



普通高等教育 “十一五” 国家级规划教材

结构力学 (II)

萧允徽 张来仪 主编

STRUCTURAL MECHANICS

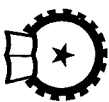
机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS



普通高等教育“十一五”国家级规划教材

结 构 力 学 (II)

主编	张来仪	萧允徽	张来仪	萧允徽
编著	王达淦	陈名弟	陈名弟	陈名弟
主审	张汝清	刘 铮	刘 铮	刘 铮



机械工业出版社

本书系普通高等教育“十一五”国家级规划教材，内容符合教育部审定的《结构力学课程教学基本要求》。

全书分 I、II 两册。I 册共 11 章，内容包括：绪论、平面体系的几何组成分析、静定梁和静定刚架的受力分析、三铰拱和悬索结构的受力分析、静定桁架和组合结构的受力分析、虚功原理和结构的位移计算、力法、位移法、渐近法和近似法、影响线及其应用、矩阵位移法，并附有平面杆件结构静力分析源程序及其说明；II 册共 3 章，内容包括：结构的动力计算、结构的稳定计算、结构的极限荷载。

本书坚持“基本概念的阐述要准确，基本原理的论证要透彻，基本方法的分析要具体，基本能力的培养要加强”的编写原则，采用条理化的论述方式和“板式”的排版方式，文图并茂，一目了然，是一本内容精炼、版式新颖、教师好用、学生易读的教学用书。本书适用于普通高等学校宽口径的“大土木”专业（包括建筑工程、路桥、岩土工程、水利工程和建筑安装等），也可供有关工程技术人员参考。

图书在版编目 (CIP) 数据

结构力学 (II) / 萧允徽, 张来仪主编. —北京: 机械工业出版社, 2007.1

普通高等教育“十一五”国家级规划教材
ISBN 978-7-111-20748-1

I. 结… II. ①萧…②张… III. 结构力学—高等学校—教材 IV. 0342

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2007) 第 005196 号

机械工业出版社 (北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

责任编辑: 季顺利 封面设计: 张 静

责任校对: 刘志文 责任印制: 李 妍

北京铭成印刷有限公司印刷

2007 年 2 月第 1 版第 1 次印刷

297mm×210mm·11 印张·340 千字

标准书号: ISBN 978-7-111-20748-1

定价: 18.00 元

凡购本书, 如有缺页, 倒页, 脱页, 由本社发行部调换
销售服务热线电话: (010)68326294

购书热线电话: (010)88379639 88379641 88379643

编辑热线电话: (010)88379729

封面无防伪标均为盗版

[Http://www.machineinfo.gov.cn/book/](http://www.machineinfo.gov.cn/book/)

序

本书是按照教育部审定的《结构力学课程教学基本要求》新编的教材,适用于普通高等学校宽口径的“大土木”专业(包括建筑工程、路桥、岩土工程、水利工程和建筑安装等),也可供有关工程技术人员参考。

为培养高素质创新型专门人才,本书在编写过程中,坚持“基本概念の阐述要准确,基本原理の论证要透彻,基本方法の分析要具体,基本能力的培养要加强”の编写原则,在学习、继承的基础上,结合编者多年来从事结构力学教学、科研の实践,力求为读者提供一本内容精炼、版式新颖、教师好用、学生易读の新教材。本书在以下几方面作了一些新的探索。

(1) 专门为教师上课,特别是采用多媒体教学,设计了“板书式”(书横排,强调文、图、公式紧密结合)の排版方式,文图并茂,一目了然,以利于教师使用和学生理解。

(2) 刻意依次编排推理层次,纲目清晰,采用多层次并对小节次也多冠以标题の论述方式,以突出结构变形行为の因果关系和逻辑环链。

(3) 精选措词,务求准确覆盖力学概念の内涵。

(4) 丰富示例,用以验证理论の工程实用价值,为后续深化认识奠定坚实的基础。

(5) 适当引入新的科研成果,以充实和更新教材内容,使力学原理和计算更贴近和反映工程实际。

本书由萧允徽、张来仪主编,萧允徽、张来仪、陈名弟、王达詮共同编写完成。

本书书稿承蒙西安建筑科技大学刘铮教授、重庆大学张汝清教授精心审阅,提出了许多宝贵的意见,对提高本书的质量起了重要作用。

本书の编写还得到了重庆大学土木工程学院及建筑力学教研室同仁的大力支持。赵更新、游渊、文国治为本书各章编写了思考题和习题,黎娟、刘纲为本书绘制了插图。

藉本书出版之际,编者在此一并致以衷心的谢忱。

限于编者水平,书中可能还存在不少问题,恳请批评指正。

编者

2006年7月

目 录

第 12 章 结构的动力计算	1
12.1 概述	3
12.2 单自由度体系的运动方程	9
12.3 单自由度体系的自由振动	14
12.4 单自由度体系的强迫振动	22
12.5 阻尼对振动的影响	39
12.6 多自由度体系的自由振动	48
12.7 主振型的正交性	69
12.8 多自由度体系在简谐荷载作用下的强迫振动	71
12.9 多自由度体系在任意动力荷载作用下的强迫振动	79
*12.10 无限自由度体系的自由振动	86
12.11 近似法计算自振频率	89
思考题	94
习 题	94
第 13 章 结构的稳定计算	99
13.1 概述	101
13.2 确定临界荷载的静力法	106
13.3 确定临界荷载的能量法	112
13.4 直杆的稳定	126
思考题	139
习 题	139
第 14 章 结构的极限荷载	143
14.1 概述	145
14.2 几个基本概念	146
14.3 静定梁的极限荷载	148
14.4 单跨超静定梁的极限荷载	149
14.5 连续梁的极限荷载	152
14.6 比例加载时判定极限荷载的一般定理	153
14.7 简单刚架的极限荷载	158
*14.8 超静定结构考虑内力重分布的工程实用设计方法	164
思考题	166
习 题	166
附录 习题答案	169
参考文献	171

第 12 章 结构的动力计算

● **本章教学的基本要求：** 掌握动力分析的基本方法及动力体系自由度数数的判别方法；掌握单自由度和两个自由度体系运动方程的建立方法；掌握自由振动和在简谐荷载作用下强迫振动的计算方法；了解阻尼的作用；了解多自由度体系在一般动荷载作用下的强迫振动；了解频率的近似计算方法。

● **本章教学内容的重点：** 动力体系自由度数数的判别方法；单自由度体系运动方程的建立；单自由度及有限自由度（重点是两个自由度）体系动力特性的计算；单自由度、有限自由度体系在简谐荷载作用下的内力、位移计算；阻尼对振动的影响。

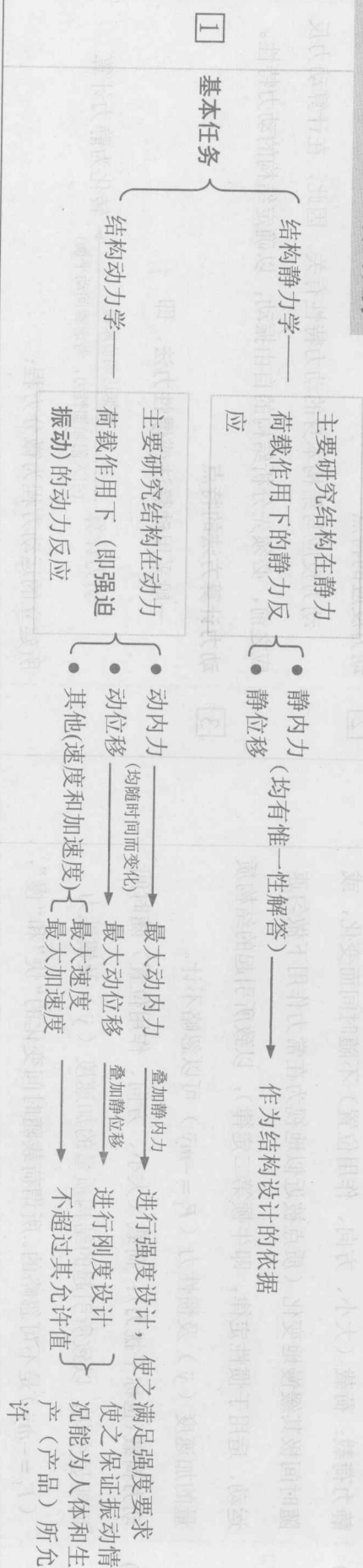
● **本章教学内容的难点：** 用刚度法和柔度法建立单自由度体系的运动方程；在动力特性和动力反应计算中，刚度系数和柔度系数的计算；单自由度和两个自由度体系在简谐荷载作用下动力反应的计算。

● **本章内容简介：**

- 12.1 概述
- 12.2 单自由度体系的运动方程
- 12.3 单自由度体系的自由振动
- 12.4 单自由度体系的强迫振动
- 12.5 阻尼对振动的影响
- 12.6 多自由度体系的自由振动
- 12.7 主振型的正交性
- 12.8 多自由度体系在简谐荷载作用下的强迫振动
- 12.9 多自由度体系在任意动力荷载作用下的强迫振动
- *12.10 无限自由度体系的自由振动
- 12.11 近似法计算自振频率

12.1 概述

12.1.1 结构动力计算的任务



No.12-2

2 研究动力反应的前提和基础: 需先分析结构的自由振动

求得 → 结构本身的动力特性 (与荷载无关)

- 自振频率 ($2\pi s$ 内振动的次数)
- 自振周期 (振动一次所需的时间)
- 自振型式 (对应于每个自振频率, 结构自身所保持的不变的振动形式)
- 阻尼常数 (反映阻尼情况的基本参数: 阻尼: 使振动衰减的因素)

3 土木工程中常见结构振动计算问题

- 高层建筑、高耸结构和大跨度桥梁的风振分析
- 各类工程结构的抗震设计
- 多层厂房中由于动力机器引起的楼面振动计算
- 高速行驶的车辆对桥梁结构的振动影响
- 动力设备基础上的振动计算和减振、隔振设计等

4

本课程主要介绍具有线弹性特征的杆件结构在确定性动力荷载作用下的动力计算方法; 对随机荷载作用 (如地震、风振) 也将作简要介绍。

12.1.2 结构动力计算的特点(三个方面)

1 动力荷载的特点

- (1) 静力荷载: 荷载(大小、方向、作用位置)不随时间而变化, 或随时间极其缓慢地变化(质点被近似地视为在常力作用下做匀速运动, 适用于惯性定律, 即牛顿第二定律), 以致所引起的结构质量的加速度($\ddot{y}$)及惯性力($F_I = -m\ddot{y}$)可以忽略不计。
- (2) 动力荷载(也称干扰力): 荷载(大小、方向、作用位置)随时间而明显变化, 以致所引起的结构质量的加速度($\ddot{y}$)及惯性力($F_I = -m\ddot{y}$)是不可忽略的。所谓荷载随时间变化的“快”和“慢”,

2 动力反应的特点

是以结构的自振动周期(T)来量度的。一般徐徐加于结构的荷载, 其变化周期大于 $(5 \sim 6)T$ 者, 即可视为静力荷载。

3 动力计算方法的特点

动力反应与结构本身的动力特性有关。因此, 在计算动力反应之前, 必须先分析结构的自由振动, 以确定结构的动力特性。

一般采用动静法或惯性力法, 即

动力计算 $\xrightarrow[\text{(引入附加惯性力, 考虑瞬间动平衡)}]{\text{根据达朗伯原理}}$ 转化为静力计算

所建立的运动方程为微分方程:

No.12-4

12.1.3 动力荷载的分类

1 周期荷载

根据动力荷载随时间变化的规律及对结构作用的特点可分为: 随时间按周期变化的荷载。

(1) 简谐荷载: 是周期荷载中最简单和最重要的一种。其随时间 t 的变化规律可用正弦(图 12-1a)或余弦函数表示。一般有旋转装置的设备(如水轮机、电动机、发电机等)在匀速运转时, 由于转子质量的偏心, 都会产生这种荷载(图 12-1b)。

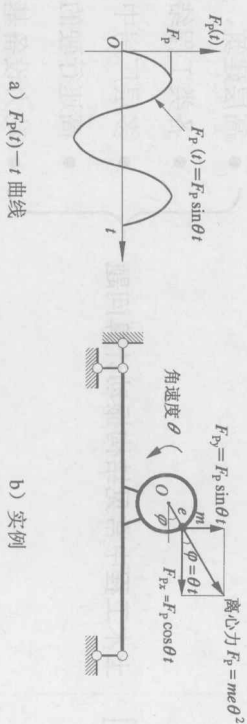


图 12-1 简谐荷载

(2) **非简谐周期荷载**: 凡有曲柄连杆的机器 (如活塞式空气压缩机、柴油机、锯机等) 在匀速运转时都会产生这种荷载。例如, 船舶匀速行进时螺旋桨产生的作用于船体的推力 (图 12-2)。



图 12-2 非简谐周期荷载

2 冲击荷载

在很短时间内骤然增减的集度很大的荷载。例如, 各种爆炸荷载 (图 12-3) 以及锻锤对机器基础的冲击、桩锤对桩的冲击和车

轮对轨道接头处的冲击等。

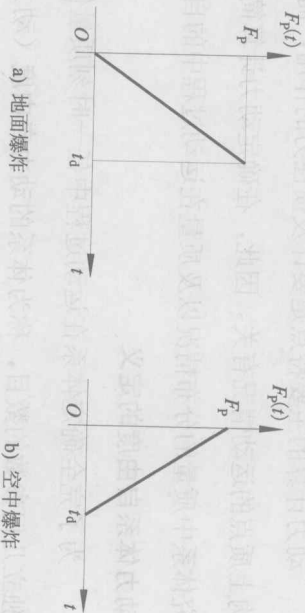


图 12-3 冲击荷载

3 突加常量荷载

以某一恒值突然施加于结构上并在较长时间内基本保持不变的荷载 (图 12-4)。例如, 起重机突然起吊重物时所产生的荷载等。

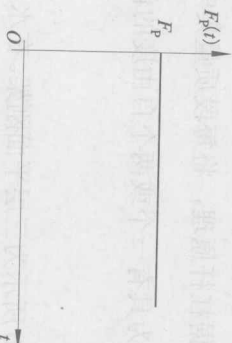


图 12-4 突加常量荷载

以上三类荷载都属于确定性动力荷载。若给定了初始条件, 结构在某时刻的动力反应是惟一确定的。

4 随机荷载

在将来任一时刻的数值无法事先确定的荷载。不能用数学式定义, 但可采用概率论和数理统计的方法, 从统计方面来进行定

义。地震、脉冲风压和波浪所产生的荷载是其典型例子。图 12-5 表示一个实录的地震水平加速度时程曲线, 是一随机变化曲线。

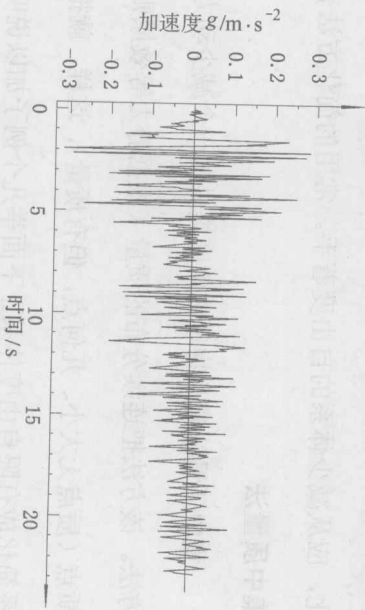


图 12-5 随机荷载

12.1.4 动力体系的自由度

动力计算的主要特点是要计及惯性力的作用，而惯性力又与结构上质点的运动情况有关。因此，在确定动力计算简图时，需要研究体系中质量的分布情况以及质量在运动过程中的自由度问题。

[1] 动力体系自由度的定义

为了完全确定体系在运动过程中任一时刻质量位置所必需的独立几何参数的数目，称为体系的动力自由度（动力分析的基本未知量是质点的位移）。

[2] 体系动力自由度的简化

实际结构的质量都是连续分布的，具有无限多个质点，因此

它们都是无限自由度体系。例如，图 12-6a 所示单位长度的质量为 $\bar{m}$ 的简支梁，每一微段 dx 长度上的质量为 $\bar{m} dx$ （图 12-6b），在梁沿竖向振动时，各个质点的位移都是质点位置 x 和时间 t 的函数

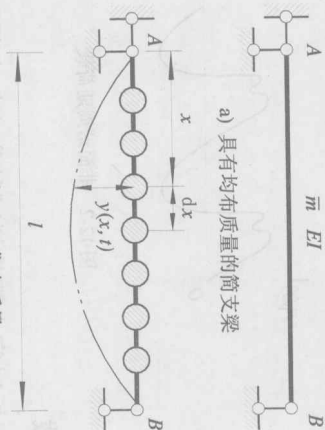


图 12-6 无限自由度体系

No.12-8

$y(x, t)$ ，它是一个无限自由度体系。但如果任何结构都按无限自由度去计算，则不仅十分困难，而且没有必要。为了使计算得到简化，应从减少体系的自由度着手。常用的简化方法有下列三种。

(1) 集中质量法

集中质量法是从物理的角度提供的—一个减少动力自由度的简化方法。该方法把连续分布的质量（根据静力等效原则）集中为几个质点（质点无大小、几何点，但有质量），这样，就把无限自由度体系简化成有限自由度体系。下面举几个例子加以说明。

图 12-7a 所示具有均布质量的简支梁，将它分为二等分段或三

等分段，根据杠杆原理，将每段质量集中于该段的两端。这样，体系就简化为具有一个或两个自由度的体系。分段越细，计算精度越高。

图 12-7b 所示为三层平面刚架。在水平力作用下计算刚架侧向振动时，一种常用的简化计算方法是将柱子的分布质量简化为作用于上下横梁处，因而刚架的全部质量都作用在横梁上。由于每层横梁的刚度很大，故梁上各点的水平位移彼此相等，因此每层横梁上的分布质量又可用一个集中质量来代替。最后简化为有三个自由度水平位移 y_1 、 y_2 和 y_3 的计算简图。

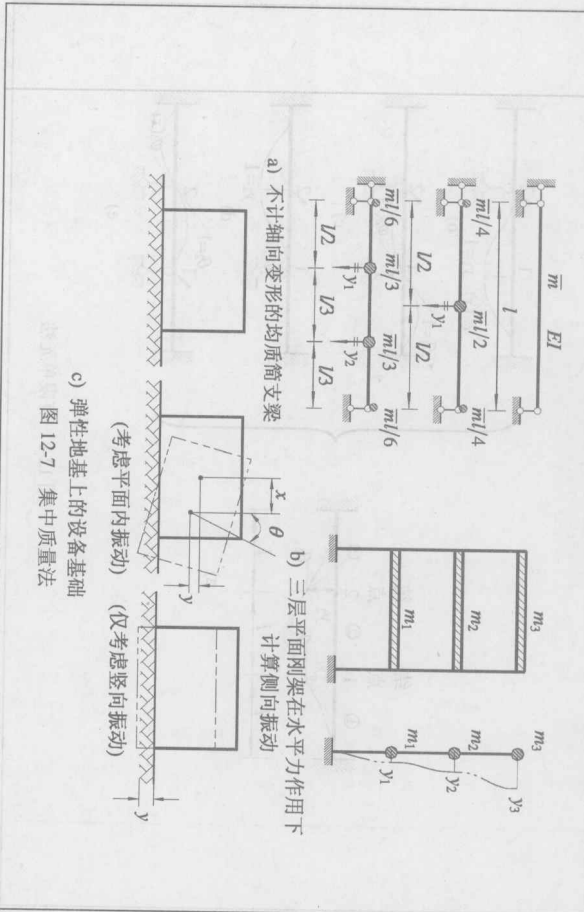


图 12-7 集中质量法

图 12-7c 所示为一弹性地基上的设备基础，计算时可简化为一刚性质块。当考虑基础在平面内的振动时，体系共有三个自由度，包括水平位移 x 、竖向位移 y 和角位移 θ 。而当仅考虑基础在竖直方向的振动时，则只有一个自由度（竖向位移 y ）。

(2) 广义坐标法

广义坐标法是从数学的角度提供的一个减少动力自由度的简化方法。例如，具有分布质量的简支梁的振动曲线（位移曲线），可近似地用三角级数表示为

$$y(x,t) = \sum_{k=1}^n a_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l} \quad (a)$$

(3) 有限单元法

有限单元法可看作是广义坐标法的一种应用。把体系的离散化和单元的广义坐标法二者结合起来，就构成了有限单元法的概念。

有限单元法其具体作法是（图 12-8）：

第一，将结构离散为有限个单元（本例为三个单元）。

第二，取结点的位移参数 $y_k(t)$ 和 $\theta_k(t)$ ，即 y_1 、 θ_1 和 y_2 、 θ_2 为广义坐标。

第三，分别给出与结点的位移参数（均为 1 时）相应的形状函

式中， $\sin(k\pi x/l)$ 是一组给定的函数，称为位移函数或形状函数，与时间无关； $a_k(t)$ 是一组待定参数，称为广义坐标，随时间而变化。因此，体系在任一时刻的位置，是由广义坐标 $a_k(t)$ 来确定的。注意：这里的形状函数只要满足位移边界条件，所选的函数形式可以是任意的连续函数。因此，式(a)可写成更一般的形式，即

$$y(x,t) = \sum_{k=1}^n a_k(t) \varphi_k(x) \quad (b)$$

式中， $\varphi_k(x)$ 是自动满足位移边界条件的函数集中任意选取的 n 个函数，因此，体系简化为 n 个自由度体系。广义坐标法将应用于后面的振型叠加法和能量法。

数 $\varphi_k(x)$ ，即 $\varphi_1(x)$ 、 $\varphi_2(x)$ 、 $\varphi_3(x)$ 和 $\varphi_4(x)$ ，又常称为插值函数（它们确定了指定结点位移之间的形状）。

第四，仿照式(b)，体系的位移曲线可用四个广义坐标及其相应的四个插值函数表示为

$$y(x,t) = y_1(t)\varphi_1(x) + \theta_1(t)\varphi_2(x) + y_2(t)\varphi_3(x) + \theta_2(t)\varphi_4(x) \quad (c)$$

式中， $\varphi_k(x)$ 可事先给定，让其满足边界条件。这样，就把无限自由度体系简化为四个自由度 ($y_1, \theta_1, y_2, \theta_2$) 体系。

必须强调的是：动力分析中的自由度，一般是变形体系中质量的自由度。而《结构力学(1)》中第 2 章几何组成分析中的自由度，是不考虑杆件弹性变形的体系的自由度。

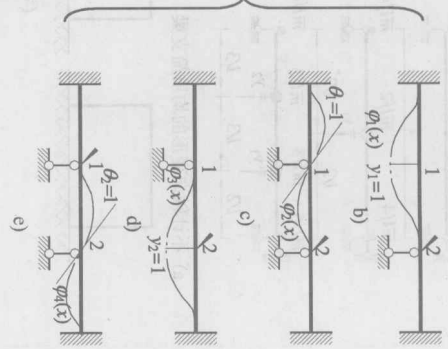
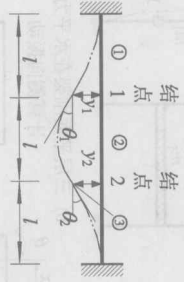


图 12-8 有限单元法

3 动力自由度的确定

(1) 用广义坐标法或有限单元法将无限自由度体系简化为有限自由度体系时，体系的自由度等于广义坐标数或独立结点位移数。

(2) 用集中质量法简化得到的有限自由度体系，在确定体系的自由度数目时，应注意以下两点：

1) 一般受弯结构的轴向变形忽略不计。

2) 动力自由度数不一定等于集中质量数，也与体系是否超静定和超静定次数无关，但会直接影响计算精度。

确定动力自由度的方法：一般可根据定义直接确定；对于比较复杂的体系，则可用限制集中质量运动的方法（即附加支杆的

方法）来确定。图 12-9 和图 12-10 所示是一些示例。

1) 单自由度体系 (图 12-9)

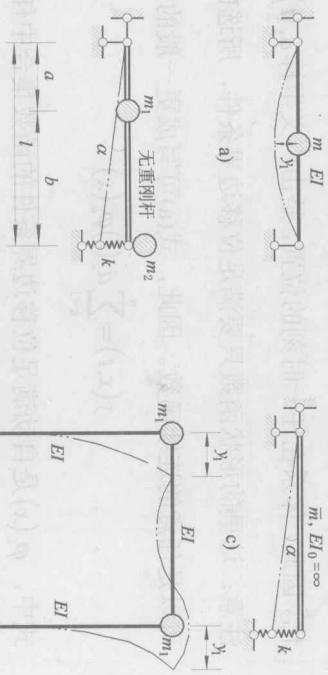


图 12-9 单自由度体系的动力自由度

2) 多自由度体系 (图 12-10)

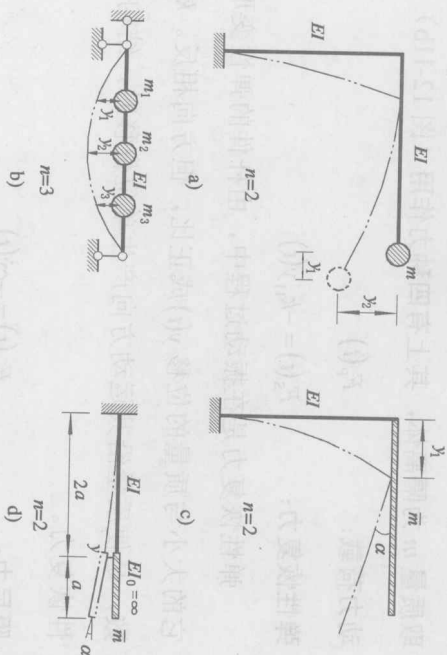


图 12-10 多自由度体系的动力自由度

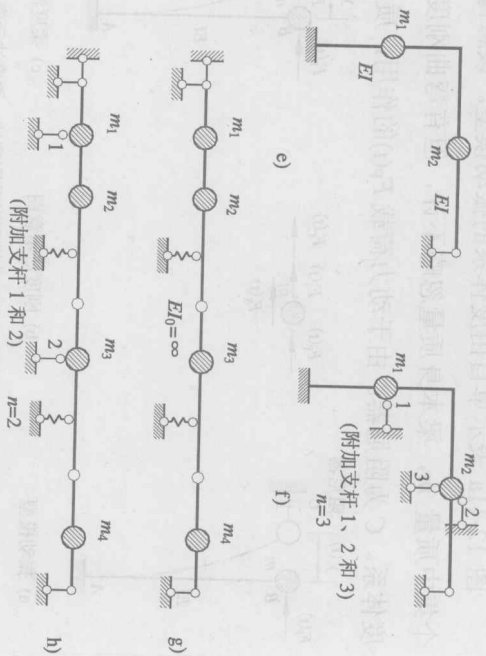


图 12-10 多自由度体系的动力自由度 (续)

第 12 章 结构的动力计算

12.2 单自由度体系的运动方程

12.2 单自由度体系的运动方程

动力计算的基本未知量是质点的位移,它是时间 t 的函数。为了求出动力反应,应首先列出描述体系振动时质点动位移的数学表达式,称为动力体系的运动方程 (亦称振动方程)。它将具体的振动问题归结为求解微分方程的数学问题。运动方程的建立是整个动力分析过程中最重要的部分。

单自由度体系的动力分析能反映出振动的基本特性,是多个自由度体系分析的基础。本章只介绍微幅振动 (线性振动)。

根据达朗伯原理建立运动方程的方法称为动静法 (或惯性力法)。具体作法有两种:刚度法和柔度法。

刚度法: 将力写成位移的函数,按平衡条件列出外力 (包括假想作用在质量上的惯性力和阻尼力) 与结构抗力 (弹性恢复力) 的动力平衡方程 (刚度方程),类似于位移法。

柔度法: 将位移写成力的函数,按位移协调条件列出位移方程 (柔度方程),类似于力法。

12.2.1 按平衡条件建立运动方程——刚度法

1 单自由度体系的振动模型

图 12-11a 表示单自由度体系的振动模型。该悬臂梁顶端有一个集中质量 m ，梁本身质量忽略不计，但有弯曲刚度，属单自由度体系。 C 为阻尼器。由于动力荷载 $F_P(t)$ 的作用，质点 m 离开了



图 12-11 单自由度体系的振动模型以及刚度法、柔度法示意图

静止平衡位置，产生了振动，在任一时刻 t 的水平位移为 $y(t)$ 。取质量 m 为隔离体，其上有四种力作用（图 12-11b）

(1) 动力荷载： $F_P(t)$

(2) 弹性恢复力： $F_S(t) = -k_{11}y(t)$ (12-1)

弹性恢复力是在振动过程中，由杆件的弹性变形所产生的。

它的大小与质量的位移 $y(t)$ 成正比，但方向相反。 k_{11} 为刚度系数，是使质量沿其运动方向产生单位位移时，结构所产生的弹性恢复力。

(3) 阻尼力： $F_C(t) = -c\dot{y}(t)$ (12-2)
(粘滞阻尼理论)

阻尼力的大小与质量速度 $\dot{y}(t)$ 成正比，但方向相反， c 为阻尼系数（详见 12.5 节）。

(4) 惯性力： $F_I(t) = -m\ddot{y}(t)$ (12-3)

惯性力的大小等于质量 m 与其加速度 $\ddot{y}(t)$ 的乘积，但方向与加速度方向相反。

3 建立运动方程

根据达朗伯原理，对于图 12-11b，由 $\sum F_x = 0$ 得

$$F_I(t) + F_C(t) + F_S(t) + F_P(t) = 0 \quad (12-4)$$

将式(12-1)~式(12-3)代入式(12-4)，即得

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + k_{11}y = F_P(t) \quad (12-5)$$

这是一个二阶线性常系数微分方程。有必要说明，为了表述简明，从式 (12-5) 和图 12-12 起，以下各方程和各图形中的 $y(t)$ 、 $\dot{y}(t)$ 、 $\ddot{y}(t)$ 以及除动力荷载 $F_P(t)$ 之外的各力均省去自变量 (t) 。

12.2.2 按位移协调条件建立运动方程——柔度法

如图 12-11c 所示，质量 m 所产生的水平位移 $y(t)$ ，可视为由动力荷载 $F_P(t)$ 、惯性力 F_I 和阻尼力 F_C 共同作用在悬臂梁顶端所产生的。根据叠加原理，得

$$y = \delta_{11}F_I + \delta_{11}F_C + \delta_{11}F_P(t) \quad (12-6)$$

式中， δ_{11} 为柔度系数，表示在质量的运动方向施加单位力时，在该运动方向所产生的静力位移。

将式(12-2)阻尼力和式(12-3)惯性力代入式(12-6), 即得

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + \frac{1}{\delta_{11}}y = F_p(t) \quad (12-7)$$

因为单自由度体系中 $1/\delta_{11} = k_{11}$ (k_{11} 和 δ_{11} 互为倒数), 故有

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + k_{11}y = F_p(t)$$

与式(12-5)完全相同。

【注意】当 $F_p(t)$ 不是直接作用在质量及其运动方向上时, 则式(12-6)中右边第三项 $\delta_{11}F_p(t)$ 应改为

$$\delta_{1p}F_p(t)$$

式中, δ_{1p} 表示由于 $F_p(t) = 1$ 作用在质量运动方向所产生的位移。相应地, 式(12-7)、式(12-5)中右边项 $F_p(t)$ 应改为

$$\left(\frac{\delta_{1p}}{\delta_{11}} \right) F_p(t) \xrightarrow{\text{可记为}} F_E(t)$$

式中, $F_E(t)$ 称为等效动力荷载。同时, 它与由于 $F_p(t)$ 作用而在质点处添加的附加约束上所产生的支座反力大小相等。

【例 12-1】试用刚度法建立图 12-12a 所示刚架受动力荷载 $F_p(t)$ 作用的运动方程。

解:

(1) 确定自由度 (建模): 结构的质量 m 分布于刚性横梁, 只能产生水平位移, 属单自由度体系。

(2) 确定位移参数: 设刚性梁在任一时刻的位移为 y , 向右为正。

No.12-18

(3) 绘隔离体受力图: 取出隔离体, 如图 12-12b 所示。图中给出了惯性力、阻尼力和弹性恢复力。各力均设沿坐标正向为正。

(4) 列运动方程: 按动静法列动力平衡方程, 可得

$$F_p(t) + F_1 + F_c + F_{s1} + F_{s2} = 0 \quad (a)$$

式中, $F_1 = -m\ddot{y}$, $F_c = -c\dot{y}$

$$F_{s1} = -\frac{12EI}{l_1^3}y, \quad F_{s2} = -\frac{12EI}{l_2^3}y \quad (b)$$

将式(b)代入式(a), 经整理, 可得运动方程

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = F_p(t) \quad (c)$$

式中, 刚度系数 $k = 12EI/l_1^3 + 12EI/l_2^3$, 这里的 k 又称为楼层刚度,

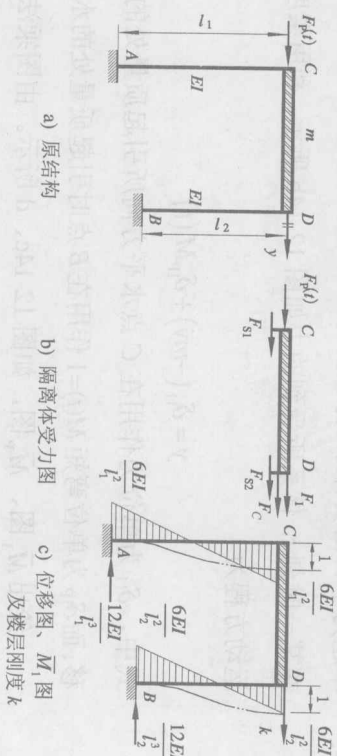


图 12-12 例 12-1 图

系指上下楼面发生单位相对位移 ($\Delta=1$) 时, 楼层中各柱剪力之和, 如图 12-12c 所示。

解:

【例 12-2】试用刚度法建立图 12-13a 所示静定梁的运动方程。
本例为单自由度体系。取 α 为坐标。在某一时刻 t ，体系位移如图 12-13b 所示。受力如图 12-13c 所示，即

$$\left. \begin{aligned} F_{11} &= -m_1(a\ddot{\alpha}) \\ F_{12} &= -m_2(l\ddot{\alpha}) \end{aligned} \right\} \quad (\text{惯性力指向与质量运动方向一致})$$

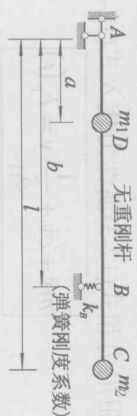
$$F_B = k_b(b\alpha) \quad (\text{反力 } F_B \text{ 的指向与弹簧伸缩方向相反})$$

由 $\sum M_A = 0$ 得

$$m_1 a^2 \ddot{\alpha} + m_2 l^2 \ddot{\alpha} + k_b b^2 \alpha = 0$$

整理后，得运动方程

$$(m_1 a^2 + m_2 l^2) \ddot{\alpha} + k_b b^2 \alpha = 0$$



a) 原结构



b) 位移图

$$\left. \begin{aligned} F_{11} &= -m_1(a\ddot{\alpha}) \\ F_{12} &= -m_2(l\ddot{\alpha}) \end{aligned} \right\}$$

c) 受力图

图 12-13 例 12-2 图

【例 12-3】试用柔度法建立图 12-14a 所示静定刚架受动力荷载 $M(t)$ 作用的运动方程。

解:

本题为单自由度体系的振动。取质量 m 水平方向的位移 y 为坐标，在某一时刻 t ，体系所受到的力如图 12-14b 所示。利用柔度法建立运动方程为

$$y = \delta_{11}(-m\ddot{y}) + \delta_{1p}M(t) \quad (\text{a})$$

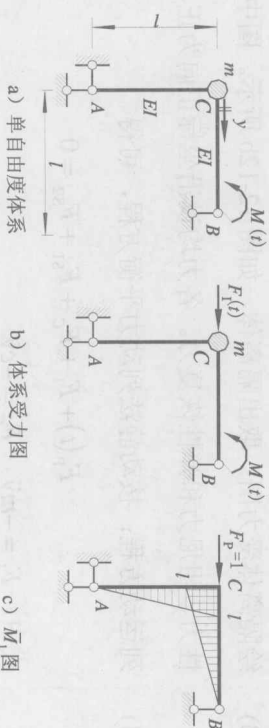
式中， δ_{11} 为单位力作用在 C 点水平方向所引起质量处的水平位移；而 δ_{1p} 为单位弯矩 $M(t)=1$ 作用在 B 点时引起质量处的水平位移。

绘出 $\bar{M}_1$ 图、 $\bar{M}_p$ 图，如图 12-14c、d 所示。由图乘法得

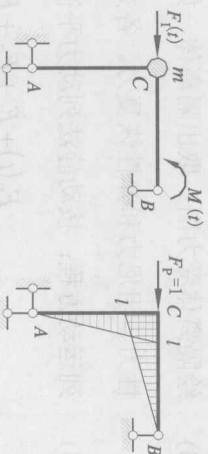
$$\delta_{11} = 2l^3/3EI, \quad \delta_{1p} = l^2/6EI \quad (\text{b})$$

将式(b)代入式(a)，并整理得运动方程

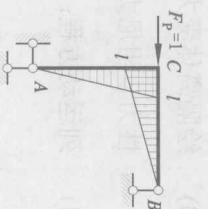
$$m\ddot{y} + \left(\frac{3EI}{2l^3}\right)y = \left(\frac{1}{4l}\right)M(t)$$



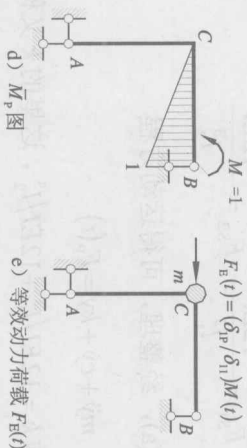
a) 单自由度体系



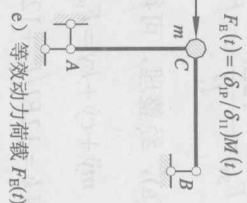
b) 体系受力图



c) M1 图



d) Mp 图



e) 等效动力荷载 Fd(t)

图 12-14 例 12-3 图