GAODENG ZHIYE JIAOYU

高等职业教育课程改革示范教材

冯 宁◎主编

高等数学（应用）

南京大学出版社

高等职业教育课程改革示范教材

高等数学(应用)

主　　编　冯　宁
编写人员　杨晓春　庄小红
　　　　　郝　耘

南京大学出版社

内容简介

本书是高等职业教育课程改革示范教材之一，同时也是江苏省高等学校立项建设精品教材．教材分基础模块和应用模块，基础模块满足工科专业一般需求，应用模块满足工科专业特殊需求．基础模块内容包括一元微积分、微分方程、数学软件等，应用模块内容包括空间解析几何、多元函数微积分、级数、拉普拉斯变换、线性代数初步、概率统计初步、数值计算初步等．

本书针对高技能应用型人才培养目标的特点，在教学内容的安排上，遵循"以应用为目的，以必需够用为度"的原则，以"理解基本概念，掌握基本运算方法及应用"为依据，结合教育部制定的"高职高专高等数学课程教学的基本要求"及数学教学的实际经验进行编写，在教学内容的处理上，尽可能借助直观的几何图形、物理含义和实际背景阐述概念、定理和公式，适度论证，突出微积分的基本思想和方法，注重阐明数学的实际应用价值．

本书可作为高职高专工科各专业通用数学教材，也可作为工程技术人员的参考用书．

图书在版编目(CIP)数据

高等数学．应用 / 冯宁主编；杨晓春等编．—南京：南京大学出版社，2008．2

高等职业教育课程改革示范教材

ISBN 978-7-305-05201-9

Ⅰ．高…　Ⅱ．①冯…　②杨…　Ⅲ．高等数学—高等学校：技术学校—教材　Ⅳ．013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 006628 号

出 版 者　南京大学出版社
社　　址　南京市汉口路 22 号　　邮编　210093
网　　址　http://press.nju.edu.com
出 版 人　左　健

丛 书 名　高等职业教育课程改革示范教材
书　　名　高等数学(应用)
主　　编　冯　宁
责任编辑　吴　华　　编辑热线　025-83592146

照　　排　南京玄武湖印刷照排中心
印　　刷　南京人民印刷厂
开　　本　787×1 092　1/16　印张 15　字数 368 千
版　　次　2008 年 2 月第 1 版　　2008 年 2 月第 1 次印刷
印　　数　1～6 000
ISBN　978-7-305-05201-9
定　　价　25.50 元

发行热线　025-83594756
电子邮箱　sales@press.nju.edu.cn(销售部)
　　　　　nupress1@public1.ptt.js.cn

高等职业教育课程改革示范教材
《高等数学》指导委员会

顾　　问　王　煌　王兆明

主任委员　南通职业大学副校长　陈家颐

副主任委员（排名不分先后）

盐城卫生职业技术学院党委书记兼院长　王光文
扬州环境资源职业技术学院院长　徐汝琦
南京信息职业技术学院副院长　王钧铭
常州机电职业技术学院副院长　郝　超
常州工程职业技术学院副院长　陈炳和
江苏海事职业技术学院副院长　曹志平
常州轻工职业技术学院副院长　王志平
常州纺织服装职业技术学院副院长　贺仰东
连云港师范高等专科学校副校长　陈留生
无锡工艺美术职业技术学院副院长　邵汉强
无锡商业职业技术学院副院长　沈书林
苏州拓普信息技术学院副院长　任祥生
硅湖职业技术学院副院长　黄月琼
南京工业职业技术学院副院长　林　苏
扬州职业大学副校长　张　泰
苏州职业大学副校长　程宜康
南京大学出版社社长兼总编　左　健

前 言

为了适应新的职业教育人才培养要求，南京大学出版社根据教育部组织制定的“高职高专教育基础课程教学基本要求”和“高职高专人才培养目标及规格”，组织了有关高职院校教师进行了多次研讨，在继承原有教材建设成果的基础上，充分吸取近年来一些高职院校基础课程教学改革的经验，组织编写了一批“高等职业教育课程改革示范教材”. 本书是其中数学版块的教材之一. 这些教材淡化了理论推导和证明，突出了职业教育改革特色，难易程度更适合现在高职院校的生源状况.

本书在编写过程中，遵循“注意课程衔接，面向专业需求，淡化理论推导，融入建模思想，注重应用能力，强化学习目标”的原则，力求突出如下特点：

1. 面向专业需求，设计选学模块，供不同专业选用，满足工科专业的特殊需求.

2. 淡化理论推导，针对高职学生的数学基础，淡化数学概念和定理的严格表述，适度论证，不过分追求理论上的系统性和逻辑性，力求使基本概念、基本定理直观化、具体化，有些比较深的内容用“*”表示，可供选学.

3. 在每节开头，从案例入手，力求创造有利于学生发现知识的情境，激发学习兴趣，使重要知识点的引入更为朴实、简明和自然，结合具体内容进行数学建模训练，帮助学生获得正确的数学思想方法.

4. 注重应用能力，加强了数学知识在工程技术方面的具体应用，增加了有实际应用背景的例题和习题，注意与后续课程的衔接，力图体现高职教育实践性、应用性强的特点.

5. 在每节前增加了能力目标或学习目标，每章后增加了小结与复习的内容，帮助学生总结重要结论和解题方法，有利于高职学生快速提高运算技能，并起到释疑解难的作用. 小节后大都配有课堂练习、课后习题等，以帮助学生课前预习和课后复习.

本书教学时数建议如下：

序　号	内　　容	课　时	课时分配	
			讲　授	习题课
7	向量与空间解析几何简介	8	6	2
8	多元函数微积分简介	16	14	2
9	级数	10	8	2
10	拉普拉斯变换	8	6	2
11	线性代数初步	16	14	2
12	概率统计初步	24	20	4
13	数值计算初步	6	4	2
	合计	88	72	16

本教材分为基础模块与应用模块(《高等数学(基础)》已于2007年8月出版),参加教材编写的有:常州轻工职业技术学院冯宁(第10、11章)、常州纺织服装职业技术学院杨晓春(第7、8章)、常州机电职业技术学院庄小红(第9章)、常州工程职业技术学院郝耘(第12、13章).教材统稿、定稿工作由冯宁承担.

编　者

2007年11月

目　　录

第 7 章　向量与空间解析几何简介…………………………………………………… 1

§7.1　空间直角坐标系与向量的概念 ……………………………………………… 1
§7.2　向量及其运算 ………………………………………………………………… 3
§7.3* 平面与直线　常见的二次曲面简介…………………………………………… 10

第 8 章　多元函数微积分简介 ……………………………………………………… 21

§8.1　二元函数的极限与连续…………………………………………………… 21
§8.2　偏导数与多元复合函数的求导法………………………………………… 24
§8.3　全 微 分 ……………………………………………………………………… 32
§8.4　多元函数的极值……………………………………………………………… 35
§8.5　二重积分的概念与计算…………………………………………………… 39

第 9 章　级　数 ……………………………………………………………………… 56

§9.1　无穷级数的概念与性质…………………………………………………… 56
§9.2　常数项级数的审敛法……………………………………………………… 60
§9.3　幂 级 数 ……………………………………………………………………… 64
§9.4　傅里叶级数…………………………………………………………………… 72

第 10 章　拉普拉斯变换…………………………………………………………… 84

§10.1　拉氏变换的概念和性质 ………………………………………………… 84
§10.2　拉氏变换的逆变换 ……………………………………………………… 90
§10.3　拉氏变换的应用举例 …………………………………………………… 93

第 11 章　线性代数初步 ………………………………………………………… 101

§11.1　行列式的概念……………………………………………………………… 101
§11.2　行列式的性质与克莱姆法则…………………………………………… 107
§11.3　矩阵的概念及运算………………………………………………………… 115
§11.4　逆 矩 阵 …………………………………………………………………… 125
§11.5　矩阵的初等变换与矩阵的秩…………………………………………… 129
§11.6　线性方程组………………………………………………………………… 134

第 12 章　概率统计初步 ………………………………………………………… 155

§12.1　随机事件…………………………………………………………………… 155

§12.2 事件的概率…………………………………………………………………………………… 158
§12.3 条件概率、乘法公式和全概率公式 ……………………………………………………… 162
§12.4 事件的相互独立性与二项概率公式……………………………………………………… 165
§12.5 随机变量及其分布………………………………………………………………………… 169
§12.6 随机变量的数字特征……………………………………………………………………… 177
§12.7* 统计量及其分布………………………………………………………………………… 181
§12.8* 参数估计………………………………………………………………………………… 185
§12.9* 假设检验………………………………………………………………………………… 189

第 13 章 数值计算初步 ……………………………………………………………………… 199

§13.1 误差与方程求根…………………………………………………………………………… 199
§13.2 插值方法简介……………………………………………………………………………… 203

附表 A 泊松分布表……………………………………………………………………………… 212

附表 B 标准正态分布表 ………………………………………………………………………… 213

附录 C χ^2 分布表 ……………………………………………………………………………… 214

附录 D t 分布表 ………………………………………………………………………………… 215

附录 E 拉氏变换简表 …………………………………………………………………………… 216

附录 F 答　案 ……………………………………………………………………………………… 217

参考文献……………………………………………………………………………………………… 231

第 7 章　向量与空间解析几何简介

向量是解决工程技术问题的重要工具，空间直角坐标系是研究向量和多元函数微积分的基础. 本章在建立空间直角坐标系的基础上研究向量的概念及运算，并以向量为工具讨论空间平面和直线的方程.

§7.1　空间直角坐标系与向量的概念

学习目标

理解空间直角坐标系的概念，掌握空间两点间的距离公式.

主要知识

为了沟通空间图形与数的研究，需要建立空间的点与有序数组之间的联系，为此可以通过引进空间直角坐标系来实现.

一、空间直角坐标系

过空间一定点 O 作三条两两垂直的数轴 Ox，Oy，Oz（一般取相同的长度单位），各轴的正向按右手法则确定，即右手的四指从 Ox 轴正向以 $\frac{\pi}{2}$ 的角度转向 Oy 轴的正向，这时大拇指的指向就是 Oz 轴的正向（如图 7－1），这就建立了空间直角坐标系.

点 O 称为坐标原点，三数轴分别称为 x 轴（横轴），y 轴（纵轴），z 轴（竖轴），统称为坐标轴. 任意两条坐标轴所确定的平面称为坐标面，共有 xOy，yOz，xOz 三个坐标面，它们将空间分成八部分，各部分依次称为第Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，Ⅴ，Ⅵ，Ⅶ，Ⅷ卦限，其位置如图 7－2 所示，坐标面不属于任何卦限.

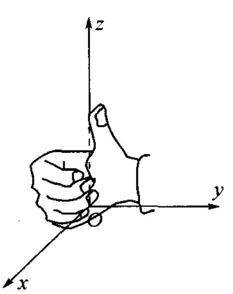

图 7－1

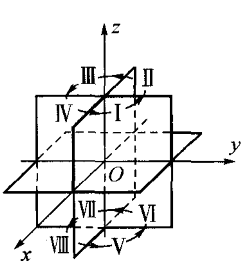

图 7－2

设点 M 为空间的一点，过 M 分别作与 x 轴，y 轴，z 轴垂直的平面，交点分别为 P,Q,R（如

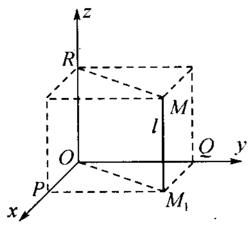

图 7-3

图 7-3),设三点在坐标轴上的坐标依次为 x,y,z,则空间的点 M 唯一确定了一个三元有序数组(x,y,z).

反之,给定一个三元有序数组(x,y,z),若依次在 x 轴,y 轴,z 轴上取与 x,y,z 相对应的点 P,Q,R,过此三点分别作垂直于三条坐标轴的平面,则这三个平面交于点 M. 这样,借助于空间直角坐标系,就建立了空间的点 M 与有序数组(x,y,z)的一一对应关系:

$$空间点\ M \Leftrightarrow 有序数组(x,y,z).$$

(x,y,z)称为点 M 的坐标,记作 $M(x,y,z)$. x,y,z 分别称为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标.

空间直角坐标系中八个卦限、坐标轴、坐标面上点的坐标特征见表 7-1 所示:

表 7-1

各卦限内点的坐标符号	特殊点及坐标
Ⅰ　(+,+,+)	x 轴上的点　$(x,0,0)$
Ⅱ　(−,+,+)	y 轴上的点　$(0,y,0)$
Ⅲ　(−,−,+)	z 轴上的点　$(0,0,z)$
Ⅳ　(+,−,+)	xOy 面上的点　$(x,y,0)$
Ⅴ　(+,+,−)	yOz 面上的点　$(0,y,z)$
Ⅵ　(−,+,−)	xOz 面上的点　$(x,0,z)$
Ⅶ　(−,−,−)	
Ⅷ　(+,−,−)	

二、空间两点间的距离

如图 7-4 所示,设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$,$M_2(x_2,y_2,z_2)$为空间两点,过点 M_1,M_2 分别作垂直于三条坐标轴的六个平面,并围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体,其长、宽、高三条棱的长度分别为

$$|AM_1|=|x_2-x_1|,\ |AB|=|y_2-y_1|,$$

$$|BM_2|=|z_2-z_1|.$$

因此,有

$$|M_1M_2|=\sqrt{|AM_1|^2+|AB|^2+|BM_2|^2},$$

即

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \tag{7-1}$$

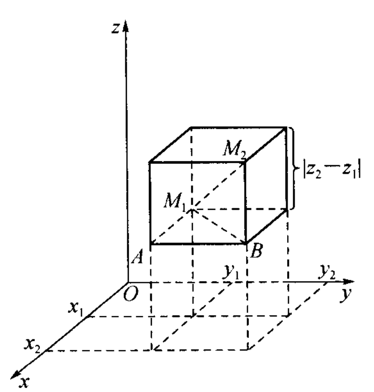

图 7-4

公式(7-1)称为**空间两点间的距离公式**.

特别地，点 $M(x,y,z)$ 与原点 O 的距离公式为

$$|OM| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}. \tag{7-2}$$

练习 7.1

1. 指出下列各点所在的卦限：

$A(-3,5,-2)$；$B(-3,-5,-1)$；$C(-3,-2,7)$；$D(-2,4,5)$.

2. 写出点 $P(3,5,-2)$ 关于下列条件的对称点的坐标：

(1) y 轴；　　(2) xOy 面；　　(3) 坐标原点.

习题 7.1

1. 在 x 轴上求与两点 $P_1(-4,1,7)$ 和 $P_2(3,5,-2)$ 等距离的点.
2. 写出点 $A(-3,2,-1)$ 关于各坐标面和坐标轴的对称点.
3. 如图 7-3 所示的长方体平行于 x,y,z 轴的边长分别为 3,4,5，求八个顶点的坐标.
4. 标出 $A(1,-1,1)$，$B(0,0,-3)$，$C(-2,3,0)$ 三点的位置，并计算 $\triangle ABC$ 的周长.

§7.2　向量及其运算

学习目标

1. 理解向量，向量的模，单位向量，向量的方向角、方向余弦等概念.
2. 掌握向量的坐标表达式，掌握单位向量、方向余弦的坐标表达式.
3. 理解向量的数量积与向量积的概念，掌握向量的数量积与向量积的运算.
4. 掌握两个向量平行、垂直的充要条件.

主要知识

一、向量的基本概念

既有大小又有方向的量称为向量（矢量），如：速度、加速度、力、位移等. 数学上通常用有向线段表示向量，如以 A 为起点，B 为终点的向量记作 $\overrightarrow{AB}$，也可用黑体小写字母或标上箭头的字母表示向量，如 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 或 $\vec{a}$，$\vec{b}$.

向量的大小（长度）称为向量的模，记作 $|\overrightarrow{AB}|$ 或 $|\boldsymbol{a}|$.

模为 0 的向量称为零向量，记作 $\boldsymbol{0}$ 或 $\vec{0}$，其方向可以看作是任意的.

模为 1 的向量称为单位向量. 与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量记作 $\boldsymbol{a}^0$，且有

$$\boldsymbol{a}^0 = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}.$$

方向相同且模相等的两个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 称为相等向量，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

二、向量的空间坐标表示

空间直角坐标系中,分别以 x 轴,y 轴,z 轴的正向为方向的单位向量称为**基本单位向量**,并分别记作 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$.

1. 向径及其坐标表示

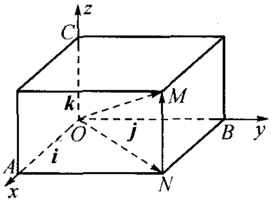

图 7-5

起点在原点、终点在点 $M(x,y,z)$ 的向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}$ 称为点 M 的向径(如图 7-5). 由向量线性运算中的数与向量的乘法运算,有

$$\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{i},\overrightarrow{OB}=y\boldsymbol{j},\overrightarrow{OC}=z\boldsymbol{k},$$

由向量加法的三角形法则,有

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NM}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AN})+\overrightarrow{NM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k},$$

即

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

上式称为**向量 $\boldsymbol{a}$ 按基本单位向量的分解式**,其中 $x\boldsymbol{i},y\boldsymbol{j},z\boldsymbol{k}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在 x,y,z 轴的分向量.

由上还可知,有序数组(x,y,z)与向量 $\boldsymbol{a}$ 之间存在一一对应关系,故可用它来表示向量 $\boldsymbol{a}$,记作

$$\boldsymbol{a}=\{x,y,z\}.$$

上式称为**向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表示式**. 数 x,y,z 称为**向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标**.

2. 向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的坐标表示

如图 7-6 所示,对以 $M_1(x_1,y_1,z_1)$为起点,$M_2(x_2,y_2,z_2)$为终点的向量$\overrightarrow{M_1M_2}$,有

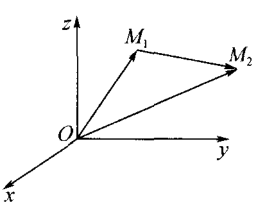

图 7-6

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M_2}&=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}\\&=(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})-(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\\&=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

则向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的坐标表达式为

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}.$$

3. 向量线性运算的坐标表示

利用向量的坐标表示,可以将向量的线性运算转化为坐标间的代数运算.

设向量 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$,$\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$,则有

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\{a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z\}$;

(2) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\{a_x-b_x,a_y-b_y,a_z-b_z\}$;

(3) $\lambda\boldsymbol{a}=\{\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z\}$($\lambda$ 为实数);

(4) $\boldsymbol{a}\mathbin{/\!/}\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$($\lambda$ 为实数)$\Leftrightarrow\dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}=\dfrac{a_z}{b_z}$.

4. 向量的模及方向余弦的坐标表示

(1) 向量的模：

任给一向量 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$，都可将其看作以原点 O 为起点，$M(a_x,a_y,z_z)$ 为终点的向径$\overrightarrow{OM}$，即 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}$. 由空间两点间的距离公式，可知向量 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$ 的模

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}.$$

(2) 向量的方向角及方向余弦：

向量 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$ 的方向可以分别用 $\boldsymbol{a}$ 与 x 轴，y 轴，z 轴正向的夹角来确定，如图 7－7 所示.

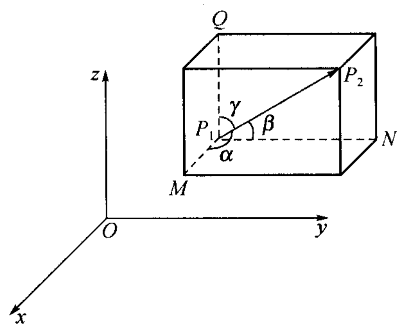

图 7－7

定义 7－1　非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 x 轴，y 轴，z 轴正向的夹角称为**向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角**，分别记作 α,β,γ(其中 $0\leqslant\alpha\leqslant\pi,0\leqslant\beta\leqslant\pi,0\leqslant\gamma\leqslant\pi$)，方向角的余弦称为非零向量 $\boldsymbol{a}$ 的**方向余弦**.

非零向量 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$ 的**方向余弦的坐标表示式是**

$$\cos\alpha=\frac{\boldsymbol{a}_x}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{\boldsymbol{a}_y}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{\boldsymbol{a}_z}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}.$$

方向余弦满足以下关系式

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

用非零向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦表示与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量 $\boldsymbol{a}^0$，有

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{\{a_x,a_y,a_z\}}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}.$$

例 7.2.1　已知两点 $M_1(1,-\sqrt{2},5)$，$M_2(2,0,4)$，求向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的模、方向余弦、方向角及与$\overrightarrow{M_1M_2}$同方向的单位向量$\overrightarrow{M_1M_2}^0$.

解　由于

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\{2-1,0-(-\sqrt{2}),4-5\}=\{1,\sqrt{2},-1\},$$

所以

$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2+(-1)^2}=2,$$

$$\cos\alpha=\frac{1}{2},\cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{2},\cos\gamma=-\frac{1}{2},$$

$$\alpha=\frac{\pi}{3},\beta=\frac{\pi}{4},\gamma=\frac{2\pi}{3},$$

$$\overrightarrow{M_1M_2}^0=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}=\left\{\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{2}\right\}$$

或
$$\overrightarrow{M_1M_2}^0=\frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{|\overrightarrow{M_1M_2}|}=\left\{\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{2}\right\}.$$

三、向量的乘积运算

在物理问题中,两个向量的乘积可能是一个数量(如功),也可能是一个向量(如力矩).为此,我们相应地定义向量的两种乘积——数量积与向量积.

1. 两向量的数量积

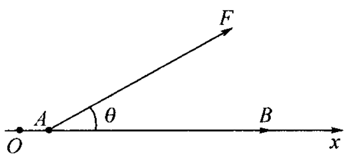

图 7-8

如果一物体在常力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下沿直线从 A 移动到 B,其位移 $\boldsymbol{S}=\overrightarrow{AB}$,则力所做的功为 $W=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{S}|\cos\theta$,其中 θ 为 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{S}$ 的夹角(如图 7-8),功 W 是一个数量.

两向量按上述乘积形式构成的运算确定一个数量,在其他问题中还会遇到,数学上把这类问题抽象为两个向量的数量积.

(1) 数量积的定义及性质:

定义 7-2 设两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,夹角为 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$,则称数 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**数量积**(或点积),记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})\quad(0\leqslant(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})\leqslant\pi).$$

按照定义 7-2,力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功可表示为 $W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{S}$.

数量积有以下性质:

① $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$,特别地,$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1$;

② 两非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直(记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$) 的充要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,特别地,$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0$.

不难证明,数量积满足以下运算规律:

① 交换律 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$;

② 结合律 $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$,其中 λ 为实数;

③ 分配律 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$.

(2) 数量积的坐标表示:

设向量 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\},\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$,则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_xb_x(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i})+a_xb_y(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j})+a_xb_z(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k})+a_yb_x(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i})+a_yb_y(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j})+\\&\quad a_yb_z(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k})+a_zb_x(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i})+a_zb_y(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j})+a_zb_z(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}),\end{aligned}$$

所以
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.\qquad(7-3)$$

公式(7 - 3)称为**数量积的坐标表示式**.

由(7 - 3)式又可得到两非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 夹角余弦的坐标表示式

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.\tag{7-4}$$

由上式知　$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0.$

例 7.2.2　已知向量 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j},\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

解　由 $\boldsymbol{a}=\{-1,-1,0\},\boldsymbol{b}=\{-1,0,-1\}$，得

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=(-1)\times(-1)+(-1)\times0+0\times(-1)=1,$$

于是
$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{2},$$

所以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为
$$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\pi}{3}.$$

例 7.2.3　设有一方向角分别为 60°，60°，135°，大小为 100 N 的力 $\boldsymbol{F}$，它使得一质点从 $A(3,-1,5\sqrt{2})$ 作直线运动至点 $B(-1,4,0)$，求力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功(坐标长度单位：m).

解　由于力的方向角分别为 60°，60°，135°，所以与力 $\boldsymbol{F}$ 同向的单位向量为

$$\boldsymbol{F}^0=\{\cos60°,\cos60°,\cos135°\}=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right\},$$

于是
$$\boldsymbol{F}=|\boldsymbol{F}|\cdot\boldsymbol{F}^0=100\cdot\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}=\{50,50,-50\sqrt{2}\},$$

又
$$\overrightarrow{AB}=\{-1-3,4+1,0-5\sqrt{2}\}=\{-4,5,-5\sqrt{2}\},$$

因此，力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功为

$$W=\boldsymbol{F}\cdot\overrightarrow{AB}=50\times(-4)+50\times5+50\sqrt{2}\times5\sqrt{2}=550(\mathrm{J}).$$

2. 两向量的向量积

如图 7 - 9(a)所示，设 O 为一杠杆的支点，力 $\boldsymbol{F}$ 作用于杠杆上点 P 处，由力学知识可知，力 $\boldsymbol{F}$ 对支点 O 的力矩是一个向量 $\boldsymbol{M}$，它的模为

$$|\boldsymbol{M}|=|\boldsymbol{F}|\cdot|\overrightarrow{OQ}|=|\overrightarrow{OP}||\boldsymbol{F}|\sin\theta,$$

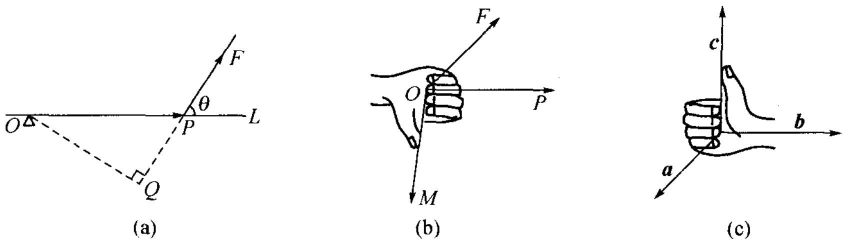

图 7 - 9

其中,$|\overrightarrow{OQ}|$ 为支点 O 到力 $\boldsymbol{F}$ 的作用线的距离(力臂),θ 为 $\boldsymbol{F}$ 与 $\overrightarrow{OP}$ 的夹角.

力矩 $\boldsymbol{M}$ 的方向:$\boldsymbol{M}\perp\overrightarrow{OP}$,$\boldsymbol{M}\perp\boldsymbol{F}$,且 $\overrightarrow{OP}$,$\boldsymbol{F}$,$\boldsymbol{M}$ 构成右手系,即当右手的四指从 $\overrightarrow{OP}$ 以小于 π 的角度转向 $\boldsymbol{F}$ 时,大拇指所指的方向就是力矩 $\boldsymbol{M}$ 的方向(如图 7-9(b)).

还有一些向量也具有上述特征,如物理上的磁力等,数学上把这类由两个向量按上述方法确定另一个向量的问题,抽象为两个向量的向量积.

(1) 向量积的定义及性质:

定义 7-3 设向量 $\boldsymbol{c}$ 由两个已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 按下列方式给出:

① $\boldsymbol{c}$ 的模:$|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$;

② $\boldsymbol{c}$ 的方向:$\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$,且按右手法则确定,即当四指从 $\boldsymbol{a}$ 转向 $\boldsymbol{b}$ 时,大拇指所指方向即为 $\boldsymbol{c}$ 的方向(如图 7-9(c)).

则向量 $\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积(或叉积),记作 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$,即 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

按上述定义,前面提到的力矩 $\boldsymbol{M}$ 可表示为 $\boldsymbol{M}=\overrightarrow{OP}\times\boldsymbol{F}$.

由定义还可知,向量积的模 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 在几何上表示以 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积.

向量积有以下性质:

① $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$;

② 非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行(记作 $\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{b}$)的充要条件是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

向量积有如下运算规律:

① 反交换律 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$;

② 结合律 $(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$,其中 λ 为实数;

③ 分配律 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$.

由向量积的定义、性质、运算规律,可得

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0};$$

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j};$$

$$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i},\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}.$$

(2) 向量积的坐标表示:

设向量 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$,$\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$,则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_xb_x(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i})+a_xb_y(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})+a_xb_z(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k})+a_yb_x(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i})+a_yb_y(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j})+\\&\quad a_yb_z(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k})+a_zb_x(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i})+a_zb_y(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j})+a_zb_z(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}),\end{aligned}$$

所以
$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}.\tag{7-5}$$

公式(7-5)称为**向量积的坐标表示式**.

为了便于记忆上式,利用§11.1节中二阶、三阶行列式的展开式(11-4)和(11-6),将式(7-5)写成三阶行列式的形式:

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}.$$

注意　这个三阶行列式的计算结果是一个向量. 计算时,只需将其按第一行展开即可.

例 7.2.4　设向量 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$,求 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$.

解　由 $\boldsymbol{a}=\{3,0,-1\}$, $\boldsymbol{b}=\{2,-3,2\}$,得

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 3 & 0 & -1\\ 2 & -3 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & -1\\ -3 & 2\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}3 & -1\\ 2 & 2\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}3 & 0\\ 2 & -3\end{vmatrix}\boldsymbol{k}$$

$$=-3\boldsymbol{i}-8\boldsymbol{j}-9\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}+8\boldsymbol{j}+9\boldsymbol{k}.$$

例 7.2.5　求同时垂直于向量 $\boldsymbol{a}=\{2,4,-1\}$ 和 $\boldsymbol{b}=\{0,-2,2\}$ 的单位向量.

解　设向量 $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$,则 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$, 于是有

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & 4 & -1\\ 0 & -2 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4 & -1\\ -2 & 2\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}2 & -1\\ 0 & 2\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}2 & 4\\ 0 & -2\end{vmatrix}\boldsymbol{k}$$

$$=6\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}=\{6,-4,-4\},$$

$$|\boldsymbol{c}|=\sqrt{6^2+(-4)^2+(-4)^2}=2\sqrt{17}.$$

因此,所求的单位向量为

$$\boldsymbol{c}^0=\pm\frac{\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|}=\left\{\frac{3\sqrt{17}}{17},-\frac{2\sqrt{17}}{17},-\frac{2\sqrt{17}}{17}\right\}.$$

例 7.2.6　求以 $A(1,2,3)$, $B(3,4,5)$ 和 $C(2,4,7)$ 为顶点的 $\triangle ABC$ 的面积.

解　因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\sin(\overrightarrow{AB},\widehat{\ }\overrightarrow{AC})$

$$=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|.$$

$$\overrightarrow{AB}=\{2,2,2\},\overrightarrow{AC}=\{1,2,4\},$$

而
$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 4\end{vmatrix}=4\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}=\{4,-6,2\},$$

所以
$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{4^2+(-6)^2+2^2}=\sqrt{14}.$$

练习 7.2

1. 设向量 $\boldsymbol{a}=7\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$,已知它的终点为$(1,2,3)$,求 $\boldsymbol{a}$ 起点的坐标,并求出 $\boldsymbol{a}$ 的模与方向余弦.
2. 已知向量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}+m\boldsymbol{k}$,且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直,求 m 的值.
3. 设向量 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ 与向量 $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 共线,求 x,z.