高职高专“十一五”规划教材
GAOZHI GAOZHUAN SHIYIWU GUIHUA JIAOCAI
（数学立体化系列教材）

应用数学基础

（五年制）下册

阎章杭　哈斯　刘岩　主编

YINGYONG SHUXUE JICHU

第二版

化学工业出版社

高职高专“十一五”规划教材

（数学立体化系列教材）

应用数学基础

（五年制） 下册

第二版

阎章杭 哈 斯 刘 岩 主编

化学工业出版社

·北 京·

本教材属立体化教材，其主要内容有：一元函数与多元函数微积分、概率和数理统计基础、线性代数基础、无穷级数、常微分方程简介等。其内容涵盖了高职高专院校各工程类专业，经济、管理等文科专业所必需的数学知识以及如何利用这些知识解决实际问题的方法。另外，本书还以数学实验的形式，增设了利用数学软件解决实际问题的内容，供有条件的院校选用。

本教材突破传统教材的体系，精选内容、重点突出，注重应用。

本教材可根据文、理、工不同专业，不同学生类别选学不同的内容，供选学的面宽。

所选的例题和习题均以帮助学生理解概念、掌握方法为目的，删除了单纯性技巧和难度较大的习题，增加富有启发性、应用性及为专业服务的题目。

在该教材出版同时，还出版有配套使用的教材《应用数学基础训练教程》（五年制）上册，内容包括每章小结，常见问题分类及解法，习题答案及典型习题解答等。

另外还编制了配套电子教案，并免费赠送师生授课及实训使用，建有专门网站：数学规划教材网（www. shuxue999. net），提供相应网上服务。

本书可作为高职高专院校、成人高校和本科院校开办的二级院校五年制以及三年制各专业的学生学习高等数学及应用数学的数学教材。也可作为中职学校相应的数学教材。另外，还可供工程技术人员、经济管理人员参考使用。

图书在版编目（CIP）数据

应用数学基础. 五年制. 下册/阎章杭，哈斯，刘岩主编. —2 版. —北京：化学工业出版社，2008. 3
高职高专“十一五”规划教材
ISBN 978-7-122-02282-0

Ⅰ. 应… Ⅱ. ①阎…②哈…③刘… Ⅲ. 应用数学-高等学校：技术学院-教材 Ⅳ. O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 030401 号

责任编辑：高　钰　　　装帧设计：韩　飞
责任校对：郑　捷

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街 13 号　邮政编码 100011）
印　　刷：北京市振南印刷有限责任公司
装　　订：三河市宇新装订厂
787mm×1092mm　1/16　印张 20½　字数 516 千字　　2008 年 6 月北京第 2 版第 1 次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899
网　　址：http://www. cip. com. cn
凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　价：35. 00 元

数学立体化系列规划教材编审委员会

前言

当前，我国高职高专教育成为社会关注的热点，面临大好的发展机遇。同时，国家的经济、科技和社会发展也对高职高专教育人才的培养提出了更高的要求。而大学数学是高职高专院校各专业必修的一门重要的基础课，它对培养、提高学生的思维素质、创新能力、科学精神以及用数学解决实际问题的能力都有着非常重要的作用。为了进一步推动全国大学数学课程的改革及相应的教材建设，使其更加适应当前形势发展的需要，开封大学、河南大学、石家庄铁路职业技术学院、包头职业技术学院、徐州建筑职业技术学院、天津渤海职业技术学院、北京工业职业技术学院、黄河水利职业技术学院、商丘职业技术学院、石家庄职业技术学院、吉林交通职业技术学院、漯河职业技术学院、南阳理工学院、三门峡职业技术学院、无锡职业技术学院、漳州职业技术学院、雅安职业技术学院、邵阳职业技术学院等院校的优秀教师和专家，先后经过长达八年的通力合作，于近几年联合编写并成功出版了《高等数学与工程数学》（第二版）、《高等数学与经济数学》（第二版）、《应用数学基础》（五年制）、《高等数学》（少学时）、《高等应用数学》（少学时）等多套高职高专规划教材，为了使教材更上一个层次，教材编审委员会还于近两年投入相当大的人力、财力、物力使该系列教材完善成立体化教材，由于教材很有自身特色，多年来，所编教材深受全国几十所使用该教材院校的欢迎，其中教材《高等数学与工程数学》（第二版）已被教育部列为普通高等教育"十一五"国家级规划教材。

《应用数学基础》（五年制）（第二版）教材是在第一版教材的基础上，对原教材进行认真整理和修订的，并将其完善成立体化教材，从而确保了新教材的质量和自身特色。

在该套教材的编写过程中，我们以教育部关于五年制高职教育数学教学大纲为重要依据组织教学内容编写，并广泛吸取同类教材的长处，力争使教材更具有科学性和实用性。

本套教材共设三篇，第一篇：初等数学；第二篇：一元函数微积分；第三篇：专业数学。

教材特点：

在该套教材的编写中，我们努力遵循"拓宽基础，强化能力，立足应用"的原则。突出五年一贯制及职业教育的特色，具体如下。

① 在初等数学与高等数学的内容编排上，除了注意它们的共性规律外，还注意到它们不同的规律。初等数学部分强调其基础性、实用性、系统性，注意与初中数学知识的衔接；高等数学与专业数学部分强调对综合素质和能力的培养，注重教材内容的应用性，注意与专业知识的结合。

② 在保证基础、重视素质教育的前提下，能突破传统教材体系，精选内容、主次分明、删除枝节、注意应用、讲究实效。对一些较繁的定理、公式及很明显的结论，有的只给出了结果，有的用几何直观予以说明，所选的例题和习题均以帮助学生理解概念、掌握方法为目的，删去单纯的技巧或较难的题目，增加富有启发性或为专业服务的题目。

③ 采用了新颖的编排格式，如在正文，用符号$\boxed{?}$、$\boxed{!}$的形式，分别对教材的重点、难点、疑问部分提出思考或指出内容的依据和出处，以利于学生学习。本套教材还加大了选修的内容，各院校可根据不同专业、不同的学生类别，按模块选学不同的内容，供选择的面较宽，而每块内容比较精练，因而所用学时数较少。

④ 本套教材是文理兼用，它不仅优化了数学在物理方面的应用，而且还增加了数学在经济领域内的应用，这样有利于学生综合素质的提高。

⑤ 考虑到计算机已经越来越普及，以及 Mathematica 软件的广泛使用，本教材以数学实验的形式，将 Mathematica 软件的应用穿插到有关章节中去，以供有条件的学校选用。

⑥ 另外赠送授课用及实训用电子教案。

⑦ 建有专门的网站：数学规划教材网（www.shuue 999.net），提供如教材分析、教学建议、典型教案、辅导答疑等相应的网上服务。

《应用数学基础》（五年制）下册（第二版）内容包括：一元函数微积分、多元函数微积分、概率数理统计、线性代数以及无穷级数、常微分方程简介等。标有 * 号的内容供不同专业根据专业的需要选用。

与该教材配套使用的还有辅助教材《应用数学基础训练教程》（五年制）下册。其内容包括：主册每章内容小结、常见问题分类及解题方法、典型习题解答与提示、自我测学（备选习题）及往届期终试卷精选。辅助教材为该门课程的习题课教学提供了必要的素材和条件。

该书由阎章杭总策划、负责组织实施。副主编：马幼梅、刘青桂、路世英。主审：白水周。

参加该书编审人员的编审情况是（按章节顺序排名）：李媛媛、张荣、拜云胜、马幼梅、刘岩（第十三、十四、十五章），郭建萍、韩成标、安岩（第十六、十七章），牛铭、崔树祥、刘青桂、张卫华（第十八、十九章），李希洛、余平洋、阎章杭（第二十、二十一章），哈斯、路世英、辛自力（第二十二、二十三章）。

在本教材的编写过程中，曾得到有关院校的领导、系部领导和有关专家的大力支持和帮助，杜跃鹏老师积极参与了利用 Mathematica 软件进行数学实验以及数学动画库的制作，余平洋、张媛媛、王霞、赵科、朱立柱、张建平等教师积极参与了该套书的电子教案的编写以及相应的网站建设等项工作。河南大学阎育华与王国胜教授对本书的专业数学部分进行了认真的审核，并提出了许多宝贵的意见，在此一并表示衷心的谢意！由于我们水平有限，不足之处恳请广大读者批评指正。

数学立体化系列规划教材编审委员会

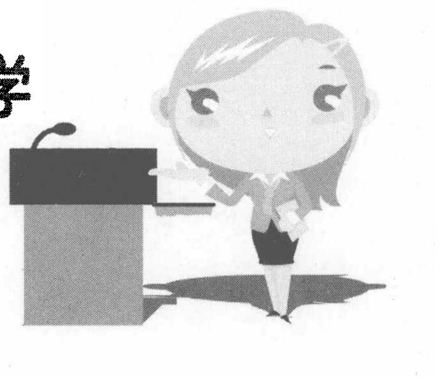
2008 年 1 月

目 录

第二篇　一元函数微积分学

第三篇　专业数学

第二篇 一元函数微积分学



主要内容

- 函数、极限和连续
- 导数与微分
- 导数的应用
- 一元函数积分学
- 积分的应用

第十三章 函数、极限与连续

微积分是数学中的重要分支，是高等数学的核心．而函数和极限分别是微积分的研究对象和工具，因此本章将在复习和加深函数有关知识的基础上，着重讨论函数的极限和函数的连续性等问题．

第一节 函 数

一、函数的概念

1. 函数的定义

定义 1 设 D 是一个数集，如果对属于 D 的每一个数 x，按照某个对应关系 f，都有确定的数值 y 与之对应，则称 y 是定义在数集 D 上的 x 的**函数**，记作 $y=f(x)$，x 叫作**自变量**，数集 D 叫作函数的**定义域**，当 x 取遍 D 中的一切数时，与它对应的函数值的集合 M 叫作函数的**值域**．当自变量取某一数值 x_0 时，函数 y 具有确定的对应值，则称函数在 x_0 处有定义．

如果对于每一个 $x\in D$，都有惟一的 $y\in M$ 与之对应，那么称这种函数为**单值函数**，否则为**多值函数**．（$\boxed{?}$你能举出一个多值函数的例子吗?）

本书所研究的函数若无特殊说明均指单值函数．

在函数定义中，并没有要求自变量变化时，其函数值一定要变，只要求对于每一个自变量 $x\in D$ 都有确定的 y 值与之对应，因此，常量 $y=c$ 也符合函数的定义，即当 $x\in \mathbf{R}$ 时，所对应的 y 值都是确定的常数 c，称这样的函数为**常量函数**．

通过函数定义，可以发现，构成函数的两个重要因素为对应关系与定义域．

显然，两个函数只有当它们的定义域和对应关系完全相同时，这两个函数才认为是相同的．

例如，函数 $y=\sin^2 x+\cos^2 x$ 与 $y=1$，它们的定义域和对应关系都相同，所以它们是相同的函数．

又如，函数 $y=\dfrac{x^2}{x}$ 与 $y=x$，它们的定义域不同，所以它们是不同的函数．

2. 函数的定义域

定义域是构成函数的重要因素之一，因此研究函数，就必须注意函数的定义域．在考虑实际问题时，应根据问题的实际意义确定定义域．例如，匀速直线运动的位移 $s=vt$，t 是时间，故只能

取非负数．对于用数学式表示的函数，其定义域由函数表达式本身来确定，即使运算有意义．如：

① 函数中有分式，要求分母不能为零；

② 函数中有根式，要求负数不能开偶次方；

③ 函数中有对数式，要求真数必须大于零；

④ 函数中有三角函数式和反三角函数式，要求符合它们的定义域；

⑤ 若函数式是上述各式的混合式，则应取各部分定义域的交集．

例 1　求下列函数的定义域．

(1) $y=\dfrac{1}{4-x^2}+\sqrt{x+2}$；(2) $y=\lg\dfrac{x-1}{x-2}$；(3) $y=\arcsin\dfrac{x+1}{3}+\sqrt{x+1}$.

解　(1) 因为 $4-x^2\neq 0$，所以 $x\neq\pm 2$. 又因为 $x+2\geqslant 0$，所以 $x\geqslant -2$，因此函数定义域为$(-2,2)\cup(2,+\infty)$.

(2) 因为$\dfrac{x-1}{x-2}>0$，所以 $x>2$ 或 $x<1$，所以函数定义域为$(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$.

(3) 因为$-1\leqslant\dfrac{x+1}{3}\leqslant 1$，所以$-3\leqslant x+1\leqslant 3$，即$-4\leqslant x\leqslant 2$.

又因为 $x+1\geqslant 0$，所以 $x\geqslant -1$，因此函数的定义域为$[-1,2]$．

3. 函数与函数值的记号

通常，y 是 x 的函数，记为 $y=f(x)$，但若同一问题中，需要讨论几个不同的函数，就要使用不同的函数记号，例如，$F(x)$，$\Phi(x)$，$y(x)$，…

函数 $y=f(x)$，当 $x=x_0\in D$ 时，对应的函数值可以记为 $y_0=f(x_0)$.

例 2　若 $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x+1}$，求 $f(2)$，$f(-2)$，$f(0)$，$f(a)$，$f(a+b)$.

解　$f(2)=0$，$f(-2)=\dfrac{|-4|}{-1}=-4$，$f(0)=\dfrac{|-2|}{1}=2$，$f(a)=\dfrac{|a-2|}{a+1}$，$f(a+b)=\dfrac{|a+b-2|}{a+b+1}$.

4. 函数的表示方法

表示函数的方法，最常用的有以下三种．

(1) 公式法　如 $y=x^a$，$y=\sin x$ 等．

(2) 表格法　如对数表、三角函数表等．

(3) 图像法　用图像表示函数．

有时会遇到一个函数在自变量不同的取值范围内用不同的式子来表示．

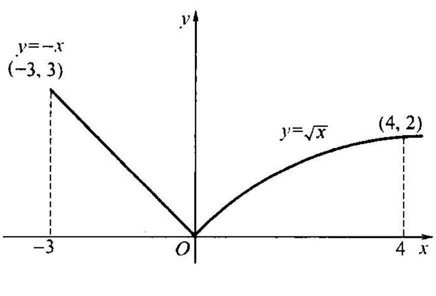


图 13-1　分段函数 $f(x)$的图形

例如，函数$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$

是定义在区间$(-\infty,+\infty)$内的一个函数．当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=\sqrt{x}$；当 $x<0$ 时，$f(x)=-x$. 它的图形如图 13-1 所示．

在不同的区间内用不同的式子来表示的函数称为**分段函数**，即用几个式子合在一起表示一个函数．(?解释分段函数为什么也满足函数的定义?)

求分段函数的函数值时，应将自变量的值代入相应取值范围的表示式进行计算．

例如，上述分段函数中 $f(4)=\sqrt{4}=2$；$f(-3)=-(-3)=3$.

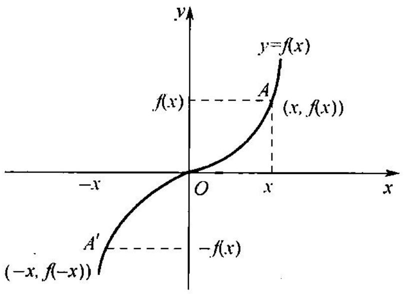
二、函数的几种特性

1. 函数的奇偶性

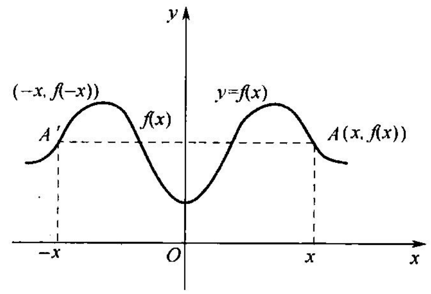
如果函数 $f(x)$ 的定义域关于原点对称，且对任意 x，都有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$为**奇函数**；如果 $f(x)$ 的定义域关于原点对称，且对任意 x，都有 $f(-x)=f(x)$，则称$f(x)$ 为**偶函数**．如果函数既非奇函数，也非偶函数，则称 $f(x)$ 为**非奇非偶函数**．

例如，函数 $y=\sin x$，$y=x^3$ 等都是奇函数；又如，函数 $y=\cos x$，$y=x^2$ 等都是偶函数；而函数 $y=\sin x+\cos x$ 是非奇非偶函数．

奇函数的图形关于原点对称，偶函数的图形关于 y 轴对称，如图 13-2 所示．



(a) 奇函数



(b) 偶函数

图 13-2 奇函数与偶函数的图形

例 3 判断函数 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$的奇偶性．

解 因为 $f(-x)=\ln[(-x)+\sqrt{(-x)^2+1}]=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$

$$=\ln\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)^{-1}=-\ln(\sqrt{x^2+1}+x)=-f(x)$$

所以 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$为奇函数．

2. 函数的单调性

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内随着 x 的增大而增大（或减小），即对于 (a,b) 内任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$[或 $f(x_1)>f(x_2)$]，则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内单调增加（或单调减少）. 在定义域内单调增加或单调减少的函数，统称为**单调函数**，其中 (a,b) 叫作函数 $f(x)$ 的单调增加（或单调减少）区间，也称**单调区间**．

单调增加（或单调减少）函数的图形沿 x 轴的正向上升（或下降）.

上述定义也适用于其他有限区间和无限区间的情形．

例如，由图 13-3 可知，函数 $y=x^2$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内是单调增加的，而在区间 $(-\infty,0)$ 内是单调减少的，它在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内不是单调函数．

又如，由图 13-4 可知，函数 $y=\log_a x\,(a>1)$ 在定义域 $(0,+\infty)$ 内单调增加；函数$y=\log_a x$，$(0<a<1)$ 在定义域 $(0,+\infty)$ 内是单调减少的，所以，它们在定义域 $(0,+\infty)$ 内都是单调函数．

例 4　证明 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 (0,1) 内是单调减少的函数.

证　在区间 (0,1) 内任取两点 x_1，x_2，设 $x_1<x_2$，则 $x_1-x_2<0$. 因为

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}<0$$

所以
$$f(x_1)>f(x_2)$$

根据函数单调减少的定义，可知 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 (0,1) 内是单调减少的函数.

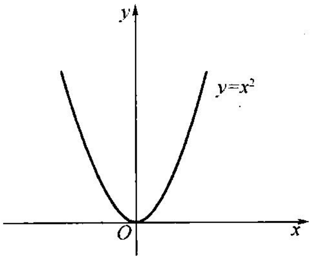


图 13-3　函数 $y=x^2$ 图形

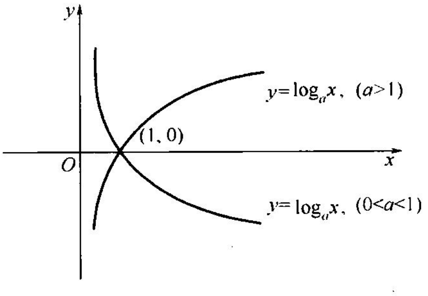


图 13-4　函数 $y=\log_a x$ 图形

3. 函数的周期性

如果有不为零的实数 l 存在，使得 $f(x+l)=f(x)$ 在 $f(x)$ 的定义域内恒成立，则称函数 $f(x)$ 为**周期函数**. 称 l 是 $f(x)$ 的周期，显然 $\pm l$，$\pm 2l$，$\pm 3l$，…，$\pm nl$ 也是它的周期，通常所说的函数的周期是指最小正周期.（!周期不惟一.）

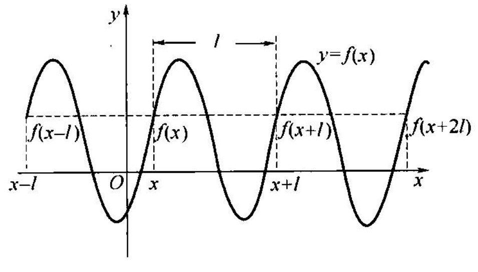


图 13-5　以 l 为周期的函数图形

一个以 l 为周期的函数，它的图形在定义域内每隔长度为 l 的相邻区间上，都有相同的形状，如图13-5所示.

例如，函数 $\cos x$，$\sin x$ 以 2π 为周期，而 $A\sin(\omega x+\varphi)$，$(\omega>0)$ 以 $\dfrac{2\pi}{\omega}$ 为周期.

4. 函数有界性

设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，如果存在一个正数 M，使得对于区间 (a,b) 内的一切 x 值，对应的函数值 $f(x)$ 都有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，则称 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有界；如果不存在这样的正数 M，则称 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内无界.

上述定义也适用于闭区间和无穷区间.

例如，函数 $f(x)=\sin x$ 在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的，因为对于一切 $x\in\mathbf{R}$，$|\sin x|\leqslant 1$ 都成立，这里 $M=1$.

又如，函数 $f(x)=\arctan x$ 在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的，因为对于一切 $x\in\mathbf{R}$，$|\arctan x|<\dfrac{\pi}{2}$ 都成立，这里 $M=\dfrac{\pi}{2}$.

再如，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 (0,1) 内是无界的，因为对于区间 (0,1) 内一切 x，不存在正数 M，使 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant M$ 成立. 但是 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 [1, 2] 内是有界的，因为对于区间

$[1,2]$ 上的一切 x，都有 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$ 成立，这里 $M=1$（图 13-6）.

显然，如果函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内是有界的，则它的图形在 (a,b) 内必介于两平行线 $y=\pm M$ 之间（图 13-7）.（$\boxed{?}$有界函数的界是否惟一？）

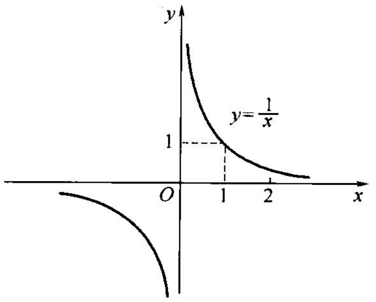


图 13-6　函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 图形

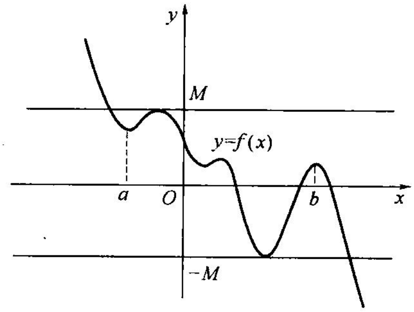


图 13-7　函数 $y=f(x)$ 的有界性

三、复合函数

在很多实际问题中，变量间的函数关系往往是复杂的.

例如，设有边长为 1 的正方形金属薄片，受热后膨胀，边长膨胀了 x，求受热膨胀以后的面积 y.

由于面积 $y=u^2$，u 表示边长，而 $u=1+x$，因此 $y=u^2=(1+x)^2$.

不难看出，这个函数的值不是直接由自变量 x 来确定的，是通过 $u=1+x$ 来确定的，也就是说对于每一个 x，经过中间变量 u，都有一个 y 的值与之对应，所以 y 是 x 的函数，而且这个函数可以看作是由函数 $u=1+x$ 与函数 $y=u^2$ 复合而成的.

定义 2　如果 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，通过 u 将 y 表示成 x 的函数，即 $y=f[\varphi(x)]$，那么 y 就叫作 x 的**复合函数**，其中 u 叫作**中间变量**.

但要注意，函数 $u=\varphi(x)$ 的值域，应该与函数 $y=f(u)$ 的定义域有非空交集，否则复合函数将失去意义.（$\boxed{?}$是否 $u=\varphi(x)$ 的值域必包含在 $y=f(u)$ 定义域之内？）

例如，复合函数 $y=\lg u$，$u=x-1$. 由于 $y=\lg u$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，所以中间变量 $u=x-1$ 的值域必须在 $(0,+\infty)$ 内，即 x 应在 $(1,+\infty)$ 内.

由此可知复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的定义域应为函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域的子集.

当然，也可以由两个以上的函数经过复合构成一个复合函数. 例 $y=\lg u$，$u=\sin v$，$v=\dfrac{x}{2}$，则 $y=\lg\sin\dfrac{x}{2}$，其中 u，v 为中间变量.

下面举例分析复合函数的复合过程. 正确熟练地掌握这个方法，有利于今后微积分的学习.

例 5　指出下列复合函数的复合过程：

(1) $y=\sqrt{1-x^2}$；　(2) $y=\sin^2 x$；　(3) $y=\arcsin(\ln x)$；　(4) $y=2\cos\sqrt{1-x^2}$.

解　(1) 函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 是由函数 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=1-x^2$ 复合而成的；

(2) 函数 $y=\sin^2 x$ 是由函数 $y=u^2$ 和 $u=\sin x$ 复合而成的；

(3) 函数 $y=\arcsin(\ln x)$ 是由函数 $y=\arcsin u$ 和 $u=\ln x$ 复合而成的；

(4) 函数 $y=2\cos\sqrt{1-x^2}$ 是由函数 $y=2\cos u$，$u=\sqrt{v}$ 和 $v=1-x^2$ 复合而成的.