

新世纪高等学校研究生适用教材

水流泥沙水质数学模型理论及应用

Theory and Application of Mathematical Model for Water Flow Sediment and Quality

白玉川 顾元桢 邢焕政 编著

水流泥沙水质数学模型理论及应用

52



天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

86.8252
184

新世纪高等学校研究生适用教材

水流泥沙水质数学模型 理论及应用

白玉川 顾元棣 邢焕政 编著

内容简介

本书以计算流体力学、泥沙运动力学及环境水力学为基础,针对河流海岸动力因素的特点,提出解决河流海岸水流泥沙运动、水环境演变的水流泥沙水质数学模型理论体系和各种计算模式。

全书共分3篇8章。第1篇为水流泥沙水质数学模型的计算方法,内分两章:第1章为水流数学模型的有限差分法;第2章为水流数学模型的有限单元法。第2篇为水流数学模型及其工程应用,内分三章:第1章为一维水流数学模型及其工程应用;第2章为二维水流数学模型及其工程应用;第3章为三维水流数学模型及其工程应用。第3篇为泥沙水质数学模型及其工程应用,内分3章:第1章为河流工程泥沙数学模型及其工程应用;第2章为河口工程泥沙数学模型及其工程应用;第3章为河流海岸水质数学模型及其工程应用。在内容选取上,特别注重理论及计算方法与河流海岸工程实际的结合。

本书可作水力学及河流动力学、港口海岸与近海工程、环境科学与工程、计算数学、计算流体力学、自然地理等有关专业研究生的教材和教学参考书,亦可作为与上述专业有关的设计、科研和教学人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

水流泥沙水质数学模型理论及应用/白玉川,顾元桢
邢焕政编著. —天津:天津大学出版社,2005.10
ISBN 7-5618-2184-0

I. 水... II. ①白... ②顾... ③邢... III. 河流 -
泥沙运动 - 水质模型:数学模型 IV. TV142

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 090531 号

出版发行 天津大学出版社
出版人 杨欢
地址 天津市卫津路 92 号天津大学内(邮编:300072)
网址 www.tjup.com
电话 发行部:022-27403647 邮购部:022-27402742
印刷 迁安万隆印刷有限责任公司
经销 全国各地新华书店
开本 185mm × 260mm
印张 17
字数 430 千
版次 2005 年 10 月第 1 版
印次 2005 年 10 月第 1 次
印数 1 - 3 000
定价 30.00 元

前 言

我国许多河流是多沙河流。河流泥沙运动状况,既关系到河流本身的发展演变,也影响着重大水利工程建设成败。在流域规划、防洪设计、水土保持与水资源保护及利用方面,河流泥沙问题是必须考虑的因素。治水必须治沙,这是中国水利的特点之一,也是难点之一。同时我国又拥有漫长的海岸线和许多重要的河口,河口海岸泥沙运动规律的模拟研究在我国具有特殊的重要地位。

随着计算机技术、工程计算技术和图像显示技术的发展以及 GIS、GPS 和 RS 技术在水利工程中的应用,水利工程学科传统的水力模拟理论和研究方法正逐步为现代的动态模拟仿真手段所代替,目前已显示出动态模拟仿真强大的生命力和广阔的应用前景。计算机数学模拟仿真技术备受各国政府和科学家重视,比如,在禁止核试验条约下,核武器中核反应研究工作的数学模型和计算机数值模拟试验工作显得尤为重要。因此,计算机模拟仿真水平的高低,对于一个国家经济发展和国力的增强是非常重要的,它吸引了各国政府和科学家的关注。对于水利工程学科来说,河流海岸动力过程模拟仿真能够克服传统水力物理模型缩尺与变态效应的影响,可以得到物理模型模拟试验所看不到的物理现象,在经济和学术研究上都可起到事半功倍的效果。

水流泥沙水质数学模型是在计算机问世后发展起来的一门新兴的学科分支,它综合了计算数学、水动力学、泥沙运动力学和环境科学方面的知识,是一门新兴的边缘性学科。近十年来,我国水流泥沙水质数学模型的研究得到了飞速的发展,取得了丰硕的成果。为了适应我国河流海岸泥沙研究发展的新形势,为了培养港口海岸工程、治河工程以及环境工程等专业领域研究生的需要,在天津大学“985”工程基金的资助下,我们编著了这本《水流泥沙水质数学模型理论及应用》教材。该书也是我们长期从事科学研究和研究生培养工作的总结。

本书综合介绍了水流泥沙水质数学模型的基本理论和方法,全书共分 3 篇 8 章。第 1 篇为水流泥沙水质数学模型的计算方法,内分两章:第 1 章介绍水流数学模型的有限差分法,内容包括定解问题及定解条件的定义、有限差分近似和差分方程的数值解、稳定性分析的方法、差分格式的收敛性、多维问题几种常用的差分格式等内容;第 2 章介绍水流数学模型的有限单元法,内容包括变分原理、Ritz - Galerkin(利兹 - 伽略金)方法、有限单元法的步骤等。第 2 篇为水流数学模型及其工程应用,内分 3 章:第 1 章介绍一维水流数学模型及其工程应用,内容包括一维水流数学模型的特征理论、一维水流数学模型的数值解法(如特征线法、差分法、有限元法)、一维水流数学模型的工程应用,如分岔河道水流数学模型及其应用以及河网水流数学模型及其应用;第 2 章介绍二维水流数学模型及其工程应用,内容包括二维水流数学模型的特征理论、二维水流数学模型的特征线法(特征差分、双特征线法)、二维水流数学模型的差分法(时间分裂法、交替方向隐格式法、剖开算子法)、二维水流数学模型的有限元法、二维水流数学模型的工程应用(河道及泛区二维水流数学模型、海域二维水流数学模型);第 3 章介绍三维水流数学模型及其工程应用,内容包括精确三维水流泥沙数学模型、河口海岸分层三维潮流数学模型、河口海岸不分层三维潮流数学模型。第 3 篇为泥沙水质数学模型及其工程应用,内分 3 章:第 1 章介绍河流工程泥沙数学模型及其工程应用,内容包括河流泥沙数学模型理论、冲积

河流河床的稳定性条件、河流泥沙数学模型方程的数值解、北江泥沙数学模型;第2章介绍河口工程泥沙数学模型及其工程应用,内容包括河口及河口泥沙问题、河口泥沙数学模型理论基础、河口数学模型三种实验方法等;第3章介绍河流海岸水质数学模型及其工程应用,内容包括水质模型概述、水质模型的理论框架、具有岔道支流的一维水质数学模型、二维有限元水质数学模型、河网水质数学模型等。在内容选取上,特别注重理论及计算方法与河流海岸工程实际的结合。

本书由白玉川、顾元棣、邢焕政合著,全书由顾元棣教授、白玉川教授统一修改定稿。

在本书编写过程中万艳春同学、徐海珏同学、廖世智同学做了细致的校对和打字工作,许栋同学做了全书插图的清绘工作。在编写和出版过程中得到了天津大学研究生院培养处、天津大学建筑工程学院、海河水利委员会科技处领导的关怀和支持,得到了天津大学出版社的帮助,谨此一并表示衷心感谢。

由于水流泥沙水质数学模型是一门综合边缘性学科,许多问题均处于探索发展过程中,因此书中难免有不妥之处,恳请读者予以批评指正。

作者

2005年1月

目 录

第 1 篇 水流泥沙水质数学模型的计算方法

1 水流数学模型的有限差分法	(3)
1.1 定解问题及定解条件	(3)
1.2 有限差分近似	(3)
1.3 差分方程的数值解	(6)
1.4 有限差分方程的数值分析基础	(8)
1.5 几种常用的差分格式及其稳定性分析	(20)
1.6 多维问题几种常用的差分格式	(24)
2 水流数学模型的有限单元法	(27)
2.1 变分原理	(27)
2.2 Ritz - Galerkin(利兹 - 伽略金)方法	(34)
2.3 有限元法	(37)

第 2 篇 水流数学模型及工程应用

1 一维水流数学模型及工程应用	(49)
1.1 一维水流数学模型的特征理论	(49)
1.2 一维水流数学模型的数值解法	(62)
1.3 一维水流数学模型在工程中的应用	(111)
2 二维水流数学模型及工程应用	(143)
2.1 二维水流数学模型的特征理论	(143)
2.2 二维水流数学模型的数值解法之一——特征线法	(150)
2.3 二维水流数学模型的数值解法之二——差分法	(158)
2.4 二维水流数学模型的数值解法之三——有限元法	(172)
2.5 二维水流数学模型的工程应用	(186)
3 三维水流数学模型及工程应用	(202)
3.1 精确三维水流泥沙数学模型	(202)
3.2 河口海岸分层三维潮流数学模型	(207)
3.3 河口海岸不分层三维潮流数学模型	(214)

第 3 篇 河流海岸泥沙水质数学模型理论及工程应用

1 河流泥沙数学模型	(225)
1.1 河流泥沙数学模型理论	(225)
1.2 冲积河流河床及海床稳定性的计算理论	(227)
1.3 河流泥沙数学模型方程的数值解	(230)

1.4	北江泥沙运动及河床演变的泥沙数学模型	(234)
2	河口工程泥沙数学模型	(238)
2.1	河口及河口泥沙问题	(238)
2.2	河口泥沙数学模型及数学模型实验	(239)
2.3	一维河口数学模型实验及其理论基础	(239)
2.4	河口数学模型三种实验方法	(242)
2.5	二维河口水流泥沙数学模型理论	(243)
2.6	三维河口泥沙数学模型	(245)
3	河流海岸水质数学模型及其工程应用	(252)
3.1	水质模型概述	(252)
3.2	水质模型的理论框架	(253)
3.3	具有岔道支流的一维水质数学模型	(256)
3.4	二维有限元水质数学模型	(257)
3.5	河网水质数学模型	(259)

第 1 篇 水流泥沙水质数学模型 的计算方法



1 水流数学模型的有限差分法

1.1 定解问题及定解条件

在数学物理问题中,常把物理过程按一定的物理规律写成微分方程的形式加以描述。这样,如果一个函数具有该方程所需要的各阶连续导数,并代入该方程中能使它变为恒等式,则此函数就称之为该方程的解。由于每一物理过程都处在特定的条件之下,所以求出的解也是该方程适合某些特定条件的解。初始条件与边界条件合称为定解条件。某个偏微分方程和相应的定解条件结合在一起,就成了一个定解问题。

所谓初始条件就是用以说明某一具体物理过程初始状态的条件。所谓边界条件是用以说明某一具体物理过程中受约束的条件。初始条件包括函数的初始条件和函数导数的初始条件。

边界条件从数学角度来看有以下三种类型:

①在边界上直接给出了未知函数的数值,即

$$u|_s = f_1 \quad (1.1.1)$$

这种形式的边界条件称为第一类边界条件;

②在边界上给出了未知函数 u 沿 s 的外法线方向导数,即

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_s = f_2 \quad (1.1.2)$$

这种边界条件称为第二类边界条件;

③在边界 s 上给出了未知函数 u 及其沿 s 的外法线导数某种线性组合值,如

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u \right) \Big|_s = f_3 \quad (1.1.3)$$

这种形式的边界条件称为第三类边界条件。

不论哪一类型边界条件,当它的数学表达式中自由项 f_1, f_2, f_3 恒为零时,均称为齐次边界条件,否则为非齐次边界条件。

1.2 有限差分近似

1. 发展方程

描写随时间变化的物理过程的数学方程叫做发展方程,如描写热传导、对流扩散以及湍流等运动的数学物理方程都是发展方程。对于与时间无关的定常问题,在物理上往往反映一个平衡态,它可以看成是一个非定常过程在无限长时间后的渐近状态。

发展方程可以分成两大类:一类问题与扩散相关的,如热传导、浓度扩散、涡耗散等,它们



具有抛物型方程的特点;另一类是与波动和波传播相关的,如弦振动、水波等,它们具有双曲型方程的特点。

对于复杂运动,这两种性质兼而有之。因此对上述两类方程的讨论有助于对一般方程的讨论。

2. 模型方程

以对流扩散方程为例。一维对流扩散方程有以下两种形式:

守恒型:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial au}{\partial x} = d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.1.4)$$

非守恒型:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.1.5)$$

①若 $\alpha = 0$, 方程(1.1.5)变为纯对流方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1.1.6)$$

②若 $a = u$, 方程(1.1.5)变为非线性对流扩散方程(Burgers)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.1.7)$$

③当方程(1.1.5)右端扩散项改为 ku , 变为对流反映型方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = ku \quad (1.1.8)$$

3. 有限差分网格

在 $x-t$ 空间上方程的解域,由在 x 和 t 方向上分别为 Δx 和 Δt 的矩形网格所覆盖。域内的网格由两组分别平行于坐标轴 $x-t$ 的直线所组成

$$x = x_j \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

$$t = t_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

其中 $x_j = j\Delta x$, $t_n = n\Delta t$, 如图 1.1.1 所示。

所谓有限差分就是确定方程的解在这两组平行直线相交点上的近似值。这些坐标为 (x_j, t_n) 的点称为网点(或结点),简单地

表示成 (j, n) , 相应定义在这些点上的函数和导数记作 u_j^n 、 $\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_j^n$ 和 $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_j^n$ 。

4. 偏导数的有限差分近似

根据 Taylor 级数展开,在网点 (j, n) 上的函数 $u(x, t)$ 可展开为

$$u(x_j + \Delta x, t_n) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\Delta x)^m}{m!} \frac{\partial^m u}{\partial x^m}(x_j, t_n) \quad (1.1.9)$$

即

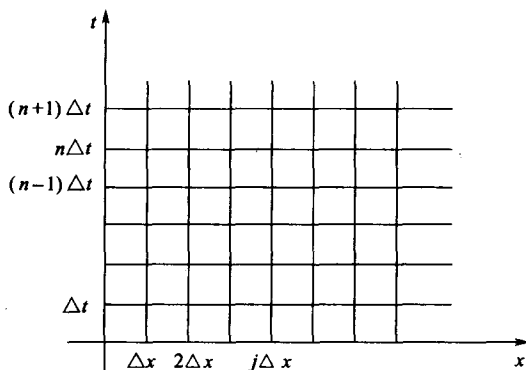


图 1.1.1 差分网格示意图

$$u_{j+1}^n = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\Delta x)^m}{m!} \frac{\partial^m u}{\partial x^m} \Big|_j^n = u_j^n + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_j^n + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_j^n + \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_j^n + \cdots \quad (1.1.10)$$

类似地

$$u(x_j, t_n + \Delta t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Delta t^m}{m!} \frac{\partial^m u(x_j, t_n)}{\partial t^m} \quad (1.1.11)$$

即

$$u_j^{n+1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Delta t^m}{m!} \frac{\partial^m u}{\partial t^m} \Big|_j^n = u_j^n + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_j^n + \cdots \quad (1.1.12)$$

在实际使用 Taylor 展开式时,可以在任何项处截断,如

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_j^n + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_j^n + o[(\Delta x)^3]$$

该式表示在第三项后截断, $o[(\Delta x)^3]$ 表示当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $o[(\Delta x)^3] \rightarrow 0$, 即 $o[(\Delta x)^3]$ 是 Δx 的高阶无穷小量, 称 $o[(\Delta x)^3]$ 为截断误差。

通常,取展开式右边两项,即

$$u_{j+1}^n = u_j^n + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_j^n + o[(\Delta x)^2] \quad (1.1.13)$$

因此微商

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_j^n = \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} + o(\Delta x) \quad (1.1.14)$$

可进一步写成

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_j^n = \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \quad (1.1.15)$$

误差为 $o(\Delta x)$, 称为向前差分;

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_j^n = \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} \quad (1.1.16a)$$

称为向后差分, 误差与向前差分相同。

此外,若写成

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_j^n = \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} \quad (1.1.16b)$$

称为中心差分。

5. 差分方程

所谓差分方程就是将不同差分形式代入方程中并变换其导数值, 得到的方程称为差分方程。根据时间导数项的不同差分格式, 可分为显格式和隐格式。下面以对流方程为例予以说明。

对流方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1.1.17)$$

①取 $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}$, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x}$, 则方程(1.1.17)的差分方程为

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0,$$

即

$$u_j^{n+1} = u_j^n - a \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_j^n - u_{j-1}^n) \quad (1.1.18)$$

令 $a \frac{\Delta t}{\Delta x} = \lambda$, 得

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda (u_j^n - u_{j-1}^n) = (1 - \lambda) u_j^n + \lambda u_{j-1}^n \quad (1.1.19)$$

②取 $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}$, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x}$, 则差分方程为

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} = 0$$

即

$$u_j^{n+1} = u_j^n - a \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{j+1}^n - u_j^n) \quad (1.1.20)$$

或

$$u_j^{n+1} = (1 + \lambda) u_j^n - \lambda u_{j+1}^n \quad (1.1.21)$$

③取 $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}$, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x}$, 则差分方程为

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

即

$$u_j^{n+1} = u_j^n - a \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \quad (1.1.22)$$

或

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\lambda}{2} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \quad (1.1.23)$$

以上三种差分方程都称为显格式, 对于 $n+1$ 时刻的值可直接由 n 时刻的已知值进行计算。

④取 $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}$, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x}$, 则差分方程为

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x} = 0$$

即

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda (u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}) \quad (1.1.24)$$

差分方程(1.1.24)称为隐格式, 在计算时与显格式不同, $n+1$ 时刻的 u 值, 不仅要利用已知 n 时刻的 u 值, 而且还要用到相邻点 $j-1$ 的 $n+1$ 时刻的 u 值, 因此无法直接从方程中解出, 必须同时列出包含有 $j-1$ 点的差分方程方能求解。因此隐格式的差分方程是列出 $n+1$ 时刻线上所有点的方程, 构成一个线性(或非线性)的代数方程组进行求解。

1.3 差分方程的数值解

以扩散模型方程



$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.1.25)$$

为例,讨论差分方程的数值解。

方程(1.1.25)的差分方程为

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \alpha \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \quad (1.1.26)$$

设 $S = \alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$, 上式可写成

$$u_j^{n+1} = Su_{j-1}^n + (1 - 2S)u_j^n + Su_{j+1}^n \quad (1.1.27)$$

通过差分方程(1.1.27)就可求得扩散方程(1.1.23)的数值解,在方程中取 $\alpha = 10^{-2}$, 初始条件和边界条件分别为

$$\left. \begin{aligned} u|_{t=0} &= 0 \quad (0 < x < 1) \\ u|_{x=0} &= 1 \quad (t > 0) \\ u|_{x=1} &= 1 \quad (t > 0) \end{aligned} \right\} \quad (1.1.28)$$

这样根据经验,空间步长 $\Delta x = 0.1$ 时,问题有合理的数值解。下面在差分方程中分别取 $S = \frac{1}{2}$ 和 $S = 1$ 两种情况,来观察差分方程所得近似解的情况。

$$(1) S = \frac{1}{2}$$

由于 $S = \alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$, $\Delta x = 0.1$, 所以得 $\Delta t = \frac{(\Delta x)^2}{2\alpha} = 0.5$, 这时差分方程取得最简单形式

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n) \quad (1.1.29)$$

其部分计算结果见表 1.1.1。

表 1.1.1

n	$n\Delta t$	边值	内点值										边值
5	3.0	1	0.687	0.375	0.218 7	0.062 5	0.063	0.062	0.219	0.375	0.687 5	1	
4	2.5	1	0.625	0.375	0.125	0.062 5	0.0	0.063	0.125	0.375	0.625	1	
3	2.0	1	0.625	0.25	0.125	0.0	0.0	0.0	0.125	0.25	0.625	1	
2	1.5	1	0.5	0.25	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1	
1	1.0	1	0.5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1	
0	0.5	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	
	$j\Delta x$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	
	j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

如果这是一个热扩散的计算结果,由表 1.1.1 所示不难看出,随着时间的增加,内部热扩散表现为区间内温度的增加是稳定的。区间内所有网点上的温度渐渐达到平衡值 1,这是符合实际的。表中仅列出五个时间步长($\Delta t = 0.5$)以及边界温度为 1 的计算结果。显然,在一定时间以后,总能使网点的计算值接近于 1,因此要缩短计算时间,似乎需放大时间步长。

(2) $S = 1$

在空间步长取为 $\Delta x = 0.1$ 的同样情况下, Δt 应取为 1, 这时方程化为

$$u_j^{n+1} = u_{j-1}^n - u_j^n + u_{j+1}^n \quad (1.1.30)$$

该方程计算时间步长增大一倍, 这不仅可减少计算步骤, 还可使计算时间大大减少, 因为在计算机上进行乘除运算较之加减所花的时间为多。计算结果见表 1.1.2。

表 1.1.2

n	$n\Delta t$	边值	内点值										边值
5	5	1	7	-8	-7	-3	2	-3	7	-8	7	1	
4	4	1	-2	4	-2	1	0	1	-2	4	-2	1	
3	3	1	2	-1	1	0	0	0	1	-1	2	1	
2	2	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	
	$j\Delta x$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	
	j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

表 1.1.2 所示结果显然是不符合实际的。造成这种不合理的计算结果是由于取 $S = 1$ 的缘故。这一点是使用某种差分格式时, 必须有明确的限制条件, 不然就会将不符合实际的数值解作为给定的偏微分方程的近似解。为了建立和明确这些限制条件, 下节将研究有关数值计算中的三个重要概念。

1.4 有限差分方程的数值分析基础

在没有讨论差分方程的重要概念之前, 首先必须确定所讨论的偏微分方程的初值或边值问题是否适定。所谓适定是指解必须存在、唯一, 而且连续依赖于所给定的数据, 亦即是方程的解对给定的初值是唯一的, 并且对于初始值的任何微小变化, 方程的解也只有微小的变化。这种方程称为适定的发展方程。

在适定条件下, 用差分方程近似偏微分方程并求方程的数值解必须考虑以下三个问题。

问题一: 差分方程的选择问题。

首先考虑选择怎样的差分格式才能使相应的差分方程收敛于微分方程。换句话说差分方程和微分方程之间的截断误差在任一时刻任一网点上是否趋近于零。如果截断误差在空间网点趋近于零, 则称差分方程和微分方程是相容的。

问题二: 差分方程在计算过程中的稳定性问题。

这是数值解中一个极其重要的问题。在用计算机做数值计算时, 由于计算机只能使用有限的数字进行计算, 因而就会产生舍入误差。如果随着计算时间的延续, 舍入误差能控制在一定的有限范围内, 甚至逐渐消失; 或者随计算时间的推延, 舍入误差不断增长, 这就关系到所求得的数值解是否有意义, 此即是差分方程的稳定性问题。

问题三:差分方程解和偏微分方程解的关系问题。

差分方程是将微分方程中的连续变量转化为离散量,亦即由连续的 $X-t$ 空间转换成离散的网格空间,而求解差分方程就是要考察在网点上系统的各种状态量。差分方程离散与求解的成功与否,就涉及差分方程的解是否收敛于微分方程的解,这就是差分方程的收敛问题。以下分别对此三个问题作一论述。

1. 相容性

差分方程与微分方程称之为相容,仅当空间网格趋于零时,在解域的每一点上差分方程趋近于微分方程。

将偏微分方程表示成算子形式

$$Lu = 0$$

其中 L 为微分算子, u 为微分方程的数值解。

若将相应的差分方程表示成

$$D\bar{u} = 0$$

当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, $\Delta x \rightarrow 0$, $D\bar{u} \rightarrow Lu$, 即两方程的截断误差在任一网点上均趋于零,亦即差分方程和微分方程是相容的。

设 ϵ_j^n 表示在网点 $(n\Delta t, j\Delta x)$ 上的截断误差,则有

$$D\bar{u}_j^n - Lu_j^n = \epsilon_j^n$$

现 u_j^n 是微分方程 $Lu = 0$ 的精确解,即 $Lu_j^n = 0$, 因此根据相容性要求 $\epsilon_j^n \rightarrow 0$, 故需、

$$Du_j^n = \epsilon_j^n \rightarrow 0$$

也即当 $\Delta t \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0$ 时, $D\bar{u}_j^n \rightarrow 0$ 。

考虑扩散模型方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u_j^{n+1} = Su_{j-1}^n + (1-2S)u_j^n + Su_{j+1}^n \quad (1.1.31)$$

其中 $S = \alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$ 。

现令 $\Delta x = h, \Delta t = k$, 利用 Taylor 展开式

$$u_j^{n+1} = u_j^n + k \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_j^n + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_j^n + \frac{k^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \Big|_j^n + \cdots$$

$$u_{j+1}^n = u_j^n + h \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_j^n + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_j^n + \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_j^n + \cdots$$

$$u_{j-1}^n = u_j^n - h \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_j^n + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_j^n - \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_j^n + \cdots$$

代入式(1.1.31)得

$$\begin{aligned} & u_j^n + k \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_j^n + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_j^n + \frac{k^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \Big|_j^n + \cdots \\ &= S \left(u_j^n - h \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_j^n + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_j^n - \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_j^n + \cdots \right) + (1-2S)u_j^n \\ &+ S \left(u_j^n + h \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_j^n + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_j^n + \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_j^n + \cdots \right) \end{aligned} \quad (1.1.32)$$



化简后可得

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_j^n = \alpha \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_j^n + E_j^n \quad (1.1.33)$$

其中 $E_j^n = -\frac{k}{2} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|_j^n + \frac{\alpha h^2}{12} \left. \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right|_j^n + o\{k^2, h^4\}$, 是差分方程与扩散方程的差, 称作截断误差。

显然, 当空间网格取得愈小, 则在固定点 (x, t) 的截断误差亦愈小, 亦即 $k \rightarrow 0, h \rightarrow 0$, 有限差分方程等价于微分方程, 这一性质称之为相容性。

对于以上差分方程(1.1.31)近似于扩散方程, 显然 $E_j^n \rightarrow 0$, 故是相容的。不过, 由于 u 满足扩散方程, 它亦满足方程

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)$$

或

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \quad (1.1.34)$$

所以截断误差又可表示成

$$E_j^n = -\frac{\alpha h^2}{2} \left(S - \frac{1}{6} \right) \left. \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right|_j^n + o\{k^2, h^4\}$$

如果 $S = \frac{1}{6}$, 则上式的第一项消失, 截断误差为 $o\{k^2, h^4\}$ 。或者说, 固定 S , 误差为 $o\{k^2, h^4\}$, 这时, 截断误差趋近于零的速度较其他 S 值为快。所以, 当 $S = \frac{1}{6}$ 时差分方程的解趋近于扩散方程的解, 较之 $S \leq 1$ 其他值为快。

显然, 研究差分方程的解是否收敛于偏微分方程的解, 必须考虑相容性, 但此并非为充分条件。因为即使差分方程可能等价于偏微分方程, 但当网格趋近于零时, 并不能保证差分方程的解一定逼近于偏微分方程的解, 为此必须进一步研究其他两个性质。

2. 稳定性

在数值计算中, 如果每个数值可以使用无限位小数进行运算, 则有限差分方程可以求得精确解。但在实际中, 计算机只能用有限位小数进行计算, 因而在每步计算中必然要引入“舍入”误差, 这样差分方程求得的解不是精确解 u_j^{n+1} , 而是 $\tilde{u}_j^{n+1}$ 。 $\tilde{u}_j^{n+1}$ 称为方程的数值解。如果这种“舍入”误差的累计量是可以忽略的, 则称有限差分方程是稳定的。明确地说, 在考虑网点 $(j\Delta x, n\Delta t)$ 上的误差

$$\epsilon_j^n = u_j^n - \tilde{u}_j^n$$

时, 若假定 $|\epsilon_j^n| < \delta$ (δ 为正数), 当 $\delta \rightarrow 0$ 时, $|\epsilon_j^{n+1}|$ 的最大值有界或趋向于零, 则称有限差分方程是稳定的。亦即说, 数值解和精确解并不随着计算时间数的增大而成指数形式增加。如果误差不随 n 的增大而成指数增加, 并且仍保持着初始误差的线性关系, 那么通常它们在数值计算上是容许的, 因为较之精确的差分解 u_j^n 要小得多。

通常由于在网格点上的误差分布是任意的, 因此不可能确定数值误差 $(u_j^n - \tilde{u}_j^n)$ 的精确值。但是可以通过某种标准方法作出误差估计。下面将作这方面的讨论, 可以看到数值解的精度较之估计的为高。这是因为在做稳定性分析时, 往往是假定个别误差的最坏可能组合情况, 譬如, 对所有误差的分布假定是同号的, 因而总的效果是相加, 但实际计算中往往有正有