中国教育学会“十一五”科研课题　《新课程背景下的高三教学改革研究》成果之一

新课程背景下的
高考数学知识、方法、题型专题讲座

易中建　主编

四川大学出版社

中国教育学会“十一五”科研课题　　《新课程背景下的高三教学改革研究》成果之一

新课程背景下的
高考数学知识、方法、题型专题讲座

主　编　易中建

副主编　明祖秀　熊　明　盘如春　扬仲明

编　委（按姓氏笔画为序）

田其林　冉建章　任德铭　扬仲明　阳邦云　成　波

牟维静　刘相君　张　坤　张学毅　张建桥　卢晓荣

明祖秀　易中建　林　舰　昌德山　赵顺军　郭功兵

唐义恒　唐登永　秦大志　夏和忠　盘如春　熊　明

靖和平

四川大学出版社

责任编辑:毕　潜
责任校对:马　娜
封面设计:翼虎书装
责任印制:李　平

图书在版编目(CIP)数据

新课程背景下的高考数学知识、方法、题型专题讲座／易中建主编. —成都：四川大学出版社，2008.1
ISBN 978-7-5614-3941-8

Ⅰ.新… Ⅱ.易… Ⅲ.数学课-高中-升学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 004672 号

书名　新课程背景下的高考数学知识、方法、题型专题讲座

主　编	易中建
出　版	四川大学出版社
地　址	成都市一环路南一段 24 号 (610065)
发　行	四川大学出版社
书　号	ISBN 978-7-5614-3941-8/G·938
印　刷	郫县犀浦印刷厂
成品尺寸	185 mm×260 mm
印　张	24.25
字　数	624 千字
版　次	2008 年 1 月第 1 版
印　次	2008 年 1 月第 1 次印刷
印　数	0 001～4 500 册
定　价	49.00 元

◆读者邮购本书,请与本社发行科联系。电 话:85408408/85401670/85408023　邮政编码:610065
◆本社图书如有印装质量问题,请寄回出版社调换。
◆网址:www.scupress.com.cn

前　言

本书是中国教育学会“十一五”首批科研规划课题《新课程背景下的高三教学改革研究》(课题编号为 0627039B)的研究成果。这个课题提出高三数学复习教学七条原则是“高视角、低起点、缓坡度、激兴趣、成系统、重方法、抓落实”,通过高考实践的检验,取得非常好的效果,为了将这些成功的复习教学原则贯彻到每讲之中,我们对各讲都设了四个栏目,即【高瞻远瞩】、【名师导航】、【亲手过招】、【再试身手】。

【高瞻远瞩】栏目深度挖掘本讲内容的知识、方法、题型之间的内在结构,揭示其本质联系,使读者站在一定的高度,对本讲内容有概括性的了解。

【名师导航】栏目囊括了本讲内容中历年高考的典型例题,这些例题具有代表性、方法性以及例题间的联系性,它们是一个系统的题组。对于例题的解析,使用的是提问式的引领方法,“解剖麻雀”式的引领思路,不是直接写出解答,而是用问 1、问 2 等将分析引向深入,使读者体会解答过程的思路,从而掌握解题的一般规律和思想方法。如果例题有多种解法,则用思路一、思路二等进行讲解。对于容易混淆的内容及重要的思想方法,用“提醒”进行指导。近几年,新课程的理念越来越多地融入高考之中,我们必须引起高度注意。

【亲手过招】栏目的习题安排是与例题一一对应的,基本上是相同或类似的习题,其目的是让学生模仿过手。

【再试身手】是【亲手过招】的变式训练,在内容深度上是螺旋上升,从某种程度上可预测未来几年高考的方向。学习必须要有一定的模仿、积累、体会,再独立地探索解决问题,从而形成能力。

本书主要为学生自我复习而设计(当前还没有适合学生自学的高考复习书,本书正是为弥补这一不足而写)。高考复习不能完全由老师讲,学生不自学、不自我消化是没有多少效果的,“学在讲之前”是成功的教学规律。

通过研究,高考复习的规律一般都分为三个阶段:第一个阶段复习“走一遍”,第二个阶段复习“跑一遍”,第三个阶段复习“考一遍”。

本书不仅适合高三复习,特别是第二个阶段的复习,而且也适合高一、高二学生在单元考试前的自学,同时也适合作为教师的教学参考书。

由于我们水平有限,时间仓促,定有不少错误与不妥之处,恳请读者批评指正。

编　者

2008 年元月

目　录

第 1 讲　一元二次不等式问题

【高瞻远瞩】

知识、方法、题型结构图：

一元二次函数
- 解二次不等式（一般步骤：找根⇒画图⇒写出解集）
  - 不含参数
  - 含参数（注意二次项系数）
- ⇕
- 已知二次不等式的解集，求参数范围（一般方法：据题意画图⇒寻找关系式）

⇒ 综合题

【名师导航】

例 1　解下列二次不等式：

(1)$-x^2+2x-\frac{2}{3}\geqslant 0$；(2)$x^2-6x>-9$；(3)$x^2-3x+4>0$.

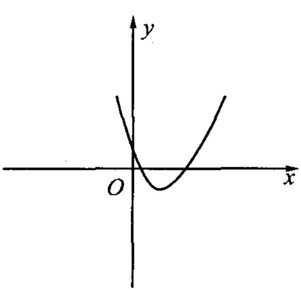
问 1：首先将二次不等式整理成标准形式且二次项的系数为正数，你会吗？

不等式(1)变为 $x^2-2x+\frac{2}{3}\leqslant 0$；不等式(2)变为 $x^2-6x+9>0$.

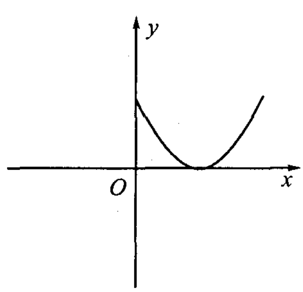
问 2：方程(1)$x^2-2x+\frac{2}{3}=0$；方程(2)$x^2-6x+9=0$；方程(3)$x^2-3x+4=0$. 它们有实数根吗？

方程(1)有两个不等的实根：$x_1=1-\frac{\sqrt{3}}{3}$，$x_2=1+\frac{\sqrt{3}}{3}$；方程(2)有两个相等的实根：$x_1=x_2=3$；方程(3)没有实根.

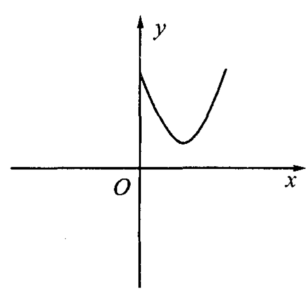
问 3：你能画出(1)$y=x^2-2x+\frac{2}{3}$；(2)$y=x^2-6x+9$；(3)$y=x^2-3x+4$ 的草图吗？



(1)



(2)



(3)

问 4：你能根据对应图象写出各不等式的解集吗？

不等式(1)的解集为：$\left\{x\,\middle|\,1-\frac{\sqrt{3}}{3}\leqslant x\leqslant 1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$；不等式(2)的解集为：$\{x\mid x\in\mathbf{R}\text{ 且 }x\neq 3\}$；

不等式(3)的解集为：**R**.

提醒：我们依据图象(1)写出不等式(1)的解集时，是要写出变形后的不等式 $x^2-2x+\frac{2}{3}\leqslant 0$ 的解集.

例 2　解关于 x 的不等式 $56x^2+ax<a^2$.$(a\in\mathbf{R})$

问 1：是否应先将不等式整理为标准形式呢？$56x^2+ax-a^2<0$.

问 2：你能用十字相乘法找出方程 $56x^2+ax-a^2=0$ 的根吗？

它的根是：$x_1=-\frac{a}{7}$，$x_2=\frac{a}{8}$.

问 3：画出 $y=56x^2+ax-a^2$ 的图象，但问题出来了，两个根 $x_1=-\frac{a}{7}$，$x_2=\frac{a}{8}$. 谁大呢？由于实数 a 不确定，讨论一下就可以了.

(1)当 $-\frac{a}{7}<\frac{a}{8}$，即 $a>0$ 时，原不等式的解集为 $\left\{x\left|-\frac{a}{7}<a<\frac{a}{8}\right.\right\}$；

(2)当 $-\frac{a}{7}=\frac{a}{8}$，即 $a=0$ 时，原不等式的解集为 $\varnothing$；

(3)当 $-\frac{a}{7}>\frac{a}{8}$，即 $a<0$ 时，原不等式的解集为 $\left\{x\left|\frac{a}{8}<a<-\frac{a}{7}\right.\right\}$.

提醒：例 1 是不含参数的不等式，例 2 是含参数的不等式，它们的解题步骤完全一样：找根$\Longrightarrow$画图$\Longrightarrow$写解集. 对于例 2，在画图时，当根的大小不能确定时，需要讨论，仅此而已.

例 3　若关于 m 的不等式 $mx^2+2x-3>0(m\in\mathbf{R})$ 的解集是空集，求 m 的取值范围.

问：二次项系数 m 是否为 0 呢？因此需分 $m=0$ 和 $m\neq 0$ 讨论.

当 $m=0$ 时，原不等式为 $2x-3>0$，此时解集非空，不合题意. 所以，$m\neq 0$.

当 $m\neq 0$ 时，根据题意，画出草图，可知图象开口向下且与 x 轴最多只有一个交点，根据图形就只能是 $\begin{cases}m<0\\ \Delta\leqslant 0\end{cases}$，即 $\begin{cases}m<0\\ 4-4(-3)m\leqslant 0\end{cases}$，解得 $m\leqslant -\frac{1}{3}$.

提醒：已知解集，求参数的取值范围，其解题步骤为：依据题意画图$\Longrightarrow$寻找关系式.

例 4　已知不等式 $ax^2+bx+c>0(a\neq 0)$ 的解集为 $\{x|\alpha<x<\beta,0<\alpha<\beta\}$，求不等式 $cx^2+bx+a<0$ 的解集.

问 1：不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集已知，你该怎么办呢？可画出草图，由图可知，$a<0$ 且 α,β 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根，也就是 $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ 的根.

所以有 $\begin{cases}\alpha+\beta=-\frac{b}{a}\\ \alpha\beta=\frac{c}{a}>0\text{，则 }c<0.\\ a<0\end{cases}$

问 2：要解决什么问题呢？要求二次不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集，那自然就要找根$\Longrightarrow$画图$\Longrightarrow$写出解集，根在哪里呢？肯定在由题设列出的关系式中，将不等式 $cx^2+bx+a<0$ 变形为 $x^2+\frac{b}{c}x+\frac{a}{c}>0$，而 $\frac{b}{c}=-\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha}\right)$，所以 $\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha}=-\frac{b}{c}$，$\frac{a}{c}=\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{\alpha}\frac{1}{\beta}$. 显然 $\frac{1}{\alpha}$，$\frac{1}{\beta}$ 是方程 $x^2+\frac{b}{c}x+\frac{a}{c}=0$ 的根. 根找到了，就该画图了，由 $0<\alpha<\beta$ 知 $\frac{1}{\beta}<\frac{1}{\alpha}$.

所以，不等式 $x^2+\frac{b}{c}x+\frac{a}{c}>0$，即不等式 $cx^2+bx+a<0$ 的解集为 $\left\{x\middle|x<\frac{1}{\beta}或x>\frac{1}{\alpha}\right\}$.

提醒：例 4 就是例 2 与例 3 两种题型综合而成的一个题而已，没有新的东西.

例 5　(2005·全国卷Ⅰ)已知二次函数 $f(x)$ 的二次项系数为 a，且不等式 $f(x)>-2x$ 的解集为(1,3).

(1)若方程 $f(x)+6a=0$ 有两个相等的实数根，求 $f(x)$ 的解析式；

(2)若 $f(x)$ 的最大值为正数，求 a 的取值范围.

(1)问 1：$f(x)>-2x$，即 $f(x)+2x>0$ 是否为一个二次不等式呢？这个二次方程 $f(x)+2x=0$ 的根是否是 1,3 呢？它的二次项系数是否是 a 呢？结论均是肯定的.

所以，由 $f(x)+2x=a(x-1)(x-3)$，再画图可知 $a<0$，则 $f(x)=ax^2-(2+4a)x+3a$.

问 2：再看题目要解决的问题，显然要找 $a=$? 自然想到要找一个关于 a 的方程，在哪里呢？可以猜测应该在题设"若方程 $f(x)+6a=0$ 有两个相等的实数根"中去找，从而 $ax^2-(2+4a)x+9a=0$ 的 $\Delta=0$，所以，$[-(2+4a)]^2-36a^2=0$，即 $5a^2-4a-1=0$.

解得：$a=-\frac{1}{5}$ 或 $a=1$(舍去，因为 $a<0$).

将 $a=-\frac{1}{5}$ 代入 $f(x)$ 的解析式，有 $f(x)=-\frac{1}{5}x^2-\frac{6}{5}x-\frac{3}{5}$.

(2)问 1：要解决的问题是求 a 的取值范围，那就自然想到应该找一个关于 a 的不等式. 再看题设："若 $f(x)$ 的最大值为正数"，显然不等式就在这里了.

问 2：找出二次函数 $f(x)$ 的最大值：$\frac{4a\cdot 3a-(2+4a)^2}{4a}$，即 $-\frac{a^2+4a+1}{a}$.

所以有 $\begin{cases}-\frac{a^2+4a+1}{a}>0\\ a<0\end{cases}$，解得：$a<-2-\sqrt{3}$ 或 $-2+\sqrt{3}<a<0$.

故当 $f(x)$ 的最大值是正数时，实数 a 的取值范围是 $(-\infty,-2-\sqrt{3})\cup(-2+\sqrt{3},0)$.

例 6　当 $-2\leqslant m\leqslant 2$ 时，不等式 $2x-1>m(x^2-1)$ 恒成立，试求 x 的取值范围.

思路一：要找 x 的范围就要找只含 x 的不等式，现在知道的是 x 与 m 的混合不等式及 m 的取值范围，怎么办？

是否可以反客为主，将 x 与 m 的混合不等式看成是关于 m 的一次不等式？这样是不是就知道了它的解集？$m\in[-2,2]$ 是否可以借助 m 的取值范围从而找到 x 的取值范围了呢？试试看.

将 $2x-1>m(x^2-1)$ 看成是关于 m 的一次不等式来解：

(1)若 $x^2-1>0$，则 $m<\frac{2x-1}{x^2-1}$，又由 $-2\leqslant m\leqslant 2$，得 $\frac{2x-1}{x^2-1}>2$，解得 $1<x<\frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

(2)若 $x^2-1<0$，则 $m>\frac{2x-1}{x^2-1}$，又由 $-2\leqslant m\leqslant 2$，得 $\frac{2x-1}{x^2-1}<-2$，解得 $\frac{-1+\sqrt{7}}{2}<x<1$.

(3)若 $x^2-1=0$，则 $x=\pm 1$，要 $2x-1>0$ 恒成立，只需 $x=1$.

综上所述，所求 x 的范围为 $\left(\frac{-1+\sqrt{7}}{2},\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$.

思路二：仍是将不等式 $2x-1>m(x^2-1)$ 看成是关于 m 的一次不等式，把它整理成标准形式为：$m(x^2-1)-(2x-1)<0$，是否可以将一次不等式与一次函数联系起来呢？试试看.

令 $f(m)=(x^2-1)m-(2x-1)$(这是关于 m 的一次函数),要使在 $-2\leqslant m\leqslant 2$ 时,$f(m)<0$ 恒成立,据一次函数的性质,只需

$$\begin{cases}f(-2)<0\\f(2)<0\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}2x^2+2x-3>0\\2x^2-2x-1<0\end{cases}\Longleftrightarrow\frac{-1+\sqrt{7}}{2}<x<\frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

【亲手过招】

1. 解下列不等式:

(1) $-2x^2+3x<1$;(2) $x^2-x>-\frac{1}{4}$;(3) $-x^2+2x-3>0$.

2. 解关于 x 的不等式:$(x-2)(ax-2)>0$. ($a\in\mathbf{R}$)

3. m 取何值时,

(1)不等式 $mx^2+2x-3>0$ 的解集为空集;

(2)不等式 $mx^2+2x+3>0$ 的解集为一切实数;

(3)对于任意实数 x,不等式 $mx^2+(m-1)x+m<1$ 恒成立.

4. (2005·湖北联考)关于 x 的不等式 $ax-b>0$ 的解集为 $(1,+\infty)$,则关于 x 的不等式 $\frac{ax+b}{x-2}>0$ 的解集为(　　).

A. $(-1,2)$　　　　B. $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$

C. $(1,2)$　　　　D. $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$

5. 对于函数 $f(x)=x^2+bx+c(b,c\in\mathbf{R})$,不论 α,β 为任何实数,都恒有 $f(\sin\alpha)\geqslant 0$, $f(2+\cos\beta)\leqslant 0$.

(1)求证:$b+c=-1$;

(2)求证:$c\geqslant 3$;

(3)若 $f(\sin\alpha)$ 的最大值为 8,求 b,c 的值.

提示 1:$\sin\alpha$ 的取值范围是多少?在这个范围内的值是否都有 $f(\sin\alpha)\geqslant 0$?那么 $f(1)\geqslant 0$ 成立吗?又由 $f(\cos\beta+2)\leqslant 0$ 是否有 $f(1)\leqslant 0$ 呢?那么 $f(1)=$?

提示 2:由(1)的 $b+c=-1$,那么 $f(x)=(x-1)(x-c)$ 成立吗?由 $f(2+\cos\beta)\leqslant 0$,设 $1\leqslant x\leqslant 3$ 时,$f(x)\leqslant 0$ 成立吗?是否可设 $x\leqslant c$ 呢?

提示 3:求 b,c 两个值需要两个方程,由(1)已有 $b+c=-1$,还有一个在哪里呢?有两条途径可以得到:一是找出 $f(\sin\alpha)$ 的最大值的表达式,令它等于 8 即可;二是由 $f(x)=(x-1)(x-c)$,画图可知 $\sin\alpha=x\in[-1,1]$ 时,$f(x)$ 在此区间上的增减性怎样,就可得最大值.

6. (2006·江西)若不等式 $x^2+ax+1\geqslant 0$ 对一切 $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$ 成立,则 a 的最小值为(　　).

A. 0　　B. -2　　C. $-\frac{5}{2}$　　D. -3

【再试身手】

1. 解不等式:$-3<x^2+3x-4<0$.

2. 是否存在实数 a,使得不等式组 $\begin{cases}2x^2+(5+2a)x+5a<0\\x^2-x-2>0\end{cases}$ 的整数解的集合是单元素集 $\{-2\}$.

3. 已知不等式 $ax^2+bx+2>0$ 的解为 $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{3}$，求 $2x^2+bx+a<0$ 的解.

4. 已知当 $x\in[0,3]$ 时，不等式 $x^2-a^2-2x+a+3<0$ 恒成立，求 a 的取值范围.

5. 当 $x\in\left(\frac{1}{3},3\right)$ 时，$|\log_a x|<1$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是(　　).

A. $a\geqslant3$　　B. $0<a\leqslant\frac{1}{3}$ 或 $a\geqslant3$

C. $0<a\leqslant\frac{1}{3}$　　D. $1<a<3$ 或 $\frac{1}{3}<a<1$

6. (2004·青岛二模)设函数 $f(x)=ax+2$，不等式 $|f(x)|<6$ 的解集为 $(-1,2)$，试求不等式 $\frac{x}{f(x)}\leqslant1$ 的解集.

7. 已知函数 $f(x)=ax^2+a^2x+2b-a^3$ $(a\in\mathbf{R})$，当 $x\in(-2,6)$ 时，其值为正；当 $x\in(-\infty,-2)\cup(6,+\infty)$ 时，其值为负.

(1)求实数 a,b 的值及其函数 $f(x)$ 的表达式；

(2)设 $F(x)=-\frac{k}{4}f(x)+4(k+1)x+2(6k-1)$，问 k 为何值时，函数 $F(x)$ 的值恒为负值?

参考答案

【亲手过招】

1. (1)$\left\{x\middle|x<\frac{1}{2}\text{或}x>1\right\}$；(2)$\left\{x\middle|x\in\mathbf{R}\text{且}x\neq\frac{1}{2}\right\}$；(3)$\varnothing$.　2. 当 $a<0$ 时，$\left\{x\middle|\frac{2}{a}<x<2\right\}$；当 $a=0$ 时，$\{x|x<2\}$；当 $0<a<1$ 时，$\left\{x\middle|x<2\text{或}x>\frac{2}{a}\right\}$；当 $a=1$ 时，$\{x|x\neq2\}$；当 $a>1$ 时，$\left\{x\middle|x<\frac{2}{a}\text{或}x>2\right\}$.

3. (1)$m\leqslant-\frac{1}{3}$；(2)$m>\frac{1}{3}$；(3)$m<-\frac{1}{3}$.　4. B.　5. (1)、(2)略；(3)$b=-4,c=3$.　6. C.

【再试身手】

1. $\left(-4,\frac{-3-\sqrt{13}}{2}\right)\cup\left(\frac{-3+\sqrt{13}}{2},1\right)$.　2. $-2\leqslant a<2$.　3. $\{x|x<-2\text{或}x>3\}$.　4. $a>3$ 或 $a<-2$.

5. B.　6. $\left\{x\middle|x>\frac{1}{2}\text{或}x\leqslant\frac{2}{5}\right\}$.　7. (1)$a=-4,b=-8$；$f(x)=-4x^2+16x+48$；(2)$k<-2$ 时，$F(x)$ 恒为负值.

第2讲　集合的概念与运算

【高瞻远瞩】

知识、方法、题型结构图：

1. 集合知识结构图

集合
- 基本概念
  - 集合元素的特性：确定性、无序性、互异性
  - 集合的表示法：列举法、描述法、图示法
  - 集合的分类：点集、数集、图形集以及其他集合
  - 集合与元素的关系：属于（“$\in$”），不属于（“$\notin$”）
  - 集合与集合的关系：相等（$=$），子集（$\subseteq$），真子集（$\subsetneqq$）
- 集合运算
  - 交集：$A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$
  - 并集：$A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$
  - 补集：$\complement_U A=\{x\mid x\notin A$ 且 $x\in U\}$

2. 集合的常用性质

$A\subseteq A$；$\varnothing\subseteq A$；若 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$；$A\cap A=A\cup A=A$；$A\cap\varnothing=\varnothing$；$A\cup\varnothing=A$；$A\cap B=A\Leftrightarrow A\cup B=B\Leftrightarrow A\subseteq B$；$A\cap(\complement_U A)=\varnothing$；$A\cup(\complement_U A)=U$；$\complement_U(\complement_C A)=A$；$\complement_U(A\cup B)=\complement_U A\cap\complement_U B$.

3. 题型结构图

集合
- 元素与集合的关系：判断元素与集合的关系
- 集合与集合的关系：判断集合与集合的关系
- 集合的运算：求已知集合的交、并、补集

$\Longleftrightarrow$ 已知集合与集合的关系，求参数

与不等式有关 $\Updownarrow$ 已知集合与集合的关系，求参数 $\Updownarrow$ 与函数方程有关

【名师导航】

例1　已知集合 $M=\{x\mid x=3n,n\in\mathbf{Z}\}$，$N=\{x\mid x=3n+1,n\in\mathbf{Z}\}$，$P=\{x\mid x=3n-1,n\in\mathbf{Z}\}$，且 $a\in M$，$b\in N$，$c\in P$，设 $d=a-b+c$，则（　　）.

A. $d\in M$　　B. $d\in N$　　C. $d\in P$　　D. 以上都不对

思路一：问1：你能用列举法写出这三个集合的元素吗？

$M=\{\cdots,-3,0,-3,-6,\cdots\}$，$N=\{\cdots,-5,-2,1,4,7,\cdots\}$，$P=\{\cdots,-4,-1,2,5,8,\cdots\}$.

问2：是否可以从各集合中任意取一个元素，做运算 $d=a-b+c$，就可以判断 d 属于哪一个集合呢？因为 $a\in M$，$b\in N$，$c\in P$，由于所取元素的一般性，所以只要用列举法写出三个集合，从中各取一个元素，计算出 $d=a-b+c$ 的值，就可知道该选取哪一个答案了.

思路二：可设 $a=3n,b=3m+1,c=3k-1,m,n,k\in\mathbf{Z}$，则 $d=a+b-c=3n+3m+1-3k+1=3(n+m-k)+2=3(n+m-k+1)-1$，因为 $n,m,k\in\mathbf{Z}$，所以 $n+m-k\in\mathbf{Z},d\in P$，选 C.

提醒：对用描述法表示的集合不了解时，可把该集合的元素用列举法表示出来，再研究该集合的性质. 这是研究集合的一种重要方法.

例 2　(1)设集合 A,B 是全集 U 的两个子集，则 $A\subsetneqq B$ 是 $(\complement_U A)\cup B=U$ 的(　　)；

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

(2)含有三个实数的集合可表示为 $\left\{a,\frac{b}{a},1\right\}=\{a^2,a,0\}$，则 $a^{2007}+b^{2008}=$________；

(3)设集合 $M=\left\{x\middle|x=\frac{k}{2}+\frac{1}{4},k\in\mathbf{Z}\right\},N=\left\{x\middle|x=\frac{k}{4}+\frac{1}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$，则(　　).

A. $M=N$　　B. $M\subsetneqq N$　　C. $N\subsetneqq M$　　D. $M\cap N=\varnothing$

(1)思路：关于集合与集合的关系问题，最好、最直观的解决方法是韦恩图法. 同学们自己练习.

(2)问 1：两个集合相等，必须每个元素相同，那么这两个集合的元素是如何对应的呢？

问 2：第一个集合的 $a=0$ 还是 $\frac{b}{a}=0$ 呢？为什么？如果 $a=0$，可以吗？显然不行，第二个集合与互异性矛盾；那么 $\frac{b}{a}=0,a=a^2$，即 $b=0,a=\pm1$，当 $a=1$ 时也与集合的互异性矛盾，舍去. 所以，$b=0,a=-1$，这时集合为 $\{0,1,-1\}$，即可计算 $a^{2007}+b^{2008}$ 的值了，答案为 -1.

提醒：在求集合里的参数的值时，一定要检验答案的正确性，避免与集合的互异性矛盾.

(3)思路一：用列举法表示出两个集合，即可判断集合之间的关系，要注意理解 $k\in\mathbf{Z}$ 的意义，$\mathbf{Z}$ 是一个无穷集合.

$M=\left\{\cdots,-\frac{5}{4},-\frac{3}{4},-\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{5}{4},\cdots\right\}$，

$N=\left\{\cdots,-\frac{5}{4},-1,-\frac{3}{4},-\frac{2}{4}\ -\frac{1}{4},0,\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},1,\frac{5}{4},\cdots\right\}$.

思路二：用描述法重新表示各个集合，去找它们之间的关系.

问 1：你能用描述法重新表示这两个集合，以便看出它们之间的关系吗？

两个集合为：$M=\left\{x\middle|x=\frac{2k+1}{4},k\in\mathbf{Z}\right\},N=\left\{x\middle|x=\frac{k+2}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

问 2：这两个集合有什么关系？从以上能看出来吗？两个集合的分母为 4，分子分别是 $2k+1,k+2$，一定要注意 k 的取值是无穷集合 $\mathbf{Z}$，这样就可以找出这两个集合的关系了.

提醒：在研究几个集合之间的关系时，最好的方法是用列举法写出集合的元素.

例 3　(1)已知集合 $A=\{x|x-1<0\},B=\{x|3x-2-x^2<0\}$，$R$ 是全集，则下列式子：①$A\cup B=B$；②$A\cap B=A$；③$(\complement_R A)\cup B=R$；④$(\complement_R A)\cup(\complement_R B)=R$ 中成立的是(　　)；

A. ①②　　B. ③④　　C. ①②③　　D. ①②③④

(2)已知全集 $U=R,M=\{x|y=\sqrt{x-1}\},P=\{x|y=\log_{\frac{1}{2}}x,y\in M\}$，下列各式中，正确的是(　　).

A. $M\cap P=P$　　B. $M\cup(\complement_U P)=M$

C. $(\complement_U M)\cup P=\{x|x\leqslant1\}$　　D. $(\complement_U M)\cap(\complement_U P)=\left\{x\middle|x\leqslant0\text{ 或 }\frac{1}{2}<x<1\right\}$

(1)思路:求出两个集合 A,B,逐一验证即可.

(2)问 1:知道集合 M 表示的是什么吗? 能求出来吗? 集合 M 表示的是函数 $y=\sqrt{x-1}$ 的定义域,因为 $x-1>0$,所以 $x>1$,$M=\{x|x>1\}$.

问 2:知道集合 N 表示的是什么吗? 集合 N 表示的是函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 的值域是 M 时的定义域,即 $N=\left\{x\left|0<x<\frac{1}{2}\right.\right\}$,验证即可.

提醒:在做有关集合的题目时,一定要知道该集合所表示的是什么元素.

例 4 设 $A=\{x|x^2+4x=0\}$,$B=\{x|x^2+2(a+1)x+a^2-1=0\}$.

(1)若 $A\cap B=B$,求 a 的值;

(2)若 $A\cup B=B$,求 a 的值.

问 1:集合 A 表示的是什么?

集合 A 表示的是方程 $x^2+4x=0$ 的解集,即 $A=\{0,-4\}$,$A\cap B=B\Leftrightarrow B\subseteq A$.

问 2:集合 B 有几种情况呢?

集合 B 有四种情况:B 中只有 0,只有 -4,有 0、-4 两个元素和 $\varnothing$.

问 3:如何求 a 的值呢?

①把 $x=0$ 代入 $x^2+2(a+1)x+a^2-1=0$ 中,求得 $a=\pm1$,当 $a=1$ 时,$B=\{0,-4\}$,满足题意;当 $a=-1$ 时,$B=\{0\}$,也满足题意;

②把 $x=-4$ 代入 $x^2+2(a+1)x+a^2-1=0$ 中,求得 $a=1$ 或 7,当 $a=1$ 时,$B=\{0,-4\}$,满足题意;当 $a=7$ 时,$B=\{-4,-12\}$,不满足题意;

③当 $B=\varnothing$ 时,即 $\Delta=[2(a+1)]^2-4(a^2-1)<0$ 时,$a<1$,$B=\varnothing\subseteq A$.

综上可知,$a\leqslant-1$ 或 $a=1$.

例 5 已知集合 $A=\{x||x+1|<m\}$,$B=\{x|(x^2+2x-8)(x^2+2x+4)<0\}$,求分别满足下列条件的 m 的取值范围:(1)$A\subsetneqq B$;(2)$A\cap B=\varnothing$.

(1)问 1:你能分别求出集合 A,B 吗?

在集合 B 中,因为 $x^2+2x+4=(x+1)^2+3>0$ 恒成立,所以,$x^2+2x-8<0$ 的解集为 $B=\{-4<x<2\}$. 你会解不等式 $|x+1|<m$ 吗? $m>0$,则 $A=\{x|-m-1<x<-1+m\}$;$m\leqslant0$,$A=\varnothing$.

问 2:$A\subsetneqq B$,你能找出它们之间的关系吗?

$m>0$,则 $A=\{x|-m-1<x<-1+m\}$,又 $A\subsetneqq B$,则 $\begin{cases}-m-1>-4\\ m-1<2\end{cases}$,可解得 $m<3$,所以 $0<m<3$.

$m\leqslant0$,$A=\varnothing$,满足 $A\subsetneqq B$.

综上可得,$m<3$.

(2)问:你知道 $A\cap B=\varnothing$ 有几种情况吗?

$A=\varnothing$,$B\neq\varnothing$ 或 $A\neq\varnothing$,$B=\varnothing$ 或 $A\neq\varnothing$,$B\neq\varnothing$ 且 $A\cap B=\varnothing$ 三种情况.

可 $B\neq\varnothing$,就只有两种情况了. 若 $A\neq\varnothing$,$B\neq\varnothing$ 且 $A\cap B=\varnothing$,即 $m>0$ 的情形,则 $m-1\leqslant-4$ 或 $-m-1\geqslant2$,解得 $m\leqslant-3$,这与 $m>0$ 矛盾.

$m\leqslant0$,则 $A=\varnothing$,满足 $A\cap B=\varnothing$.

综上可得,$m\leqslant0$.

提醒:注意掌握 $A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B\Leftrightarrow A\cup B=B$ 的应用;特别注意:①$A\subseteq B$ 时,注意讨论 A

$=\varnothing$的情况;②$A\cap B=\varnothing$时,注意三种情况的讨论.

【亲手过招】

1. 下列命题中,正确命题的个数为(　　).

①$\varnothing=\{0\}$;②$\varnothing\subseteq\{0\}$;③集合$\{(1,2)\}$与集合$\{1,2\}$表示同一集合;④$M=\{y\mid y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$,$N=\{x\mid x=t^2+1,t\in\mathbf{R}\}$,则$M=N$.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

2. 设P,Q为两个非空实数集合,定义集合$P+Q=\{a+b\mid a\in P,b\in Q\}$,若$P=\{0,2,5\}$,$Q=\{1,2,6\}$,则$P+Q$中元素的个数是(　　).

A. 9　　B. 8　　C. 7　　D. 6

3. (2004・全国)设A,B,I均为非空集合,且满足$A\subseteq B\subseteq I$,则下列各式中错误的是(　　).

A. $(\complement_I A)\cup B=I$　　B. $(\complement_I A)\cap(\complement_I B)=\complement_I B$

C. $A\cap(\complement_I B)=\varnothing$　　D. $(\complement_I A)\cup(\complement_I B)=I$

4. $M=\left\{x\,\middle|\,x=m+\dfrac{1}{6},m\in\mathbf{Z}\right\}$,$N=\left\{x\,\middle|\,x=\dfrac{n}{2}-\dfrac{1}{3},n\in\mathbf{Z}\right\}$,$P=\left\{x\,\middle|\,x=\dfrac{p}{2}+\dfrac{1}{6},p\in\mathbf{Z}\right\}$,则$M,N,P$满足关系(　　).

A. $M=N\subsetneqq P$　　B. $M\subsetneqq N\subsetneqq P$　　C. $M\subsetneqq N=P$　　D. $N\subsetneqq P\subsetneqq M$

5. 已知集合$A=\{x,xy,\lg(xy)\}$,$B=\{0,|x|,y\}$,若$A=B$,则$\left(x+\dfrac{1}{y}\right)+\left(x^2+\dfrac{1}{y^2}\right)+\cdots+\left(x^{2008}+\dfrac{1}{y^{2008}}\right)$的值为________.

6. 已知集合$M=\left\{x\,\middle|\,\dfrac{x}{(x-1)^3}\geqslant 0\right\}$,$N=\{y\mid y=3x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$,则$M\cap N$等于(　　).

A. $\varnothing$　　B. $\{x\mid x\geqslant 1\}$　　C. $\{x\mid x>1\}$　　D. $\{x\mid x\geqslant 1$ 或 $x<0\}$

7. 设$A=\{x\mid x^2-ax+a^2-19=0\}$,$B=\{x\mid x^2-5x+6=0\}$,$C=\{x\mid x^2+2x-8=0\}$.求当$a$取什么实数时,$\varnothing\subsetneqq A\cap B$和$A\cap C=\varnothing$同时成立?

8. 已知集合$A=\{x\mid x^2-6x+8<0\}$,$B=\{x\mid (x-a)(x-3a)<0\}$.

(1)若$A\subseteq B$,求a的取值范围;

(2)若$A\cap B=\varnothing$,求a的取值范围;

(3)若$A\cap B=\{x\mid 3<x<4\}$,求a的取值范围.

【再试身手】

1. 设$f(n)=2n+1(n\in\mathbf{N})$,$P=\{1,2,3,4,5\}$,$Q=\{3,4,5,6,7\}$,记$\hat{P}=\{n\in\mathbf{N}\mid f(n)\in P\}$,$\hat{Q}=\{n\in\mathbf{N}\mid f(n)\in Q\}$,则$(\hat{P}\cap\complement_N\hat{Q})\cup(\hat{Q}\cap\complement_N\hat{P})=$(　　).

A. $\{0,3\}$　　B. $\{1,2\}$　　C. $\{3,4,5\}$　　D. $\{1,2,6,7\}$

2. 设集合$P=\{(x,y)\mid 2x-y+m\geqslant 0\}$,$Q=\{(x,y)\mid x+y-n\leqslant 0\}$,若$P(2,3)\in A\cap B$,则$m+n$的最小值为(　　).

A. -6　　B. 1　　C. 4　　D. 5

3. 对于集合M,N,定义$M-N=\{x\mid x\in M$,且$x\notin N\}$,$M\oplus N=(M-N)\cup(N-M)$,设$A=\{y\mid y=x^2-3x,x\in\mathbf{R}\}$,$B=\{y\mid y=-2^x,x\in\mathbf{R}\}$,则$M\oplus N=$(　　).

A. $\left(-\dfrac{9}{4},0\right]$　　B. $\left[-\dfrac{9}{4},0\right)$

C. $\left(-\infty,-\dfrac{9}{4}\right)\cup[0,+\infty)$ D. $\left(-\infty,-\dfrac{9}{4}\right]\cup(0,+\infty)$

4. $P=\{(x,y)\mid y=-\sqrt{25-x^2},x,y\in\mathbf{R}\}$,$Q=\{(x,y)\mid y=x+b,x,y\in\mathbf{R}\}$,$P\cap Q\neq\varnothing$,则实数 b 的取值范围是(　　).

A. $[-5,5]$ B. $(-5\sqrt{2},5)$ C. $[-5\sqrt{2},5]$ D. $[-5\sqrt{2},5\sqrt{2}]$

5. 已知 $A=\{x\mid x=m+n\cdot\sqrt{2},m,n\in\mathbf{Z}\}$.

(1)设 $x_1=\dfrac{1}{3-4\sqrt{2}}$,$x_2=\sqrt{9-4\sqrt{2}}$,$x_3=(1-2\sqrt{3})^2$,试判断 x_1,x_2,x_3 与 A 之间的关系;

(2)任取 $x_1,x_2\in A$,试判断 x_1+x_2,x_1x_2 与 A 之间的关系;

(3)能否找到 $x_0\in A$,使$\dfrac{1}{x_0}\in A$,且$|x_0|\neq1$?

6. 已知 $A=\{x\mid x^2+2x+p=0\}$,$A\cap\mathbf{R}^+=\varnothing$,求实数 p 的范围.

7. (2006・全国Ⅱ)设 $a\in\mathbf{R}$,二次函数 $f(x)=ax^2-2x-2a$,设不等式 $f(x)>0$ 的解集为 A,又知集合 $B=\{x\mid 1<x<3\}$,$A\cap B\neq\varnothing$,求 a 的取值范围.

8. 已知函数 $f(x)=x^2+ax+b(a,b\in\mathbf{R})$,$A=\{x\mid x=f(x)\}$,$B=\{x\mid x=f(f(x))\}$.

(1)证明:$A\subseteq B$;

(2)当 $A=\{-1,3\}$时,求 B.

参考答案

【亲手过招】

1. B. 2. B. 3. D. 4. C. 5. -2. 6. C. 7. $a=-2$. 8. (1)$\dfrac{4}{3}\leqslant a\leqslant2$;(2)$a\leqslant\dfrac{2}{3}$或 $a\geqslant4$;(3)3.

【再试身手】

1. A. 2. C. 3. C. 4. C. 5. (1)$x_1\notin A$,$x_2\in A$,$x_3\in A$;(2)$x_1+x_2\in A$;$x_1x_2\in A$;(3)不存在. 6. $p\geqslant0$. 7. $(-\infty,-2)\cup\left(\dfrac{6}{7},+\infty\right)$. 8. (1)略;(2)$B=\{-\sqrt{3},-1,\sqrt{3},3\}$.

第 3 讲 简易逻辑与充要条件

【高瞻远瞩】

知识、方法、题型结构图：

1. 基本知识

(1)命题：可以判断真假的语句.

逻辑联结词：或、且、非.

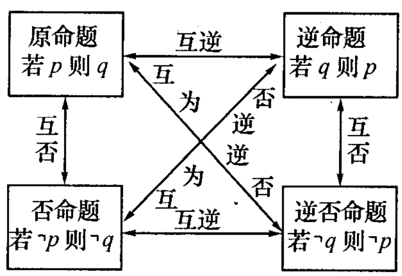
简单命题：不含逻辑联结词的命题.

复合命题：由简单命题与逻辑联结词构成的命题.

三种形式：p 或 q，p 且 q，非 p.

真假判断：p 或 q，同假为假，否则为真；p 且 q，同真为真；非 p，真假相反.

原命题：若 p 则 q；逆命题：若 q 则 p；否命题：若 $\neg p$ 则 $\neg q$；逆否命题：若 $\neg q$ 则 $\neg p$；互为逆否的两个命题是等价的.



(2)充要条件

如果已知 $p\Rightarrow q$，那么我们说，p 是 q 的充分条件，q 是 p 的必要条件.

若 $p\Rightarrow q$ 且 $q\Rightarrow p$，则称 p 是 q 的充要条件，记为 $p\Leftrightarrow q$.

(3)反证法步骤：假设结论不成立→推出矛盾→假设不成立.

2. 题型结构

四种命题及其关系⟹充要条件判定与证明⟹已知命题的关系(或四种条件)，求参数的范围.

【名师导航】

例 1 指出下列复合命题的形式及其构成，并判断复合命题的真假：

(1)$10\leqslant 10$；(2)方程 $x^2-6x+1=0$ 没有实数根；(3)有两个角为 $45°$ 的三角形是等腰直角三角形.

(1)问：你知道“$\leqslant$”符号的意义吗？它表示小于或等于，是“p 或 q”，所以该命题为真.

(2)问：方程 $x^2-6x+1=0$ 没有实数根等价于什么？即 $\Delta<0$，计算就可以知道该命题的真假，是“$\neg p$”.

(3)问：你知道等腰直角三角形是“且”还是“或”吗？是“p 且 q”，等腰且直角三角形.

例 2 设原命题是“若两个实数的积不为 0，则这两个实数全不为 0”，写出它的逆命题、否