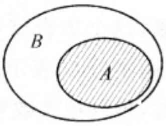


图 1-3-2

并集 由所有属于集合 A 或者属于集合 B 的元素构成的集合，称为 A 与 B 的并集，记作 $A\cup B$，读作“A 并 B”，即 $A\cup B=\{x\mid x\in A$，或 $x\in B\}$. $A\cup B$ 可用图1-3-3中的阴影表示.

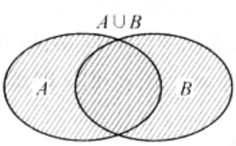


图 1-3-3

注意点 (1) $A\cup B$ 的元素 x 可分为 3 类：① $x\in A$ 但 $x\notin B$；② $x\in A$ 且 $x\in B$；③ $x\in B$ 但 $x\notin A$. (2)分清 $A\cap B$，$A\cup B$ 的定义中“且”与“或”的区别.

并集的性质 (1) $A\cup B=B\cup A$；(2) $A\cup B\supseteq A$，$A\cup B\supseteq B$，$A\cup B\supseteq A\cap B$；(3) 若 $A\subseteq B$，则 $A\cup B=B$；若 $A\cup B=B$，则 $A\subseteq B$. 如图 1-3-4.

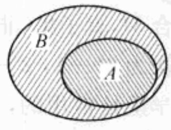


图 1-3-4

区间的概念 设 $a, b\in\mathbf{R}$，且 $a<b$，规定

$[a, b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$——闭区间；

$(a, b)=\{x\mid a<x<b\}$——开区间；

$[a, b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$——一种半开半闭区间，也读作“左闭右开区间”；

$(a, b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$——左开右闭区间；

$(a, +\infty)=\{x\mid x>a\}$——“$+\infty$”，读作“正无穷大”；

$(-\infty, b)=\{x\mid x<b\}$——“$-\infty$”，读作“负无穷大”；

$(-\infty, +\infty)=\mathbf{R}$.

例 1 已知集合 $A=\{x\mid -3\leqslant x\leqslant 1\}$，$B=\{x\mid |x|\leqslant 2\}$，则 $A\cap B=$ ________.

解 在数轴上表示出集合 A 和 B，易得 $A\cap B=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 1\}$.

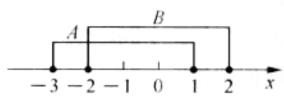


图 1-3-5

例 2 设 $A=\{x\mid 1-2x>0\}$，$B=\{x\mid x+1\geqslant 0\}$，则 $A\cap B=$ ________，$A\cup B=$ ________.

解析 化简集合 A，B，得 $A=\left\{x\,\middle|\,x<\frac{1}{2}\right\}$，$B=\{x\mid x\geqslant -1\}$，运用数轴可得 $A\cap B=\left\{x\,\middle|\,-1\leqslant x<\frac{1}{2}\right\}$，$A\cup B=\mathbf{R}$.

解后语 求交集、并集、补集，要充分发挥数轴的作用.

例 3 （2006 年辽宁省高考题） 设集合 $A=\{1,2\}$，则满足 $A\cup B=\{1,2,3\}$ 的集合 B 的个数是________.

解析 $A=\{1,2\}$，$A\cup B=\{1,2,3\}$，则集合 B 中必含有元素 3，即此题可转化为求集合 $A=\{1,2\}$ 的子集个数问题，所以满足题目条件的集合 B 共有 4 个.

解后语 本题考查对集合并集概念的深刻理解，易错解为“1 个”. 由“含有元素 3”转化为求 $\{1,2\}$ 的子集个数，抓住了问题的实质.

例 4 （2007 年江苏省高考题） 已知全集 $U=\mathbf{Z}$，$A=\{-1,0,1,2\}$，$B=\{x\mid x^2=x\}$，则 $A\cap\complement_U B$ 为________.

解析 $B=\{0,1\}$，$\complement_U B=\{x\mid x\in\mathbf{Z},x\neq 0,x\neq 1\}$，所以 $A\cap\complement_U B=\{-1,2\}$.

解后语 (1)在求解补集、交集、并集的混合运算问题时，要特别注意运算顺序.(2)理解集合表达式的意义有助于轻松解题. 本题中“$A\cap\complement_U B$”表示“属于 A 且不属于 B 的元素全体”，都可只在集合 A 中考虑，$\complement_U B$ 只是“虚晃一枪”.

例 5 （2004 年全国高考题） 设 A，B，I 均为非空集合，且满足 $A\subseteq B\subseteq I$，则下列各式中错误的是（　　）.

A. $(\complement_I A)\cup B=I$

B. $(\complement_I A)\cup(\complement_I B)=I$

C. $A\cap(\complement_I B)=\varnothing$

D. $(\complement_I A)\cup(\complement_I B)=\complement_I B$

解析 运用 Venn 图，如图 1－3－6，用阴影表示集合 $\complement_I A$，用阴影表示集合 B，易知选项 A 正确；如图 1－3－7，用阴影表示集合 $\complement_I A$，用阴影表示集合 $\complement_I B$，易得 $(\complement_I A)\cup(\complement_I B)=\complement_I A\neq I$，故选 B.

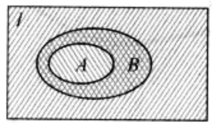


图 1－3－6

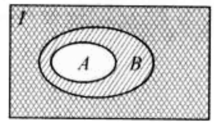


图 1－3－7

例 6 （2007 年福建省高考题） 已知集合 $A=\{x\mid x<a\}$，$B=\{x\mid 1<x<2\}$，且 $A\cup(\complement_{\mathbf{R}}B)=\mathbf{R}$，则实数 a 的取值范围是________.

解析 $\complement_{\mathbf{R}}B=\{x\mid x\leqslant 1$ 或 $x\geqslant 2\}$，在数轴上分别表示出集合 A 和 $\complement_{\mathbf{R}}B$，如图 1－3－8，使 $A\cup(\complement_{\mathbf{R}}B)=\mathbf{R}$ 成立的 a 的取值范围为 $\{a\mid a\geqslant 2\}$.

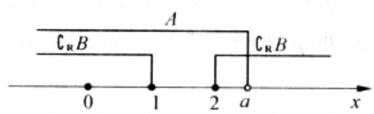


图 1－3－8

解后语 数轴和 Venn 图是进行集合的交、并、补运算的有力工具. 解题时要先把集合的各种形式化简，使其意义明确化，并尽可能地借助数轴、Venn 图等工具，将问题具体化、形象化，然后利用数形结合的思想方法解决.

第二章 常用逻辑用语

2.1 命题及其关系

命题 可以判断真假的语句叫做命题.

如“24 是 6 的倍数”,“菱形的对角线互相垂直”等都是命题. 而“$\sqrt{3}$是有理数吗?”就不是命题.

四种命题 一般地,设“若 p,则 q”为原命题,那么

“若 q,则 p”就叫做原命题的逆命题;

“若非 p,则非 q”就叫做原命题的否命题;

“若非 q,则非 p”就叫做原命题的逆否命题.

注意点 正确地写出一个命题的否命题,除分清命题的条件与结论外,还要对其中的关键词进行正确地否定.

例 1 命题“若 $ab=0$,则 $a=0$ 或 $b=0$”的逆命题为________,否命题为________,逆否命题为________.

解析 利用四种命题的概念,可得逆命题为“若 $a=0$ 或 $b=0$,则 $ab=0$”;否命题为“若 $ab\neq 0$,则 $a\neq 0$ 且 $b\neq 0$”;逆否命题为“若 $a\neq 0$ 且 $b\neq 0$,则 $ab\neq 0$”.

解后语 已知原命题求另外三种命题的关键在于弄清给出命题的条件和结论,根据定义来写,有时需要将命题改写为“如果……那么……”的形式.

例 2 (根据 2007 年重庆高考题改编)

命题“若 $x^2<1$,则 $-1<x<1$”的逆否命题是________.

解析 原命题的逆否命题是:若 $x\geq 1$ 或 $x\leq -1$,则 $x^2\geq 1$.

解后语 逆否命题是指对命题的条件与结论否定后再交换,$x^2<1$ 的否定是 $x^2\geq 1$,而 $-1<x<1$ 的否定是 $x\leq -1$ 或 $x\geq 1$,再交换即可.

四种命题之间的关系及真假判断 四种命题的关系可如图 2-1-1所示:

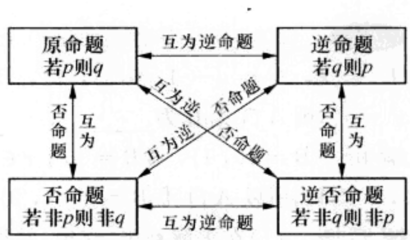


图 2-1-1

一般地,一个命题的真假与其他三个命题的真假有如下三种关系:

(1) 原命题为真,它的逆命题可真可假,如,原命题“若 $a=0$,则 $ab=0$”是真命题,其逆命题“若 $ab=0$,则 $a=0$”是假命题.

(2) 原命题为真,它的否命题可真可假,如,原命题“若 $a=0$,则 $ab=0$”是真命题,其否命题“若 $a\neq 0$,则 $ab\neq 0$”是假命题.

(3) 原命题为真,它的逆否命题一定为真,如,原命题“若 $a=0$,则 $ab=0$”是真命题,其逆否命题“若 $ab\neq 0$,则 $a\neq 0$”是真命题.

综上可知,在同一命题引出的四种命题中,互为逆否的命题是等价命题,它们同真同假. 故四种命题中,真命题的个数可以为 0 个,2 个或 4 个.

“若 p,则 q”形式的命题,判断其真假的方法一般是:若由“p”经过推理得出“q”,则可确定“若 p,则 q”为真;而确定“若 p,则 q”为假,只需举一个反例说明即可.

例 3 若命题 M 的逆命题为 N,命题 M 的否命题为 P,则 N 是 P 的(　　).

A．逆命题　　　　B．否命题

C．逆否命题　　　D．以上都不正确

解析　由命题关系可以知道原命题和逆否命题是等价命题，逆命题和否命题是等价命题，所以原命题的逆命题与否命题也是逆否命题，故答案填C.

解后语　由四种命题的关系可知：原命题M的逆命题N与原命题M的否命题P互为逆否命题，即N是P逆否命题.

例4　若$a, b, c\in \mathbf{R}$，写出命题"若$ac<0$，则$ax^2+bx+c=0$有两个不相等的实数根"的逆命题、否命题和逆否命题，并判断这三个命题的真假.

解析　逆命题：若$ax^2+bx+c=0$（$a, b, c\in \mathbf{R}$）有两个不相等的实数根，则$ac<0$. 是假命题.

否命题：若$ac\geqslant 0$，则$ax^2+bx+c=0$（$a, b, c\in \mathbf{R}$）没有两个不相等的实数根. 是假命题.

逆否命题：若$ax^2+bx+c=0$（$a, b, c\in \mathbf{R}$）没有两个不相等的实数根，则$ac\geqslant 0$，是真命题.

解后语　由各种命题的定义容易写出各种形式，再由相应知识点判断其真假. 本题中$ac<0$的否定是$ac\geqslant 0$，而$ax^2+bx+c=0$有两个不相等的实数根的否定是方程$ax^2+bx+c=0$没有两个不相等的实数根.

例5　命题"当$AB=AC$时，$\triangle ABC$为等腰三角形"与它的逆命题、否命题、逆否命题中，真命题的个数是________.

解析　根据已知命题，可以得出其他三种形式的命题，然后判断真假即可. 易知原命题与其逆否命题同为真命题，故答案填2.

解后语　原命题和逆否命题等价，否命题和逆命题等价. 如果判断一个命题的真假比较困难，可以改为判断其逆否命题的真假，利用命题的等价性来解.

充分条件、必要条件、充要条件　推出符号的含义：一般地，命题"若p，则q"为真，记作"$p\Rightarrow q$"；"若p则q"为假，记作"$p\not\Rightarrow q$".

一般地，如果$p\Rightarrow q$，那么称p为q的充分条件，同时称q为p的必要条件；

如果$p\Rightarrow q$，且$q\Rightarrow p$，那么称p是q的充分必要条件，简称为p是q的充要条件，记作$p\Leftrightarrow q$，同时q也是p的充要条件；

如果$p\Rightarrow q$，且$q\not\Rightarrow p$，那么称p是q的充分不必要条件；

如果$p\not\Rightarrow q$，且$q\Rightarrow p$，那么称p是q的必要不充分条件；

如果$p\not\Rightarrow q$，且$q\not\Rightarrow p$，那么称p是q的既不充分又不必要条件.

注意点　(1) 上述各种关系反映的是条件p和结论q之间的因果关系. 在结合具体问题判断时要注意：①确定条件是什么，结论是什么；②尝试从条件推结论，从结论推条件；③确定条件是结论的什么条件；④证明条件的充分性即证明原命题成立，证明条件的必要性即证明逆命题成立，证明命题的条件是充要的，就要证明原命题与逆命题同时成立.

(2) 对充要条件的同义表述要熟悉. 如："当且仅当"、"必须且只须"、"等价于"、"反之亦成立"等. 准确地理解和使用数学语言，对理解和把握数学知识是十分重要的.

(3) 若$p\Rightarrow q$，则p是q的充分条件，所谓"充分"，就是使q成立，只要有p成立就足够了. 若$q\Rightarrow p$，则p是q的必要条件，所谓"必要"，就是p是q成立必不可少的条件.

例6　(2007年天津市高考题)　"$a=2$"是"直线$ax+2y=0$平行于直线$x+y=1$"的(　　).

A．充分而不必要条件

B．必要而不充分条件

C．充分必要条件

D．既不充分也不必要条件

解析　若$a=2$，则直线$2x+2y=0$平行于直线$x+y=1$，则"$a=2$"是充分条件；直线$ax+2y=0$平行于直线$x+y=1$时，有$a=$

2，则“$a=2$”是必要条件，故“$a=2$”是“直线 $ax+2y=0$ 平行于直线 $x+y=1$”的充分必要条件. 因此，答案填 C.

解后语　根据充分条件和必要条件的概念可以得出判断，同时要注意推理的严密性. 当 $a=2$ 时，直接将 $a=2$ 代入直线方程，进行判断，当直线 $a_1x+b_1y+c_1=0$ 与直线 $a_2x+b_2y+c_2=0$ 平行时由 $a_1b_2-a_2b_1=0$ 可得 $a=2$.

例 7　(2007 年湖南省高考题)　设 p：$b^2-4ac>0\ (a\neq 0)$，q：关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ 有实根，则 p 是 q 的(　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

解析　由判别式大于 0，可知关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ 有实根；但关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ 有实根，判别式还可以等于 0，故答案选 A.

解后语　本题中关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ 有实根，但没有说明根的情况：可以有两个相等的根，也可以有两个不相等的根. 因此相应地，判别式可以等于 0，也可以大于 0，这是解决该题的关键所在.

例 8　求证：关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一个根为 1 的充要条件是 $a+b+c=0$.

解析　本题的条件是“$a+b+c=0$”，结论是关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一个根为 1. 下面给出证明过程.

证明　(1) 必要性：

若 $x=1$ 是关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根，

则 $a+b+c=0$.

(2) 充分性：

若 $a+b+c=0$，此时把 $x=1$ 代入所给方程的左边，

则左边 $a\cdot 1^2+b\cdot 1+c=a+b+c=0$，所以 $x=1$ 是所给方程的根.

由(1)(2)知，原命题成立.

解后语　对于有关充要条件的证明，必须证明充分性和必要性两方面，解题的关键是分清楚什么是条件，什么是结论，以及明确证明必要性或充分性相当于证明什么命题.

例 9　设甲是乙的充分非必要条件，乙是丙的充分必要条件，那么丙是甲的(　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 既不充分也不必要条件

D. 充要条件

解析　观察相互间的推出关系：甲 $\Rightarrow$ 乙 $\Leftrightarrow$ 丙，且乙 $\nRightarrow$ 甲，所以甲 $\Rightarrow$ 丙，丙 $\nRightarrow$ 甲，所以丙是甲的必要不充分条件. 故选 B.

解后语　有关的充分必要条件可以用符号表示，从而可以直观地观察其相互间的推出关系. 要注意箭头指向的单向性和双向性.

充分条件与必要条件的判断

判断方法：

(1) 直接由定义判断，须注意逻辑推理关系.

(2) 用四种命题的真假来判断：原命题正确，则条件是充分的，逆命题正确，则条件是必要的. 原命题与逆命题都正确，则条件是充要的. 原命题与逆命题都不正确，则条件既不充分也不必要. 由于原命题与它的逆否命题同真同假，多以有时也转化为判断它的逆否命题的真假.

例 10　(2006 年山东省高考题)　设 p：$x^2-x-20>0$，q：$\dfrac{1-x^2}{|x|-2}<0$，则 p 是 q 的(　　).

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件