

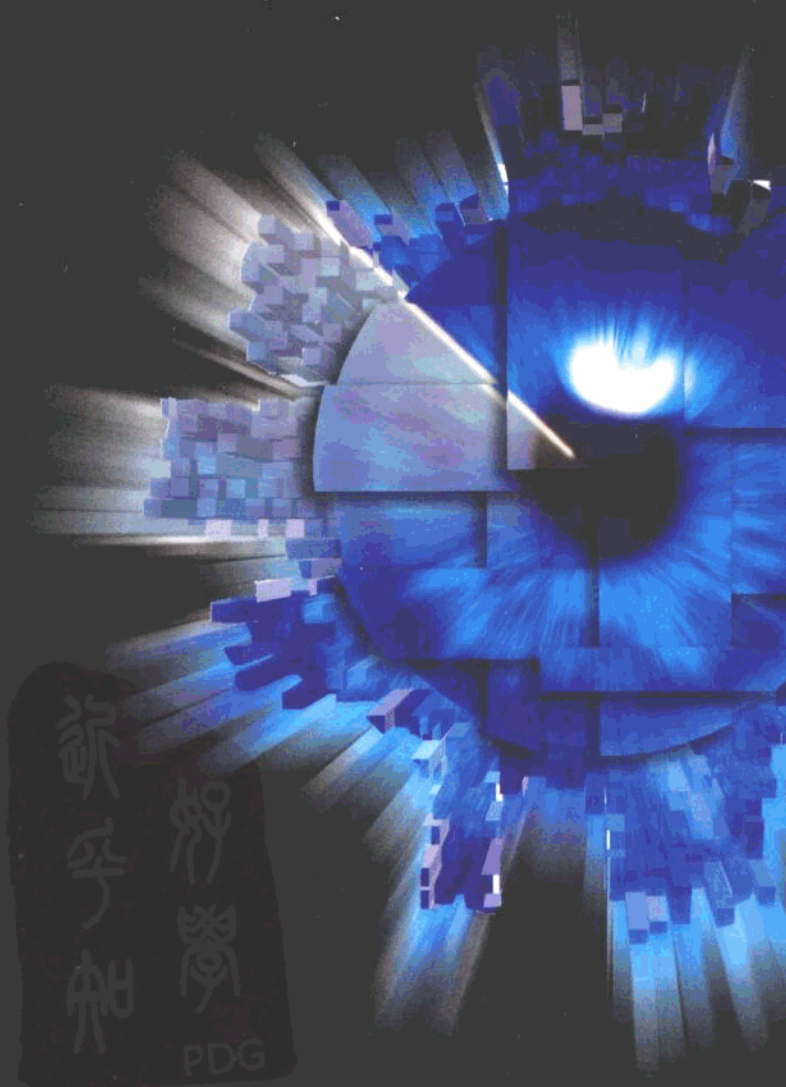
凤凰百通工具书

苏教金牌书系

新课程 新高考
搜索引擎 强力出击



点全搜索



高中
数学

凤凰出版传媒集团

江苏教育出版社
JIANGSU EDUCATION PUBLISHING HOUSE

高中数学

PDG

凤凰百通工具书

苏教金牌书系



高中数学

考点全搜索

主编 李善良
王玉宏

凤凰出版传媒集团



江苏教育出版社

JIANGSU EDUCATION PUBLISHING HOUSE

图书在版编目(CIP)数据

考点全搜索. 高中数学 / 李善良, 王玉宏主编. —南京: 江苏教育出版社, 2008. 5

ISBN 978 - 7 - 5343 - 8725 - 8

I. 考… II. ①李…②王… III. 数学课—高中—升学参考资料 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 064434 号

- 书 名 凤凰百通工具书
考点全搜索·高中数学
- 主 编 李善良 王玉宏
- 责任编辑 沙国祥
- 装帧设计 张金凤
- 出版发行 凤凰出版传媒集团
江苏教育出版社(南京市马家街 31 号 210009)
- 网 址 <http://www.1088.com.cn>
- 集团网址 凤凰出版传媒网 <http://www.ppm.cn>
- 经 销 江苏省新华发行集团有限公司
- 照 排 南京前锦排版服务有限公司
- 印 刷 南京爱新印务有限公司
- 厂 址 南京市雨花台东路 152 号(邮编 210012)
- 电 话 025 - 52417550
- 开 本 787×1092 毫米 1/16
- 印 张 19.25
- 插 页 1
- 版 次 2008 年 5 月第 1 版
2008 年 5 月第 1 次印刷
- 书 号 ISBN 978 - 7 - 5343 - 8725 - 8
- 定 价 44.00 元
- 批发电话 025 - 83260760, 83260768
- 邮购电话 025 - 85400774, 8008289797
- 短信咨询 10602585420909
- E-mail jsep@vip.163.com
- 盗版举报 025 - 83204538

苏教版图书若有印装错误可向承印厂调换
提供盗版线索者给予重奖

编者的话

高中阶段是学生应对高考的关键时期,而这一阶段的课程,涉及的内容很多,难度较大,考试要求复杂,因此在这宝贵的三年时间里,如何有效且高效地学习、记忆、提高是广大教师、学生在高中入门时就非常关注的问题。

《凤凰百通工具书·高中考点全搜索》是我社经过充分的市场调研,邀请特级教师精心打造推出的一套全新的词典类工具书。它全面搜索了高中阶段的定义定理、概念规律,通过例题及其分析,融学法指导、解题技巧于一体,旨在帮助学生及时理解知识点,消化疑难点,掌握技巧点,从而用最少的精力,取得最好的学习效果。

与以往的传统工具书相比,《高中考点全搜索》具有以下三大优势:

一、全程同步优势。《高中考点全搜索》和学校的教学进程完全同步,是高一学生就可以使用的,也是学好高中课程必备的助学读物,具有强大的学法指导功能。

二、新题好题优势。《高中考点全搜索》大量采用了近年来的高考题作为例题,紧密追踪高考新动态,具有强大的备战高考功能。

三、高考考点优势。《高中考点全搜索》以高考考点为词条,突显词典类工具书条目化优势,具有强大的查阅速记功能。

我们相信,《凤凰百通工具书·高中考点全搜索》从策划定位到内在质量都代表了教育大省——江苏的一流水平,是学生完成高中学业、顺利迈入理想大学的最强有力的支持!

参加本书编写的作者有李善良、王玉宏、陶兆龙、季斌、周家宽、张爱平、韩蕾、仇惠玲、戚有建、刘晓静、陈海华、龚海滨、蒋同山、葛文明、葛丹、胡志勇等。

欢迎使用本套工具书,并对书中的不足之处提供意见和建议,帮助我们做得更好。我们的地址是南京市马家街31号江苏教育出版社高中事业部,邮政编码:210009。E-mail:like@1088.com.cn。

江苏教育出版社

2008年4月

目 录

第一章 集合	1
1.1 集合的含义及其表示	1
1.2 子集、全集、补集	2
1.3 交集、并集	4
第二章 常用逻辑用语	6
2.1 命题及其关系	6
2.2 简单的逻辑联结词	9
2.3 全称量词与存在量词	11
第三章 函数概念与基本初等函数	15
一 函数的概念和图象	15
3.1 函数的概念和图象	15
3.2 函数的表示方法	18
3.3 函数的简单性质	19
3.4 映射的概念	23
二 指数函数	24
3.5 分数指数幂	24
3.6 指数函数	25
三 对数函数	28
3.7 对数	28
3.8 对数函数	29
四 幂函数	31
3.9 幂函数的图象和性质	31
五 函数与方程	33
3.10 二次函数与一元二次方程	33
3.11 用二分法求方程的近似解	35
六 函数在实际生活中的应用	36
3.12 函数模型及其应用	36
第四章 三角函数	41
4.1 任意角、弧度	41
4.2 任意角的三角函数	42
4.3 三角函数的图象和性质	45



第五章 平面向量	50
5.1 向量的概念及表示	50
5.2 向量的线性运算	51
5.3 向量的坐标表示	52
5.4 向量的数量积	55
5.5 向量的应用	57
第六章 三角恒等变换	59
6.1 两角和与差的三角函数	59
6.2 二倍角的三角函数	60
6.3 几个三角恒等式	62
第七章 解三角形	65
第八章 数列	71
8.1 数列的概念和简单表示	71
8.2 等差数列	72
8.3 等比数列	75
8.4 数列求和及数列应用题	78
第九章 不等式	83
9.1 一元二次不等式	83
9.2 二元一次不等式组与简单的线性规划问题	85
9.3 基本不等式	87
第十章 导数及其应用	92
10.1 导数的概念	92
10.2 导数的运算	94
10.3 导数在研究函数中的应用	95
10.4 导数在实际生活中的应用	99
10.5 定积分	100
第十一章 数系扩充与复数的引入	104
11.1 数系的扩充	104
11.2 复数的四则运算	104
11.3 复数的几何意义	106
第十二章 立体几何初步	110
一 空间几何体	110
12.1 棱柱、棱锥和棱台	110
12.2 圆柱、圆锥、圆台和球	113
12.3 中心投影和平行投影	115
12.4 直观图画法	116
二 点、线、面之间的位置关系	118
12.5 平面的基本性质	118
12.6 空间两条直线的位置关系	120

12.7	直线与平面的位置关系	122
12.8	平面与平面的位置关系	127
三	柱、锥、台、球的表面积和体积	131
12.9	空间图形的展开图	131
12.10	柱、锥、台、球的体积	134
第十三章	直线和圆的方程	136
一	直线与方程	136
13.1	直线的斜率	136
13.2	直线的方程	137
13.3	两条直线的平行与垂直	139
13.4	两条直线的交点	140
13.5	平面上两点间的距离	141
13.6	点到直线的距离	143
二	圆与方程	145
13.7	圆的方程	145
13.8	直线与圆的位置关系	147
13.9	圆与圆的位置关系	150
三	空间直角坐标系	151
13.10	空间直角坐标系	151
13.11	空间两点间的距离	153
第十四章	圆锥曲线与方程	155
14.1	椭圆	155
14.2	双曲线	159
14.3	抛物线	163
14.4	圆锥曲线的统一定义	167
14.5	曲线与方程	169
第十五章	统计	173
15.1	抽样方法	173
15.2	总体分布的估计	176
15.3	总体特征数的估计	178
15.4	线性回归方程	180
15.5	统计案例	181
第十六章	概率初步	185
16.1	随机事件及其概率	185
16.2	古典概型	186
16.3	几何概型	187
16.4	互斥事件	189
第十七章	算法初步	191
17.1	算法的含义	191

17.2	流程图	192
17.3	基本算法语句	194
17.4	算法案例	197
第十八章 推理与证明		199
18.1	合情推理与演绎推理	199
18.2	直接证明与间接证明	204
第十九章 空间向量与立体几何		209
一 空间向量及其运算		209
19.1	空间向量及其线性运算	209
19.2	共面向量定理	211
19.3	空间向量基本定理	212
19.4	空间向量的坐标表示	214
19.5	空间向量的数量积	215
二 空间向量的应用		217
19.6	直线的方向向量和平面的法向量	217
19.7	空间线面关系的判定	217
19.8	空间角的计算	220
第二十章 计数原理		225
20.1	两个基本计数原理	225
20.2	排列	226
20.3	组合	228
20.4	计数应用题	230
20.5	二项式定理	231
第二十一章 概率		234
21.1	随机变量及其概率分布	234
21.2	超几何分布	236
21.3	独立性	237
21.4	二项分布	240
21.5	随机变量的均值和方差	242
21.6	正态分布	245
第二十二章 几何证明选讲		249
一 相似三角形的进一步认识		249
22.1	平行线分线段成比例定理	249
22.2	相似三角形	250
二 圆的进一步认识		252
22.3	圆周角定理	252
22.4	圆的切线	253
22.5	圆中比例线段	257
22.6	圆内接四边形	259

第二十三章 矩阵与变换	262
23.1 二阶矩阵与平面向量	262
23.2 几种常见的平面变换	263
23.3 变换的复合与矩阵的乘法	264
23.4 逆变换与逆矩阵	266
23.5 特征值与特征向量	267
23.6 矩阵的简单应用	268
第二十四章 坐标系与参数方程	272
一 坐标系	272
24.1 极坐标系	272
24.2 曲线的极坐标方程	273
24.3 常用曲线的极坐标方程	274
二 参数方程	278
24.4 参数方程的意义	278
24.5 参数方程与普通方程的互化	278
24.6 参数方程的应用	279
第二十五章 不等式选讲	281
25.1 不等式的基本性质	281
25.2 含有绝对值的不等式	282
25.3 不等式的证明	285
25.4 几个著名的不等式	286
25.5 利用不等式求最大(小)值	288
25.6 数学归纳法与不等式	290
索引	293



1.1 集合的含义及其表示

集合的含义 一定范围内某些确定的、不同对象的全体构成一个集合. 集合中的每一个对象称为该集合的元素.

集合的表示 (1)列举法:将集合的元素一一列举出来,并置于花括号“{}”内,元素之间要用“,”隔开,列举时与元素的次序无关,例如集合{1, 2, 3}与集合{2, 1, 3}表示同一个集合.(2)描述法:将集合的所有元素都具有的性质(满足的条件)表示出来,写成 $\{x|P(x)\}$ 的形式.竖线左边的 x 叫作此集合的代表元素,竖线右边的 $P(x)$ 表示元素 x 所具有的公共属性.(3)Venn图表示法:将集合的所有元素写在一个圆圈用来形象直观地表示这个集合.

几个特殊数集的记号 自然数集: \mathbf{N} ;正整数集: \mathbf{N}^* 或 \mathbf{N}_+ ;整数集: \mathbf{Z} ;有理数集: \mathbf{Q} ;实数集: \mathbf{R} .

例 1 用列举法表示下列集合 A :

① $A = \{x | x \text{ 是 } 10 \text{ 的约数}, x \in \mathbf{N}^*\}$;
 ② $A = \{(x, y) | x \in \{1, 2\}, y \in \{2, 3\}\}$;

③ $A = \{x | x = (-1)^n, n \in \mathbf{N}\}$.

解析 ① $A = \{1, 2, 5, 10\}$;

② $A = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)\}$;

③ $A = \{1, -1\}$.

解后语 用列举法表示一个集合时,首

先要仔细分析条件对集合元素的描述,弄清集合中元素的特征,然后不重不漏地写出所有符合条件的元素.

例 2 用描述法表示下列集合:

① 偶数集;

② 不等式 $2x - 1 > 0$ 的解集;

③ $\{1, 3, 5, 7, 9\}$.

解析 ① $\{x | x = 2n, n \in \mathbf{Z}\}$;

② $\{x | 2x - 1 > 0\}$;

③ $\{x | x = 2n + 1, n \in \mathbf{N}, n \leq 4\}$.

解后语 用描述法表示一个集合时,首先要仔细分析条件中描述的各元素的共同特征,用恰当的公式等数学语言概括这些特征,然后用描述法写出集合.

元素和集合之间的共界

如果 a 是集合 A 的元素,就记作 $a \in A$;如果 a 不是集合 A 的元素,就记作 $a \notin A$.

例 3 用“ \in ”或“ \notin ”填空:

(1) $\frac{1}{2}$ $\underline{\hspace{1cm}}$ \mathbf{N} , -1 $\underline{\hspace{1cm}}$ \mathbf{Z} ,

$-\sqrt{5}$ $\underline{\hspace{1cm}}$ \mathbf{Q} , $-\sqrt{5}$ $\underline{\hspace{1cm}}$ \mathbf{R} ;

(2) $\sqrt{2}$ $\underline{\hspace{1cm}}$ $\left\{x \mid x < \frac{3}{2}\right\}$,

$\frac{3}{2}$ $\underline{\hspace{1cm}}$ $\left\{x \mid x < \frac{3}{2}\right\}$;

(3) $A = \{x | x > 3 \text{ 或 } x < 1, x \in \mathbf{Z}\}$, 则
 3.5 $\underline{\hspace{1cm}}$ A , -2 $\underline{\hspace{1cm}}$ A .

解析 (1) \notin, \in, \notin, \in ;

(2) \in, \notin ;

(3) \notin, \in .

解后语 判断元素和集合之间的关系时,首先要弄清所给集合中的元素满足的条件,然后再判断所给元素是否满足条件.

集合的分类 含有有限个元素的集合称为有限集;若一个集合不是有限集,就称此集合为无限集;把不含任何元素的集合称为空集,记作 \emptyset .如集合 $\{1, 2, 3\}$ 是有限集,集合 $\{x | 1 < x < 3\}$ 是无限集,集合 $\{x | x^2 + 2 = 0, x \in \mathbf{R}\}$ 是空集.

两个集合相等 如果两个集合所含的元素完全相同,则称这两个集合相等.如 $\{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\} = \{1, 2\} = \{2, 1\}$.

集合中元素的特征 集合中的元素具有互异性、无序性和确定性.

例4 (根据2007年全国高考理科题改编) 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 集合 $\{1, a+b, a\} = \{0, \frac{b}{a}, b\}$, 则 $b-a =$ _____.

解析 由条件得 $a \neq 0$, 因此 $a+b=0$, 所以 $a \neq b$, 于是 $b=1, a=-1$, 所以 $b-a=2$.

解后语 在运用两个集合相等条件解题时,要注意集合中的元素间互异、无序的特征,不要遗漏情形,也不能使集合中出现相同的元素.

例5 (2005年湖北省高考题) 设 P, Q 为两个非空实数集合,定义集合 $P+Q = \{a+b \mid a \in P, b \in Q\}$, 若 $P = \{0, 2, 5\}$, $Q = \{1, 2, 6\}$, 则 $P+Q$ 中元素的个数是 ()

A. 9 B. 8 C. 7 D. 6

解析 分别在集合 P, Q 中各取出一个元素相加,共得 $3 \times 3 = 9$ 个和,但 $0+6=5+1$, 根据集合中元素的互异性,和 $0+6$ 与 $5+1$ 只能算一个元素,故选 B.

解后语 本题定义了一种新的集合运算.对于这种“新概念”或“新运算”问题,先要理解新概念、新运算的含义再求解.以上计算集合“ $P+Q$ ”的元素个数时,一要运用合理的计算方法,二要注意“相等的和”只能算作一个.

1.2 子集、全集、补集

子集的定义 对于两个集合 A 和 B , 如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素,则称集合 A 为集合 B 的子集,记为

$A \subseteq B$ (或 $B \supseteq A$), 读作“集合 A 包含于集合 B ”或“集合 B 包含集合 A ”.即:若任意 $x \in A \Rightarrow x \in B$, 则 $A \subseteq B$.

规定:空集是任何集合的子集.

子集的性质 ① $A \subseteq A, \emptyset \subseteq A$; ②若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$, 则 $A = B$; ③若 $A \subseteq B, B \subseteq C$, 则 $A \subseteq C$.

真子集 如果 $A \subseteq B$, 并且 $A \neq B$, 这时集合 A 称为集合 B 的真子集,记为 $A \subsetneq B$ (或 $B \supsetneq A$), 读作“ A 真包含于 B ”或“ B 真包含 A ”.

例1 用适当的符号填空:

- (1) $\{a\}$ _____ $\{a, b, c\}$;
 (2) $\{a, b\}$ _____ $\{b, a\}$;
 (3) $\{3, 5\}$ _____ $\{1, 3, 5, 7\}$;
 (4) $\{2, 4, 6, 8\}$ _____ $\{2, 8\}$;
 (5) \emptyset _____ $\{1, 2, 3\}$

解析 (1) \subsetneq ; (2) $=$; (3) \subsetneq ; (4) \supsetneq ; (5) \subsetneq .

解后语 (1)在判断满足“ $A \subseteq B$ ”的集合 A 是否为集合 B 的真子集时,只需判断集合 B 中是否有元素不属于 A 即可.(2)对于(1)(2)(3)(5)各题,均可填“ \subseteq ”,而第(2)、(4)题也可填“ \supseteq ”,但原来给出的答案更确切些.

例2 写出集合 $\{1, 2, 3\}$ 的所有子集.

解析 集合 $\{1, 2, 3\}$ 的所有子集是: $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$.

解后语 若一个有限集合中的元素个数为 n , 则它的子集共有 2^n 个.如:集合 $\{a\}$ 的子集分别是: $\emptyset, \{a\}$, 共 2^1 个; 集合 $\{a, b\}$ 的子集分别是: $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$, 共 2^2 个; ...

例3 满足 $\{1, 2\} \subsetneq M \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 集合 M 有 _____ 个.

解析 集合 M 中一定有元素 $1, 2$, 且至少含 $3, 4, 5$ 中的一个, 因此, 集合 M 的个数等于集

合 $\{3, 4, 5\}$ 的非空子集的个数,共 $2^3 - 1 = 7$ 个.

解后语 (1)对于含有 n 个元素的有限集合 M ,真子集、非空子集、非空真子集的个数依次为 $2^n - 1, 2^n - 1, 2^n - 2$. (2)转化思想在数学里是常用的,例如本题可以转化为较简单的例2求解.

例4 (2006年上海市高考题) 已知集合 $A = \{-1, 3, 2m - 1\}$,集合 $B = \{3, m^2\}$.若 $B \subseteq A$,则实数 $m =$ _____.

解析 由 $m^2 = 2m - 1$ 得 $m = 1$,经检验, $m = 1$ 为所求.

解后语 在运用子集关系解有限集的问题时,要考察两个集合中的元素相等的各种可能情况,且要注意各自集合中元素的互异性.

例5 (2003年上海市春季高考题) 已知集合 $A = \{x \mid x \leq 2, x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{x \mid x \geq a\}$,且 $A \subsetneq B$,则实数 a 的取值范围是_____.

解 集合 $A = \{x \mid -2 \leq x \leq 2\}$,在数轴上表示出集合

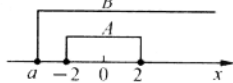


图 1-2-1

A, B ,使 $A \subsetneq B$,如图 1-2-1,得 $a < -2$.故填 $\{a \mid a < -2\}$.

例6 已知 $A = \{x \mid -2 < x \leq 5\}$, $B = \{x \mid -m + 1 \leq x \leq 2m - 1\}$,且 $B \subseteq A$,求实数 m 的取值范围.

解析 (1) $B \neq \emptyset$,即 $-m + 1 \leq 2m - 1$ 时,依题意有 $B \subseteq A$,在数轴上作出包含关系

图形,如图 1-2-2,有
$$\begin{cases} -m + 1 \leq 2m - 1, \\ -m + 1 > -2, \\ 2m - 1 \leq 5, \end{cases} \quad \text{解}$$

得 $\frac{2}{3} \leq m < 3$.

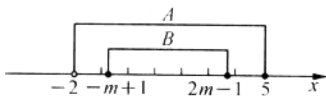


图 1-2-2

(2) $B = \emptyset$,即 $-m + 1 > 2m - 1$ 时,解得

$$m < \frac{2}{3}.$$

综上可知实数 m 的取值范围是 $m < 3$.

解后语 在运用子集关系“ $B \subseteq A$ ”解题时,往往会遗漏 $B = \emptyset$ 的情况,这是处理集合问题时经常出现的错误,对此要引起重视;另外,对于有关不等式解集的问题(如例5、例6),要善于借助数轴求解.

补集的概念和表示

设 $A \subseteq S$,由 S 中不属于 A 的所有元素组成的集合称为 S 的子集 A 的补集,记为 $\complement_s A$ (读作“ A 在 S 中的补集”),即 $\complement_s A = \{x \mid x \in S, \text{且 } x \notin A\}$.如图 1-2-3 所示,阴影部分表示集合 A 在集合 S 中的补集 $\complement_s A$.

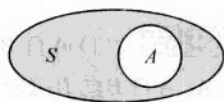


图 1-2-3

如果集合 S 含有我们所要研究的各个集合的全部元素,这个集合就可以看作一个全集,全集通常用字母 U 表示.如:在实数范围内讨论问题时,可以把实数集看作全集 U ,那么,有理数集 \mathbf{Q} 的补集 $\complement_U \mathbf{Q}$ 就是全体无理数的集合.

注意点 (1)补集是相对于全集而言,离开全集谈补集没有意义. (2)若 $B = \complement_s A$,则 $A = \complement_s B$,即 $\complement_s(\complement_s A) = A$. (3) $\complement_s S = \emptyset$, $\complement_s \emptyset = S$.

例7 (根据 2007 年陕西省高考题改编) 已知全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,集合 $A = \{x \mid x \in \mathbf{Z}, |x - 3| < 2\}$,则集合 $\complement_U A$ 等于

解析 由 $|x - 3| < 2$,得 $-2 < x - 3 < 2$,

所以 $1 < x < 5$,又 $x \in \mathbf{Z}$,得 $A = \{2, 3, 4\}$,故 $\complement_U A = \{1, 5\}$.

解后语 在解集合问题时,常需先化简所给的集合,并用恰当的方法表示集合.

1.3 交集、并集

交集 由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素构成的集合,称为 A 与 B 的交集,记作 $A \cap B$,读作“ A 交 B ”,即 $A \cap B = \{x | x \in A, \text{且 } x \in B\}$. $A \cap B$ 可用图 1-3-1 中的阴影部分表示.

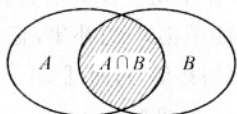


图 1-3-1

交集的性质 (1) $A \cap B = B \cap A$;
(2) $A \cap B \subseteq A, A \cap B \subseteq B$;
(3) 若 $A \subseteq B$, 则 $A \cap B = A$; 若 $A \cap B = A$, 则 $A \subseteq B$. 如图 1-3-2.

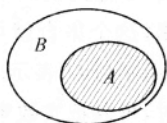


图 1-3-2

并集 由所有属于集合 A 或者属于集合 B 的元素构成的集合,称为 A 与 B 的并集,记作 $A \cup B$,读作“ A 并 B ”,即 $A \cup B = \{x | x \in A, \text{或 } x \in B\}$. $A \cup B$ 可用图 1-3-3 中的阴影表示.

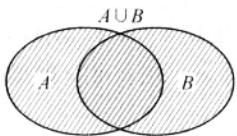


图 1-3-3

注意点 (1) $A \cup B$ 的元素 x 可分为 3 类:① $x \in A$ 但 $x \notin B$; ② $x \in A$ 且 $x \in B$; ③ $x \in B$ 但 $x \notin A$. (2) 分清 $A \cap B, A \cup B$ 的定义中“且”与“或”的区别.

并集的性质 (1) $A \cup B = B \cup A$;

(2) $A \cup B \supseteq A, A \cup B \supseteq B, A \cup B \supseteq A \cap B$;

(3) 若 $A \subseteq B$, 则 $A \cup B = B$;

若 $A \cup B = B$, 则 $A \subseteq B$.

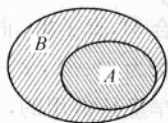


图 1-3-4

如图 1-3-4.

区间的概念 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 且 $a < b$, 规定

$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$ —— 闭区间;

$(a, b) = \{x | a < x < b\}$ —— 开区间;

$[a, b) = \{x | a \leq x < b\}$ —— 一种半开半闭区间,也读作“左闭右开区间”;

$(a, b] = \{x | a < x \leq b\}$ —— 左开右闭区间;

$(a, +\infty) = \{x | x > a\}$ —— “ $+\infty$ ”,读作“正无穷大”;

$(-\infty, b) = \{x | x < b\}$ —— “ $-\infty$ ”,读作“负无穷大”;

$(-\infty, +\infty) = \mathbf{R}$.

例 1 已知集合 $A = \{x | -3 \leq x \leq 1\}$, $B = \{x | |x| \leq 2\}$, 则 $A \cap B =$ _____.

解 在数轴上表示出集合 A 和 B , 易得

$A \cap B = \{x | -2 \leq x \leq 1\}$.

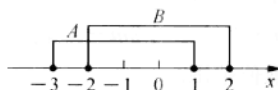


图 1-3-5

例 2 设 $A = \{x | 1 - 2x > 0\}$, $B = \{x | x + 1 \geq 0\}$, 则 $A \cap B =$ _____, $A \cup B =$ _____.

解析 化简集合 A, B , 得 $A = \{x | x <$

$\frac{1}{2}\}$, $B = \{x | x \geq -1\}$, 运用数轴可得 $A \cap B$

$= \{x | -1 \leq x < \frac{1}{2}\}$, $A \cup B = \mathbf{R}$.

解后语 求交集、并集、补集,要充分发挥数轴的作用.



例 3 (2006 年辽宁省高考题) 设集合 $A = \{1, 2\}$, 则满足 $A \cup B = \{1, 2, 3\}$ 的集合 B 的个数是_____.

解析 $A = \{1, 2\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3\}$, 则集合 B 中必含有元素 3, 即此题可转化为求集合 $A = \{1, 2\}$ 的子集个数问题, 所以满足题目条件的集合 B 共有 4 个.

解后语 本题考查对集合并集概念的深刻理解, 易错解为“1 个”. 由“含有元素 3”转化为求 $\{1, 2\}$ 的子集个数, 抓住了问题的实质.

例 4 (2007 年江苏省高考题) 已知全集 $U = \mathbf{Z}$, $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \{x | x^2 = x\}$, 则 $A \cap \complement_U B$ 为_____.

解析 $B = \{0, 1\}$, $\complement_U B = \{x | x \in \mathbf{Z}, x \neq 0, x \neq 1\}$, 所以 $A \cap \complement_U B = \{-1, 2\}$.

解后语 (1) 在求解补集、交集、并集的混合运算问题时, 要特别注意运算顺序. (2) 理解集合表达式的意义有助于轻松解题. 本题中“ $A \cap \complement_U B$ ”表示“属于 A 且不属于 B 的元素全体”, 都可只在集合 A 中考虑, $\complement_U B$ 只是“虚晃一枪”.

例 5 (2004 年全国高考题) 设 A, B, I 均为非空集合, 且满足 $A \subseteq B \subseteq I$, 则下列各式中错误的是().

- A. $(\complement_I A) \cup B = I$
- B. $(\complement_I A) \cup (\complement_I B) = I$
- C. $A \cap (\complement_I B) = \emptyset$
- D. $(\complement_I A) \cup (\complement_I B) = \complement_I B$

解析 运用 Venn 图, 如图 1-3-6, 用 // 阴影表示集合 $\complement_I A$, 用 \\\\\ 阴影表示集合 B , 易知选项 A 正确; 如图 1-3-7, 用 // 阴影表示集合 $\complement_I A$, 用 \\\\\ 阴影表示集合 $\complement_I B$, 易得 $(\complement_I A) \cup (\complement_I B) = \complement_I A \neq I$, 故选 B.

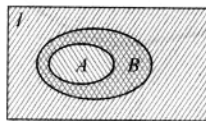


图 1-3-6

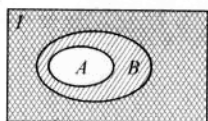


图 1-3-7

例 6 (2007 年福建省高考题) 已知集合 $A = \{x | x < a\}$, $B = \{x | 1 < x < 2\}$, 且 $A \cup (\complement_{\mathbf{R}} B) = \mathbf{R}$, 则实数 a 的取值范围是_____.

解析 $\complement_{\mathbf{R}} B = \{x | x \leq 1 \text{ 或 } x \geq 2\}$, 在数轴上分别表示出集合 A 和 $\complement_{\mathbf{R}} B$, 如图 1-3-8, 使 $A \cup (\complement_{\mathbf{R}} B) = \mathbf{R}$ 成立的 a 的取值范围为 $\{a | a \geq 2\}$.

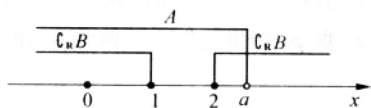


图 1-3-8

解后语 数轴和 Venn 图是进行集合的交、并、补运算的有力工具. 解题时要先把集合的各种形式化简, 使其意义明确化, 并尽可能地借助数轴、Venn 图等工具, 将问题具体化、形象化, 然后利用数形结合的思想方法解决.



2.1 命题及其关系

命题 可以判断真假的语句叫做命题。

如“24是6的倍数”，“菱形的对角线互相垂直”等都是命题。而“ $\sqrt{3}$ 是有理数吗？”就不是命题。

四种命题 一般地，设“若 p ，则 q ”为原命题，那么

“若 q ，则 p ”就叫做原命题的逆命题；

“若非 p ，则非 q ”就叫做原命题的否命题；

“若非 q ，则非 p ”就叫做原命题的逆否命题。

注意 正确地写出一个命题的否命题，除分清命题的条件与结论外，还要对其中的关键词进行正确地否定。

例1 命题“若 $ab=0$ ，则 $a=0$ 或 $b=0$ ”的逆命题为_____，否命题为_____，逆否命题为_____。

解析 利用四种命题的概念，可得逆命题为“若 $a=0$ 或 $b=0$ ，则 $ab=0$ ”；否命题为“若 $ab \neq 0$ ，则 $a \neq 0$ 且 $b \neq 0$ ”；逆否命题为“若 $a \neq 0$ 且 $b \neq 0$ ，则 $ab \neq 0$ ”。

解后语 已知原命题求另外三种命题的关键在于弄清给出命题的条件和结论，根据定义来写，有时需要将命题改写为“如果……那么……”的形式。

例2 (根据2007年重庆高考题改编) 命题“若 $x^2 < 1$ ，则 $-1 < x < 1$ ”的逆否命题是

解析 原命题的逆否命题是：若 $x \geq 1$ 或 $x \leq -1$ ，则 $x^2 \geq 1$ 。

解后语 逆否命题是指对命题的条件与结论否定后再交换， $x^2 < 1$ 的否定是 $x^2 \geq 1$ ，而 $-1 < x < 1$ 的否定是 $x \leq -1$ 或 $x \geq 1$ ，再交换即可。

四种命题之间的关系及真假判断

四种命题的关系可如图2-1-1所示：

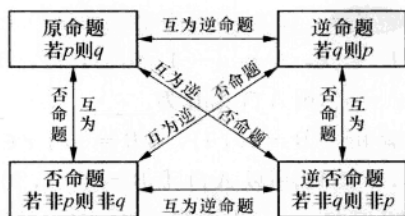


图 2-1-1

一般地，一个命题的真假与其他三个命题的真假有如下三种关系：

(1) 原命题为真，它的逆命题可真可假，如，原命题“若 $a=0$ ，则 $ab=0$ ”是真命题，其逆命题“若 $ab=0$ ，则 $a=0$ ”是假命题。

(2) 原命题为真，它的否命题可真可假，如，原命题“若 $a=0$ ，则 $ab=0$ ”是真命题，其否命题“若 $a \neq 0$ ，则 $ab \neq 0$ ”是假命题。

(3) 原命题为真，它的逆否命题一定为真，如，原命题“若 $a=0$ ，则 $ab=0$ ”是真命题，其逆否命题“若 $ab \neq 0$ ，则 $a \neq 0$ ”是真命题。

综上所述，在同一命题引出的四种命题中，互为逆否的命题是等价命题，它们同真同假。故四种命题中，真命题的个数可以为0个，2个或4个。

“若 p ，则 q ”形式的命题，判断其真假的方法一般是：若由“ p ”经过推理得出“ q ”，则可确定“若 p ，则 q ”为真；而确定“若 p ，则 q ”为假，只需举一个反例说明即可。

例3 若命题 M 的逆命题为 N ，命题 M 的否命题为 P ，则 N 是 P 的()。

- A. 逆命题 B. 否命题
C. 逆否命题 D. 以上都不正确

解析 由命题关系可以知道原命题和逆否命题是等价命题,逆命题和否命题是等价命题,所以原命题的逆命题与否命题也是逆否命题,故答案填 C.

解后语 由四种命题的关系可知:原命题 M 的逆命题 N 与原命题 M 的否命题 P 互为逆否命题,即 N 是 P 逆否命题.

例 4 若 $a, b, c \in \mathbf{R}$, 写出命题“若 $ac < 0$, 则 $ax^2 + bx + c = 0$ 有两个不相等的实数根”的逆命题、否命题和逆否命题,并判断这三个命题的真假.

解析 逆命题:若 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbf{R}$) 有两个不相等的实数根,则 $ac < 0$. 是假命题.

否命题:若 $ac \geq 0$, 则 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbf{R}$) 没有两个不相等的实数根. 是假命题.

逆否命题:若 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbf{R}$) 没有两个不相等的实数根,则 $ac \geq 0$, 是真命题.

解后语 由各种命题的定义容易写出各种形式,再由相应知识点判断其真假. 本题中 $ac < 0$ 的否定是 $ac \geq 0$, 而 $ax^2 + bx + c = 0$ 有两个不相等的实数根的否定是方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 没有两个不相等的实数根.

例 5 命题“当 $AB=AC$ 时, $\triangle ABC$ 为等腰三角形”与它的逆命题、否命题、逆否命题中,真命题的个数是_____.

解析 根据已知命题,可以得出其他三种形式的命题,然后判断真假即可. 易知原命题与其逆否命题同为真命题,故答案填 2.

解后语 原命题和逆否命题等价,否命题和逆命题等价. 如果判断一个命题的真假比较困难,可以改为判断其逆否命题的真假,利用命题的等价性来解.

充分条件、必要条件、充要条件

推出符号的含义:一般地,

命题“若 p , 则 q ”为真,记作“ $p \Rightarrow q$ ”;“若 p 则 q ”为假,记作“ $p \nRightarrow q$ ”.

一般地,如果 $p \Rightarrow q$, 那么称 p 为 q 的充分条件,同时称 q 为 p 的必要条件;

如果 $p \Rightarrow q$, 且 $q \Rightarrow p$, 那么称 p 是 q 的充分必要条件,简称为 p 是 q 的充要条件,记作 $p \Leftrightarrow q$, 同时 q 也是 p 的充要条件;

如果 $p \Rightarrow q$, 且 $q \nRightarrow p$, 那么称 p 是 q 的充分不必要条件;

如果 $p \nRightarrow q$, 且 $q \Rightarrow p$, 那么称 p 是 q 的必要不充分条件;

如果 $p \nRightarrow q$, 且 $q \nRightarrow p$, 那么称 p 是 q 的既不充分又不必要条件.

注意 (1) 上述各种关系反映的是条件 p 和结论 q 之间的因果关系. 在结合具体问题判断时要注意:①确定条件是什么,结论是什么;②尝试从条件推结论,从结论推条件;③确定条件是结论的什么条件;④证明条件的充分性即证明原命题成立,证明条件的必要性即证明逆命题成立,证明命题的条件是充要的,就要证明原命题与逆命题同时成立.

(2) 对充要条件的同义表述要熟悉. 如:“当且仅当”,“必须且只须”,“等价于”,“反之亦成立”等. 准确地理解和使用数学语言,对理解和把握数学知识是十分重要的.

(3) 若 $p \Rightarrow q$, 则 p 是 q 的充分条件,所谓“充分”,就是使 q 成立,只要有 p 成立就足够了. 若 $q \Rightarrow p$, 则 p 是 q 的必要条件,所谓“必要”,就是 p 是 q 成立必不可少的条件.

例 6 (2007 年天津市高考题) “ $a = 2$ ”是“直线 $ax + 2y = 0$ 平行于直线 $x + y = 1$ ”的().

- A. 充分而不必要条件
B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件
D. 既不充分也不必要条件

解析 若 $a = 2$, 则直线 $2x + 2y = 0$ 平行于直线 $x + y = 1$, 则“ $a = 2$ ”是充分条件; 直线 $ax + 2y = 0$ 平行于直线 $x + y = 1$ 时, 有 $a =$

2, 则“ $a=2$ ”是必要条件, 故“ $a=2$ ”是“直线 $ax+2y=0$ 平行于直线 $x+y=1$ ”的充分必要条件. 因此, 答案填 C.

解后语 根据充分条件和必要条件的概念可以得出判断, 同时要注意推理的严密性. 当 $a=2$ 时, 直接将 $a=2$ 代入直线方程, 进行判断, 当直线 $a_1x+b_1y+c_1=0$ 与直线 $a_2x+b_2y+c_2=0$ 平行时由 $a_1b_2-a_2b_1=0$ 可得 $a=2$.

例 7 (2007 年湖南省高考题) 设 $p: b^2-4ac > 0 (a \neq 0)$, q : 关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0 (a \neq 0)$ 有实根, 则 p 是 q 的 ()

- A. 充分不必要条件
- B. 必要不充分条件
- C. 充分必要条件
- D. 既不充分也不必要条件

解析 由判别式大于 0, 可知关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0 (a \neq 0)$ 有实根; 但关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0 (a \neq 0)$ 有实根, 判别式还可以等于 0, 故答案选 A.

解后语 本题中关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0 (a \neq 0)$ 有实根, 但没有说明根的情况: 可以有两个相等的根, 也可以有两个不相等的根. 因此相应地, 判别式可以等于 0, 也可以大于 0, 这是解决该题的关键所在.

例 8 求证: 关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一个根为 1 的充要条件是 $a+b+c=0$.

解析 本题的条件是“ $a+b+c=0$ ”, 结论是关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一个根为 1. 下面给出证明过程.

证明 (1) 必要性:

若 $x=1$ 是关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根,

则 $a+b+c=0$.

(2) 充分性:

若 $a+b+c=0$, 此时把 $x=1$ 代入所给方程的左边,

则左边 $a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = a + b + c = 0$,

所以 $x=1$ 是所给方程的根.

由(1)(2)知, 原命题成立.

解后语 对于有关充要条件的证明, 必须证明充分性和必要性两方面, 解题的关键是分清楚什么是条件, 什么是结论, 以及明确证明必要性或充分性相当于证明什么命题.

例 9 设甲是乙的充分非必要条件, 乙是丙的充分必要条件, 那么丙是甲的 ()

- A. 充分不必要条件
- B. 必要不充分条件
- C. 既不充分也不必要条件
- D. 充要条件

解析 观察相互间的推出关系: 甲 \Rightarrow 乙 \Leftrightarrow 丙, 且乙 $\not\Rightarrow$ 甲, 所以甲 \Rightarrow 丙, 丙 $\not\Rightarrow$ 甲, 所以丙是甲的必要不充分条件. 故选 B.

解后语 有关的充分必要条件可以用符号表示, 从而可以直观地观察其相互间的推出关系. 要注意箭头指向的单向性和双向性.

充分条件与必要条件的判断

(1) 直接由定义判断, 须注意逻辑推理关系.

(2) 用四种命题的真假来判断: 原命题正确, 则条件是充分的, 逆命题正确, 则条件是必要的. 原命题与逆命题都正确, 则条件是充要的. 原命题与逆命题都不正确, 则条件既不充分也不必要. 由于原命题与它的逆否命题同真同假, 多以有时也转化为判断它的逆否命题的真假.

例 10 (2006 年山东省高考题) 设 $p: x^2-x-20 > 0$, $q: \frac{1-x^2}{|x|-2} < 0$, 则 p 是 q 的 () .

- A. 充分不必要条件
- B. 必要不充分条件
- C. 充要条件