◎经济应用数学基础考研系列辅导丛书

中国人民大学 孙志宾 编著

概率论与数理统计习题全解与考研提高

（人大修订版）

- 详尽的习题全解
- 典型题的分类汇总
- 考研题的思路点拨
- 模拟题的考研提高

GAI LV LUN
YU SHU LI TONG J
XI TI QUAN JIE
YU KAO YAN TI GA

中国建材工业出版社

概率论与数理统计习题全解与考研提高

（人大修订版）

孙志宾　编著

中国建材工业出版社

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计习题全解与考研提高（人大修订版）/孙志宾编著. —北京：中国建材工业出版社，2005.9

（经济类数学基础辅导系列丛书）

ISBN 7 - 80159 - 956 - X

Ⅰ.概...　Ⅱ.孙...　Ⅲ.①概率论-研究生-入学考试-自学参考资料②数理统计-研究生-入学考试-自学参考资料　Ⅳ.021

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 091342 号

内 容 简 介

本书主要依据教学大纲编写而成，通过对课后习题的解析、考研题及典型题的思路点拨，考研模拟题的自测，能够使读者对每章的知识点、考点、难点有一个全面的认识提高，并对考研的读者有所帮助。

概率论与数理统计习题全解与考研提高（人大修订版）

孙志宾　编著

出版发行：中国建材工业出版社
地　　址：北京市西城区车公庄大街 6 号
邮　　编：100044
经　　销：全国各地新华书店
印　　刷：北京鑫正大印刷有限公司
开　　本：850mm × 1168mm　1/32
印　　张：9.875
字　　数：248 千字
版　　次：2005 年 8 月第 1 版
印　　次：2005 年 8 月第 1 次
定　　价：**16.00 元**

网上书店：www.ecool100.com

本书如出现印装质量问题，由我社发行部负责调换。联系电话：(010)88386906

目　录

第一章　随机事件及其概率

一、学习要求

1. 了解样本空间的概念，理解随机事件的概念，掌握事件间的关系及运算；

2. 理解概率、条件概率的概念，掌握概率的基本性质，会计算古典概率；掌握概率的加法公式、乘法公式以及全概率公式、贝叶斯公式；

3. 理解事件的独立性的概念，会利用独立性进行概率计算；理解独立重复试验的概念，掌握计算有关事件概率的方法.

二、知识网络图

- 随机事件和概率
  - 随机试验
    - 定义
    - 样本空间
    - 独立性（n 重贝努里概型）
  - 随机事件
    - 定义
    - 随机事件间关系（包含、相等、环相容、对立）
    - 随机事件的计算（并、交、余、差）
    - 随机事件的独立性
  - 概率
    - 定义
      - 古典概型定义
      - 几何概型定义
      - 频率定义
      - 公理化定义
      - 条件概率定义
    - 计算
      - 古典概率
      - 概率运算的基本性质
      - 乘法公式
      - 全概率公式
      - 贝叶斯公式
      - 利用独立性计算概率

三、考研题与典型题精解

【例 1】 A,B,C 为三个事件，则

“A,B,C 中至少有一个发生”可表示为 $\underline{A\cup B\cup C}$，

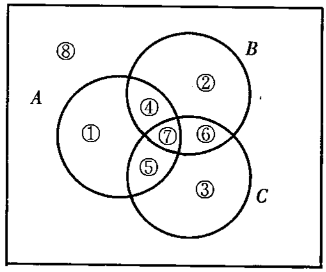
“A,B,C 中至少有二个发生”可表示为 $\underline{AB\cup BC\cup AC}$，

“A,B,C 中恰好有两个发生”可表示为 $\underline{AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC}$，

“A,B,C 中不多于一个发生”可表示为 $\underline{\overline{A}\,\overline{B}\cup\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{C}}$.

注：本题考查如何利用简单事件表示复杂事件，也可以参考图示帮助解答.

如图：①部分表示 $A\overline{B}\,\overline{C}$，②部分表示 $\overline{A}B\overline{C}$，③部分表示 $\overline{A}\,\overline{B}C$，④部分表示 $AB\overline{C}$，⑤部分表示 $A\overline{B}C$，⑥部分表示 $\overline{A}BC$，⑦部分表示 ABC，⑧部分表示 $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$.



【例 2】 设 A,B 为二事件，则 $P\{(A\cup B)(A\cup\overline{B})(\overline{A}\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B})\}=$____.

解：$(A\cup B)(A\cup\overline{B})(\overline{A}\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B})=(A\cup A\overline{B}\cup AB\cup B\overline{B})(\overline{A}\cup\overline{A}\,\overline{B}\cup\overline{A}B\cup B\overline{B})=A\overline{A}=\varnothing$.

应填 $\varnothing$.

注：事件间的“交”、“并”运算满足交换、结合、分配律，所以运算可以像多项式一样相乘即 $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$.

【例 3】 已知 A,B 两事件满足条件 $P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})$ 且 $P(A)=p$，则求 $P(B)$.

解：$P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-(P(A)+P(B)-P(AB))$，可得 $P(A)+P(B)=1\Rightarrow P(B)=1-p$.

注：本题是较常见的一类题，利用对偶定律及一般加法公式把

$P(\overline{A}\,\overline{B})$用一些基本量 $P(A)$、$P(B)$和 $P(AB)$表示出来,然后求解.

【例 4】 设 A,B 为随机事件,已知 $P(A)=0.7,P(A-B)=0.3$.求 $P(\overline{AB})$.

解:$P(A-B)=P(A-AB)\xRightarrow{AB\subset A}P(A-B)=P(A)-P(AB)$,

$$\therefore P(AB)=P(A)-P(A-B)=0.4.$$

$$P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-0.4=0.6.$$

注:本题与上题属于一类,其中式子 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$是运算事件差的常概率时用的等量关系.

【例 5】 连续独立地掷两枚骰子,求两骰子"点数之和为 5"的概率.

解:设 A 表示"两骰子点数之和为 5".

基本事件总数为 $6\times6=36$ 种,因为两个骰子分别有 6 种等可能的选择;A 包含的基本事件数为(1,4),(4,1),(2,3),(3,2)4 种.因此所求概率为:

$$P(A)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}.$$

注:基本事件的总数是所有可能结果的个数即 36,而不是可能出现的和的个数 11.

【例 6】 抛两枚硬币,求 $A=\{$恰好一枚正面、一枚反面$\}$的概率.

解:基本事件总数为 4,包含{(正,正)、(正,反)、(反,正)、(反,反)},显然,A 包含的基本事件数为 2,所以 $P(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

注:本题与上题属于一类,易出的错误为 $\Omega=\{$(正,正)、(正,反)、(反、正)$\}$,把基本事件的总数看成 3 种是不正确的,因为三个结果可能性不同.

【例 7】 一批产品共 10 件,其中有 1 件次品,任意抽取两次,每次一件取后不放回,则求第二次取出次品的概率.

解:设 $A_i=\{$第 i 次取出次品$\}\quad i=1,2$.

$$P(A_2)=P(A_1A_2)+P(\overline{A}_1A_2)=P(\overline{A}_1A_2)$$

$$= P(A_2|\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_1) = \frac{1}{9}\times\frac{9}{10} = \frac{1}{10}.$$

注:本题实际上属于抽签问题,第二次取出次品的概率与第一次取出次品的概率都是$\frac{1}{10}$;如果改为取 10 次,即依次取出 10 件产品,则第 i 次取出次品的概率仍为$\frac{1}{10}$,$i=1,2,\cdots,10$.

【例 8】 袋子中有 50 个乒乓球,20 个黄色,30 个白色,有两人依次随机地取一球,取后不放回,求第二个人取到黄球的概率.

解:设 $B=\{$第二个人取到黄球$\}$,$A=\{$第一个人取到黄球$\}$则由全概率公式:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B\mid A)\cdot P(A) + P(B\mid \overline{A})\cdot P(\overline{A}) \\ &= \frac{19}{49}\times\frac{20}{50}+\frac{20}{49}\times\frac{30}{50} \\ &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

注:本题可看作抽签问题的推广,"得到黄球"的概率与取球次序无关.

【例 9】 一次掷十颗骰子,已知至少出现一个一点,问至少出现两个一点的概率是多少.

解:设 A 表示"至少出现一个一点",B 表示"至少出现两个一点",则所求概率为 $P(B|A)=1-P(\overline{B}|A)=1-P\frac{(A\overline{B})}{P(A)}$,

$$P(A\overline{B}) = P(\text{恰好出现一点}) = C_{10}^{1}\left(\frac{1}{6}\right)^{1}\left(\frac{5}{6}\right)^{9}\approx 0.3230,$$

$$P(A) = 1-P(\overline{A}) = 1-\left(\frac{5}{6}\right)^{10}\approx 0.8385,$$

代入结果得:$P(B|A)\approx 1-\frac{0.3230}{0.8385}\approx 0.6148.$

注:①因为$P(\cdot|A)$也满足概率的性质,所以等式

$$P(B|A)+P(\overline{B}|A)=1 \text{ 成立}$$

②涉及到求关于"至少"的概率时,直接运算较为复杂,往往采

用间接方法,即 $P(A)=1-P(\overline{A})$ 求相应的概率.

【例 10】 三个箱子,第一个箱子中有 3 个黑球 1 个白球,第二个箱子中有 2 个黑球 3 个白球,第三个箱子中有 3 个黑球 2 个白球.求:(1)随机取出一个箱子,再从这个箱子中任取一球,这个球为白球的概率;

(2)已知取出的球是白球,此球属于第三个箱子的概率.

解:设 A 表示“取出一球为白球”,B_i 表示“取到第 i 只箱子”,$i=1,2,3$,则 $P(B_i)=\frac{1}{3}$.

由全概率公式得:

$$(1)P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)\cdot P(A\mid B_i)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\right)=\frac{5}{12}.$$

再由贝叶斯公式得:

$$(2)P(B_3\mid A)=\frac{P(B_3)\cdot P(A\mid B_3)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}}{\frac{5}{12}}=\frac{24}{75}=\frac{8}{25}.$$

注:本题是较典型的利用全概率公式及贝叶斯公式求解的题目.A 是一复杂事件,B_1,B_2 和 B_3 都可导致 A 发生且 $B_1\cup B_2\cup B_3=\Omega$ 两两互不相容,则 A 可分割成三个互不相容的和 $A=AB_1\cup AB_2\cup AB_3$,再根据概率的可加性和乘法公式求 A 的概率.

$P(B_i)$		$P(A\mid B_i)$
$\frac{1}{3}$	B_1	$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{3}$	B_2	$\frac{3}{5}$
$\frac{1}{3}$	B_3	$\frac{2}{5}$

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(AB_i)=\sum_{i=1}^{3}P(A\mid B_i)\cdot P(B_i).$$

【例 11】 设有来自三个地区的各 10 名、15 名和 25 名考生的

报名表，其中女生的报名表分别为 3 份、7 份和 5 份，随机地取一个地区的报名表，从中先后抽取出两份.

(1)求先抽到的一份是女生表的概率 p；

(2)已知后抽到的一份是男生表，求先抽到的一份是女生表的概率 q.

解：设 $A_j=\{$第 j 次取出的是女生表$\}\ j=1,2.$

$B_i=\{$报名表是取自第 i 区的考生$\}\ i=1,2,3.$

$$P(B_1)=P(B_2)=P(B_3)=\frac{1}{3},$$

$$P(A_1|B_1)=\frac{3}{10},P(A_1|B_2)=\frac{7}{15},P(A_1|B_3)=\frac{5}{25}.$$

(1) $B_1\cup B_2\cup B_3=\Omega$,

由全概率公式：$p=P(A_1)=\sum\limits_{i=1}^{3}P(A_1\mid B_i)\cdot P(B_i)$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{10}+\frac{7}{15}+\frac{5}{25}\right)=\frac{29}{90}.$$

(2)由贝叶斯公式：$q=P(A_1|\overline{A}_2)=\dfrac{P(A_1\overline{A}_2)}{P(\overline{A}_2)}$，由“男生表”与次序无关，可得：

$$P(\overline{A}_2|B_1)=\frac{7}{10},P(\overline{A}_2|B_2)=\frac{8}{15},P(\overline{A}_2|B_3)=\frac{20}{25}.$$

$$P(A_1\overline{A}_2|B_1)=\frac{3}{10}\times\frac{7}{9}=\frac{7}{30},$$

$$P(A_1\overline{A}_2|B_2)=\frac{7}{15}\times\frac{8}{14}=\frac{8}{30},$$

$$P(A_1\overline{A}_2|B_3)=\frac{5}{25}\times\frac{20}{24}=\frac{5}{30},$$

所以由全概率公式：

$$P(\overline{A}_2)=\sum_{i=1}^{3}P(\overline{A}_2\mid B_i)\cdot P(B_i)=\frac{1}{3}\left(\frac{7}{10}+\frac{8}{15}+\frac{20}{25}\right)=\frac{61}{90},$$

$$P(A_1\overline{A}_2)=\sum_{i=1}^{3}P(A_1\overline{A}_2\mid B_i)\cdot P(B_i)=\frac{1}{3}\left(\frac{7}{30}+\frac{8}{30}+\frac{5}{30}\right)=$$

$\frac{2}{9}$,

所以 $$q=\frac{P(A_1\overline{A}_2)}{P(A_2)}=\frac{2/9}{61/90}=\frac{20}{61}.$$

【例 12】 从 0,1,2,…,9 等 10 个数字中任意选出三个不同的数字,试求下列事件的概率:$A_1=\{$三个数字中不含 0 和 5$\}$,

$A_2=\{$三个数字中不含 0 或 5$\}$.

解:本题为一个古典概型,样本空间包含的基本事件总数为 $n=C_{10}^3$,而 A_1(不含 0 和 5)中所包含基本事件数为 $m_1=C_8^3$,

则 $P(A_1)=\frac{M_1}{n}=\frac{C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{7}{15}$.

A_2 可分解成三个互不相容部分的和,

设 $B_1=\{$三个数字中含 0 不含 5$\}$,

$B_2=\{$三个数字中含 5 不含 0$\}$,

$B_3=\{$三个数字中既不含 0,又不含 5$\}$,

则 $A_2=B_1\cup B_2\cup B_3$ 且 B_1、B_2、B_3 互不相容.

则 $$P(A_2)=P(B_1)+P(B_2)+P(B_3)$$
$$=\frac{C_8^2}{C_{10}^3}+\frac{C_8^2}{C_{10}^3}+\frac{C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{14}{15}.$$

注:求 $P(A_2)$时,完全可以考虑 A_2 的逆事件,$\overline{A}_2$ 表示“三个数字中既含 0,又含 5”,

则 $P(A_2)=1-P(\overline{A}_2)=1-\frac{C_8^1}{C_{10}^3}=1-\frac{1}{15}=\frac{14}{15}$.

【例 13】 考虑一元二次方程 $x^2+Bx+C=0$. 其中 B,C 分别是将一枚骰子接连掷两次先后出现的点数,求该方程式有实根的概率 p 和有重根的概率 q.

解:一枚骰子掷两次,其基本事件总数为 36,方程有重根的充要条件是 $B^2\geqslant 4C$,即 $C\leqslant B^2/4$.

B(第一次掷得点数)	1	2	3	4	5	6
件$\left(C\leqslant\frac{B^2}{4}\right)$包含的基本事件数	0	1	2	4	6	6
件$\left(C=\frac{B^2}{4}\right)$包含的基本事件数	0	1	0	1	0	0

所以,使方程有实根的基本事件数为 $1+2+4+6+6=19$,方程有实根的概率为 $p=\dfrac{19}{36}$,方程有重根的充要条件为 $B^2=4C$,满足此条件的基本事件共有 2 个,因此,$q=\dfrac{2}{36}=\dfrac{1}{18}$.

【例 14】 已知$0<P(B)<1$,且 $P\{(A_1+A_2)\mid B\}=P\{A_1\mid B\}+P\{A_2\mid B\}$则下列选项成立的是________.

A. $P\{(A_1+A_2)\mid\overline{B}\}=P\{A_1\mid\overline{B}\}+P\{A_2\mid\overline{B}\}$;

B. $P(A_1B+A_2B)=P(A_1B)+P(A_2B)$;

C. $P(A_1+A_2)=P(A_1\mid B)+P(A_2\mid B)$;

D. $P(B)=P(A_1)\cdot P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)$.

解:选项 B.

由乘法公式,又 $P(B)>0$,等式两边同乘 $P(B)$,

左边 $P\{(A_1+A_2)\mid B\}\cdot P(B)=P\{(A_1+A_2)B\}=P(A_1B+A_2B)$,

右边$(P\{A_1\mid B\}+P\{A_2\mid B\})\cdot P(B)=P\{A_1\mid B\}\cdot P(B)+P\{A_2\mid B\}\cdot P(B)$

$=P(A_1B)+P(A_2B)$.

所以选(B).

【例 15】 设 A、B 为任意两个事件且$A\subset B$,$P(B)>0$则下列选项必然成立的是____.

A. $P(A)<P(A\mid B)$;B. $P(A)\leqslant P(A\mid B)$;

C. $P(A)>P(A\mid B)$;D. $P(A)\geqslant P(A\mid B)$.

解:由 $A\subset B$,$P(B)>0$,根据定义:

$P\{A\mid B\}=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{P(A)}{P(B)}\geqslant P(A)$(当 $P(B)=1$ 时,有可能

取等号)

故选项(B).

四、考研模拟自测题及答案

(一)单项选择题(每题3分,共30分)

1. A、B 为两个事件,则 $A-B$ 不等于______.

A. $A-AB$; B. $A\overline{B}$;

C. $\overline{A}B$; D. $(A\cup B)-B$.

2. 若 $P(AB)=0$,则______.

A. A 与 B 互不相容; B. $P(A)=0$ 或 $P(B)=0$;

C. A 与 B 相互独立; D. A 与 B 不一定互不相容.

3. 已知 A 与 B 相互独立,则下列命题中不正确的是______.

A. $P(B|A)=P(B)$; B. $P(A|B)=P(A)$;

C. $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$; D. $P(A)=1-P(B)$.

4. 事件 A、B 满足 $P(A)+P(B)>1$,则 A 与 B 一定______.

A. 不相互独立; B. 不互斥;

C. 相互独立; D. 互不相容.

5. 若 $P(\overline{A\cup B})=[1-P(A)][1-P(B)]$,则 A 与 B 应满足条件______.

A. A 与 B 互斥; B. $A\supset B$;

C. $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 互斥; D. A 与 B 相互独立.

6. A 与 B 互斥,$P(A)=0.4$,$P(B)=0.3$,则 $P(\overline{A}\,\overline{B})=$______.

A. 0.3; B. 0.12;

C. 0.42; D. 0.7.

7. 已知事件 A 与 B 相互独立,$P(\overline{A})=0.5$,$P(\overline{B})=0.6$,则 $P(A\cup B)=$______.

A. 0.9; B. 0.7;

C. 0.1; D. 0.2.

8. 6本语文书和4本数学书，任意在书架上摆放，则4本数学书放在一起的概率是______.

A. $\frac{4!\ 6!}{10!}$; B. $\frac{7}{10}$;

C. $\frac{4!\ 7!}{10!}$; D. $\frac{4}{10}$.

9. 从一幅52张的扑克牌中，任意取5张，其中没有K字牌的概率为______.

A. $\frac{48}{52}$; B. $\frac{C_{48}^5}{C_{52}^5}$;

C. $\frac{C_{48}^5}{52}$; D. $\frac{48^5}{52^5}$.

10. 随意地投掷一均匀骰子两次，则两次出现的点数之和为8的概率为______.

A. $\frac{3}{36}$; B. $\frac{4}{36}$;

C. $\frac{5}{36}$; D. $\frac{2}{36}$.

(二)填空题(每题3分，共15分)

1. 设 A 与 B 为互不相容的两事件，$P(B)>0$，则 $P(A|B)=$ ____.

2. 设 $\overline{A}$ 与 B 是两个相互独立的事件，且 $P(\overline{A})=0.7$，$P(B)=0.4$，则 $P(AB)=$ ____.

3. 设 A,B 为两个相互独立的事件，$P(A)=0.2$，$P(B)=0.4$，则 $P(A\cup B)=$ ____.

4. 设 A,B 为两个事件，$P(A)=0.4$，$P(B)=0.8$，$P(\overline{A}B)=0.5$，则 $P(B|A)=$ ____.

5. 若袋中有3个红球，12个白球，从中不放回地取10次，每次取一个，则第一次取到红球的概率为____，第5次取到红球的概

率为____.

(三)计算题(每题 11 分,共 55 分)

1. 某产品一盒共 10 只,已知其中有 3 只次品,从盒中任取两次,每次任取一只,不放回,求(1)第一次取到次品后,第二次又取到次品的概率;(2)两次都取到次品的概率.

2. 一个工人照看三台机床,在一小时内,甲、乙、丙三台机床需要人看管的概率分别是 0.8、0.9 和 0.85,求在一小时内:

(1)没有一台机床需要照看的概率;

(2)至少有一台机床不需要照看的概率.

3. 一个工人看管三台机床,在一小时内机床不需要工人照管的概率,第一台为 0.9,第二台为 0.8,第三台为 0.7,求在一小时内三台机床中至多有一台需要工人照管的概率.

4. 设有三只外形完全相同的盒子,Ⅰ号盒中装有 14 个黑球,6 个白球;Ⅱ号盒中装有 5 个黑球,25 个白球;Ⅲ号盒中装有 8 个黑球,42 个白球.现在从三个盒子中任取一盒,再从中任取一球,求:(1)取到的球是黑球的概率;

(2)如果取到的是黑球,它是取自Ⅰ号盒中的概率.

5. 某仪器有三个独立工作的元件,它的损坏的概率都是 0.1,当一个元件损坏时,仪器发生故障的概率为 0.25;当两个元件损坏时,仪器发生故障的概率为 0.6;当三个元件损坏时,仪器发生故障的概率为 0.95,求仪器发生故障的概率.

同步综合练习答案

(一)单项选择题

1. C　2. D　注:$P(A)=0$,A 不一定为 $\varnothing$　3. D　4. B　5. D
6. A　7. B　8. C　9. B　10. C