



考研专业课攻关系列

结 构 力 学

考试要点与真题精解

◎任钧国 蒋志刚 编写

围绕学科考点

把握重点难点

收录全真试卷

附带详细解答



国防科技大学出版社

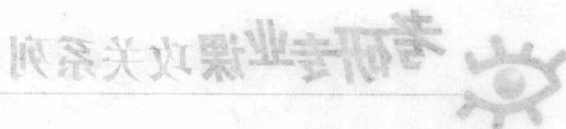
结构力学

考试要点与真题精解

任钧国 蒋志刚 编写

国防科技大学出版社

·长沙·



内 容 简 介

本书根据教育部制定的结构力学课程教学大纲要求和硕士研究生入学考试要求而编写。全书分为两大部分,第一部分内容涉及到结构力学的基本概念、研究方法,共分十章,以概述的形式给出;每一章包括内容提要(含考试重点)、例题精解;大部分例题选自近年来重点高等院校硕士研究生入学试题。第二部分收集了近几年重点院校的考研试题 24 套,并全部给出了解答。

本书适合作为报考土木建筑、水利工程、道路桥梁及航空航天类专业硕士研究生的考前复习参考书,也可作为大学生学习相关课程的辅助教材。

图书在版编目(CIP)数据

结构力学考试要点与真题精解/任钧国,蒋志刚编写. —长沙:国防科技大学出版社,2007.7
(考研专业课攻关系列)

ISBN 978-7-81099-426-2

I. 结… II. ①任…②蒋… III. 结构力学—研究生—入学考试—自学参考资料
IV. 0342

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 090117 号

国防科技大学出版社出版发行

电话:(0731)4572640 邮政编码:410073

<http://www.gfkdcbs.com>

责任编辑:石少平 责任校对:黄 煌

新华书店总店北京发行所经销

国防科技大学印刷厂印装

*

开本:787×1092 1/16 印张:14.5 字数:380 千

2007 年 7 月第 1 版第 1 次印刷 印数:1-4000 册

ISBN 978-7-81099-426-2

定价:22.00 元

前言

结构力学是土木建筑、水利和道路桥梁各专业及航空航天结构设计专业的技术基础课,也是这些专业研究生的入学考试科目。结构力学在力学方面主要建立在理论力学和材料力学基础上,因此具有很强的实践性和灵活性。为了帮助读者在短时间内复习结构力学,抓住和掌握这门课程的精髓,并且有所提高,本书以正确理解概念和原理、掌握解题技巧、突出重点和难点为原则,对那些具有普适性的典型问题,特别是针对研究生入学考试的重点和疑难问题,详尽地予以阐述。

本书包括两部分。第一部分以国家教育部制定的结构力学课程教学大纲为主线,分为十章:第一章关于结构计算简图,由于有的专业的结构力学研究生入学考试内容包含材料力学,因此添加了有关材料力学部分内容;第二章关于结构机动分析;第三章关于静定结构的内力计算,包括梁、刚架、桁架和三铰拱;第四章关于虚功原理和结构位移的计算,也提及了能量原理;第五章关于超静定结构,包括力法、位移法和力矩分配法;第六章关于影响线的计算;第七章关于矩阵位移法;第八章关于结构动力计算;第九章关于弹性稳定性计算;第十章关于结构极限载荷。每一章包括内容提要(含考试重点)、例题精解。内容提要着重理清各章的概念、原理和方法;例题精解通过对精选的各类例题深入分析和解答,使读者领会各章的精髓,提高解题技巧,有的题解给出了多种解法,使读者掌握重点和难点。本书的大部分例题选自近年来全国著名大学的研究生入学考试试题。第二部分包括 24 份 2002 年以后的考研试卷,并给出了参考解答。读者通过这部分的实战练习,定会更全面、透彻地理解和掌握结构力学这门课程,并能轻松地应对各种类型的考试。

本书适合作为研究生入学考试的复习参考书,也可以作为本科生、自考生和其他人员学习结构力学辅导用书。由于各高校结构力学考试内容略有差别,请读者根据所报考单位提供参考书的内容作适当选择。

本书第一部分第五、六、八、九、十章由蒋志刚编写,第一部分的第一至四章、第七章和第二部分由任钧国编写,任钧国负责最后统稿。编者感谢为本书提供资料的各高校的老师以及参与编写工作的研究生田四朋、王大志、刘宇、张书俊、孔铁全和吴志桥。

由于编者水平有限,书中难免疏漏,恳请读者批评指正。

作者

2007 年 5 月

目录

KAOYAN ZHUANYEKE GONGGUAN XILIE

第一章 引论

1.1 内容提要	(1)
1.1.1 结构力学的研究内容	(1)
1.1.2 结构计算简图	(1)
1.1.3 与材料力学相关的内容	(3)
1.2 真题精解	(7)

第二章 结构的几何不变性

2.1 内容提要	(11)
2.1.1 结构的几何构造分类	(11)
2.1.2 自由度、约束、铰	(11)
2.1.3 平面几何不变体系	(13)
2.1.4 空间几何不变体系	(15)
2.1.5 考试重点	(17)
2.2 真题精解	(17)

第三章 静定结构

3.1 内容提要	(22)
3.1.1 静定结构的一般概念	(22)
3.1.2 静定梁与刚架	(23)
3.1.3 桁架	(25)
3.1.4 实体三铰拱	(26)
3.1.5 考试重点	(28)
3.2 真题精解	(28)

第四章 弹性体系的虚功原理、结构位移计算、能量原理

4.1 内容提要	(39)
4.1.1 基本概念	(39)
4.1.2 虚功原理	(39)
4.1.3 单位载荷法	(40)

Contents

4.1.4	结构位移计算	(40)
4.1.5	图乘法	(41)
4.1.6	线性变形体的互等定理	(42)
4.1.7	考试重点	(43)
4.2	真题精解	(43)
第五章 超静定结构		
5.1	内容提要	(48)
5.1.1	基本概念	(48)
5.1.2	力法	(49)
5.1.3	位移法	(53)
5.1.4	渐近法	(57)
5.1.5	对称结构的计算及无弯矩杆件的判断	(61)
5.1.6	考试重点	(64)
5.2	真题精解	(64)
第六章 影响线及其应用		
6.1	内容提要	(80)
6.1.1	影响线的概念	(80)
6.1.2	静力法作影响线	(80)
6.1.3	机动法作影响线	(81)
6.1.4	影响线的应用	(83)
6.1.5	考试重点	(85)
6.2	真题精解	(85)
第七章 矩阵位移法		
7.1	内容提要	(90)
7.1.1	基本概念	(90)
7.1.2	杆单元 弹簧元 梁单元 刚架单元 连续梁单元	(91)
7.1.3	单元等效结点荷载	(95)
7.1.4	结构刚度矩阵 结构荷载列阵 平衡方程	(96)
7.1.5	先处理法和后处理法	(97)
7.1.6	单元内力和支反力	(98)

7.1.7 矩阵位移法求解步骤	(99)
7.1.8 考试重点	(99)
7.2 真题精解	(99)

第八章 结构的动力计算

8.1 内容提要	(111)
8.1.1 动力载荷分类和结构的动力自由度	(111)
8.1.2 单自由度体系的自由振动	(113)
8.1.3 单自由度体系的强迫振动	(115)
8.1.4 多自由度体系的自由振动	(119)
8.1.5 多自由度体系的强迫振动	(122)
8.1.6 考试重点	(124)
8.2 真题精解	(124)

第九章 结构的稳定计算

9.1 内容提要	(132)
9.1.1 基本概念	(132)
9.1.2 分析分支点稳定问题的静力法	(133)
9.1.3 分析分支点稳定问题的能量法	(134)
9.1.4 考试重点	(135)
9.2 真题精解	(135)

第十章 结构的极限载荷

10.1 内容提要	(143)
10.1.1 基本概念	(143)
10.1.2 比例加载的一般定理	(145)
10.1.3 结构极限载荷的计算方法	(145)
10.1.4 考试重点	(146)
10.2 真题精解	(146)

第十一章 硕士研究生入学考试试卷及其解答

1. 北京航空航天大学 2002 年硕士研究生入学考试试题 ...	(152)
2. 浙江大学 2002 年硕士学位研究生入学考试试题	(155)

Contents

3. 同济大学 2002 年硕士研究生入学考试试题	(161)
4. 上海交通大学 2002 年研究生入学考试试题	(163)
5. 国防科技大学 2003 年硕士研究生入学考试试题	(164)
6. 武汉大学 2003 年硕士研究生入学考试试题	(166)
7. 浙江大学 2003 年硕士研究生入学考试试题	(168)
8. 华中科技大学 2003 年硕士研究生入学考试试题	(171)
9. 中南大学 2003 年硕士研究生入学考试试题	(174)
10. 同济大学 2003 年研究生入学考试试题	(177)
11. 湖南大学 2003 年研究生入学考试试题	(178)
12. 上海交通大学 2003 年研究生入学考试试题	(180)
13. 东南大学 2003 年研究生入学考试试题	(181)
14. 国防科技大学 2004 年硕士研究生入学考试试题	(184)
15. 华中科技大学 2004 年研究生入学考试试题	(188)
16. 华南理工大学 2004 年研究生入学考试试卷	(191)
17. 武汉理工大学 2004 年研究生入学考试试题	(193)
18. 同济大学 2004 年研究生入学考试试题	(194)
19. 上海交通大学 2005 年研究生入学考试试题	(196)
20. 中南大学 2005 年研究生入学考试试题	(196)
21. 东南大学 2005 年研究生入学考试试题	(199)
22. 西南交通大学 2005 年研究生入学考试试题	(200)
23. 武汉大学 2005 年研究生入学考试试题	(203)
24. 国防科技大学 2006 年硕士研究生入学考试试题	(205)
参考答案	(208)
参考文献	(224)

第 1 章

引 论

(d)

C-I 图

(B)

结构系指能承受载荷、维持体系平衡和形状并起骨架作用部分,简称结构。在结构设计中,需要对实际结构进行受力分析、内力和变形的计算。由于结构的组成和受力都很复杂,于是要对结构和载荷进行简化,保存主要因素,把结构抽象为计算模型,这种计算模型称为结构计算简图。本章主要复习结构计算简化基本知识、与材料力学有关的内容。

1.1 内容提要

1.1.1 结构力学的研究内容

结构力学研究结构的组成规律和合理形式,以及结构在外载作用下的强度、刚度和稳定性分析。

1.1.2 结构计算简图

1. 杆件、支座和结点的简化

(1) 杆件

当结构元件某方向的尺度比其它方向的尺度大得很多时,称这种元件为杆,其两个主要几何因素是轴线和横截面积。其变形主要特点是变形过程中其横截面基本上保持为平面,称为平面假定。在计算简图中用其轴线表示。

(2) 平面结构的支座

1) 可动铰支座

支座构造如图 1-1(a) 所示,其计算简图如图 1-1(b),它容许结构绕铰转动,又容许结构沉垫块平面左右移动,其支反力 F_y 垂直于梁。

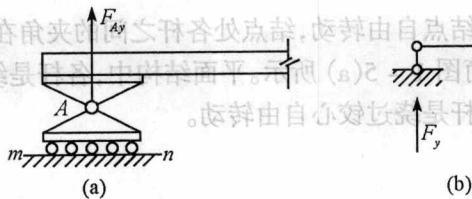


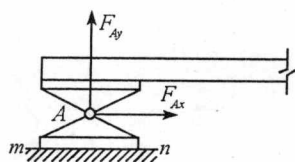
图 1-1

2) 固定铰支座

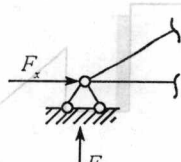
支座构造如图 1-2(a) 所示,其计算简图如图 1-2(b)。它容许结构绕铰转动,不容许移动,其支反力通过铰心,方向不确定,因而有两个分量,水平分量 F_x 和垂直分量 F_y 。

3) 固定支座

支座构造如图 1-3(a) 所示,其计算简图如图 1-3(b),它既不容许结构转动,又不容许移动,其支反力有两个分量,水平分量 F_x 和垂直分量 F_y ,还有支反力偶矩 M 。

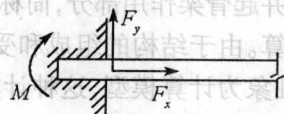


(a)



(b)

图 1-2



(a)

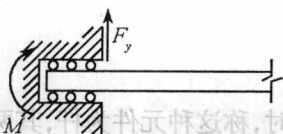


(b)

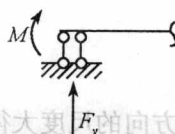
图 1-3

4) 定向支座

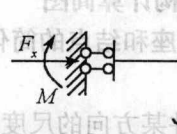
支座只允许沿某方向移动,而不允许发生转动,如图 1-4(a) 所示,显然这种支座只有两个反力,其计算简图有如图 1-4(b)、(c) 两种。



(a)



(b)



(c)

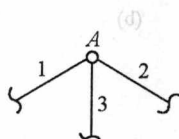
图 1-4

(3) 结点

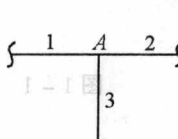
杆系结构中,几根杆件相互连接处称为结点。在计算简图中,结点通常简化为以下两种模型及其组合:

1) 铰结点

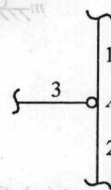
所连接的各杆都可以绕结点自由转动,结点处各杆之间的夹角在变形中可以改变,这种结点不传递力矩,铰结点计算简图 1-5(a) 所示。平面结构中,各杆是绕过铰心垂直于平面的直线自由转动,空间结构中,各杆是绕过铰心自由转动。



(a)



(b)



(c)

图 1-5

2) 刚结点

所连接各杆都不能绕结点转动,结点处各杆之间的夹角在变形中不改变,这种结点能传

递力矩,刚接点计算简图 1-5(b) 所示。

3) 组合结点

所连接的杆有些不能绕结点转动,有些可以绕结点自由转动,如图 1-5(c) 所示的结点,杆 3 与结点铰连接,杆 1 和杆 2 与结点刚连接。

2. 载荷的确定和分类

载荷的确定涉及到很多因素,需要参考有关资料和规范,合理确定载荷是进行计算和设计的前提。

载荷主要有:分布载荷与集中载荷;永久载荷与临时载荷;固定载荷与移动载荷;静力载荷与动力载荷;主要载荷、附加载荷与特殊载荷。

3. 结构的分类

(1) 元件分类

1) 杆件结构

结构由杆件或杆系组成,如桁架、刚架。

2) 薄壁结构

当结构的一个方向的尺度比其它两个方向的尺度小得很多时,这种结构称为薄壁结构,如板,此类结构多用于航空工业上。

(2) 结构几何特征分类

1) 平面结构

组成结构的所有元件和载荷均在同一平面内的结构。

2) 空间结构

组成结构的所有元件和载荷不在同一平面内的结构,实际结构都是空间的,但取计算简图时,许多结构可简化为一个或几个平面结构计算。

4. 结构系统的简化

实际结构状态往往很复杂,不经过简化难以分析,简化主要原则是保留原结构的主要特征和变形的主要因素。简化包括元件的简化,支撑的简化,载荷的简化。

1.1.3 与材料力学相关的内容

1. 截面的几何性质

虽然杆的主要两个几何因素是长度和横截面,但是横截面的形状对杆的变形大小也有很大影响。一般杆的轴线方向取为 x 轴,横截面取为 yz 平面。在材料力学中主要用到下列几个量。

(1) 截面的静矩和形心位置

yz 平面内的截面微元 dF (如图 1-6) 对 y 轴或 z 轴的静力矩,其面积分称为此截面的静矩,即下列两个积分

$$\begin{cases} S_x = \int_F y dF \\ S_y = \int_F z dF \end{cases} \quad (1-1)$$

截面的形心位置 $(\bar{y}, \bar{z})$ 为

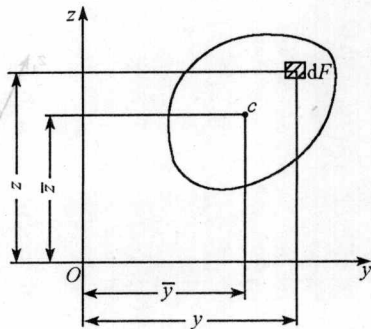
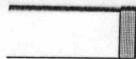


图 1-6



$$\begin{cases} \bar{y} = \frac{S_z}{F} \\ \bar{z} = \frac{S_y}{F} \end{cases} \quad (1-2)$$

其中, F 为截面面积。

(2) 惯性矩和惯性积

yz 平面内的截面微元 dF 对 y 轴或 z 轴二次矩的面积分称为惯性矩, 即下列两个积分

$$\begin{cases} I_z = \int_F y^2 dF \\ I_y = \int_F z^2 dF \end{cases} \quad (1-3)$$

yz 平面内的截面微元 dF 对坐标 y 、 z 乘积的面积分称为惯性积, 即下列积分

$$I_{yz} = \int_F yz dF \quad (1-4)$$

对通过形心 c 有一对与 y 、 z 轴平行的形心轴 y_c 、 z_c 的惯性矩和惯性积, 分别记为 I_{y_c} 、 I_{z_c} 和 I_{y_zc} 。

(3) 惯性矩和惯性积的平行移动和转轴

对 y 轴和 z 轴的惯性矩 I_y 、 I_z 和惯性积 I_{yz} 与对形心轴的惯性矩 I_{y_c} 、 I_{z_c} 和惯性积 I_{y_zc} 间有关系

$$\begin{cases} I_y = I_{y_c} + a^2 F \\ I_z = I_{z_c} + b^2 F \\ I_{yz} = I_{y_zc} + abF \end{cases} \quad (1-5)$$

其中, (b, a) 为形心的坐标 $(\bar{y}, \bar{z})$ 的值。

若 y 、 z 轴绕原点 O 旋转 α 角 (如图 1-7), 截面对新的 y_1 、 z_1 轴的惯性矩和惯性积与对 y 、 z 轴的惯性矩和惯性积之间关系为

$$\begin{cases} I_{y_1} = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2} \cos 2\alpha - I_{yz} \sin 2\alpha \\ I_{z_1} = \frac{I_y + I_z}{2} - \frac{I_y - I_z}{2} \cos 2\alpha + I_{yz} \sin 2\alpha \\ I_{y_1 z_1} = \frac{I_y - I_z}{2} \sin 2\alpha + I_{yz} \cos 2\alpha \end{cases} \quad (1-6)$$

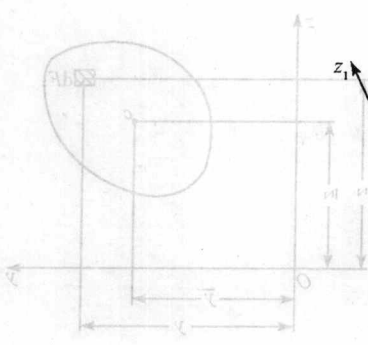


图 1-1

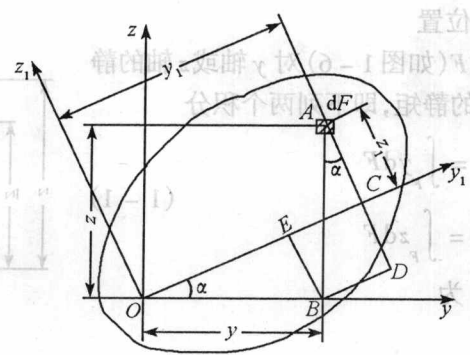


图 1-7

在转轴关系中,惯性矩之和为常量:

$$I_y + I_z = I_{y_1} + I_{z_1} \quad (1-7)$$

(4) 主形心惯性轴和主形心惯性矩

截面对某一对轴的惯性积为零轴称为主惯性轴,当轴的交点与形心重合时,这对轴称为主形心惯性轴。若截面有一对称轴,则它就是一个主形心惯性轴。

转动坐标轴可以得到主形心惯性轴,若转动角为 α_0 ,则

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{-2I_{yz}}{I_y - I_z} \quad (1-8)$$

主惯性矩为

$$\begin{cases} I_{y_0} = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(I_y - I_z)^2 + 4I_{yz}^2} \\ I_{z_0} = \frac{I_y + I_z}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(I_y - I_z)^2 + 4I_{yz}^2} \end{cases} \quad (1-9)$$

2. 应力状态

(1) 应力状态

1) 一点的应力状态

构件受力后,构件内某一点的各个截面上的应力情况,称为该点处的应力状态。一般可围绕该点取出一微小的平行六面体(简称单元体)进行研究。由于单元体是无限小的,故可认为单元体各面上的应力是均匀的,且相互平行的平面上的应力大小相等,方向相反。

2) 主应力、主平面

理论证明对受力构件内任一点必可找到这样一个单元体,在该单元体的三对相互垂直面上仅有正应力,而无剪应力,这种单元体也称为主单元体。仅有正应力而无剪应力的平面称为主平面,其上的正应力称为主应力。单元体上三个主应力按代数值大小排列有:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

3) 单向、二向、三向应力状态

任一点的应力状态可以用三个主应力来表示。对某一点来说,如三个主应力中只有一个主应力不为零,则该点的应力状态称单向应力状态;如三个主应力中有两个主应力不为零,则该点的应力状态称二向应力状态或平面应力状态;如三个主应力均不为零,则称三向应力状态或空间应力状态。

单向应力状态也称简单应力状态,二向和三向应力状态也称复杂应力状态。

(2) 二向应力状态时任一斜截面上的应力、主应力和主平面方位

1) 解析法

任一斜面上的应力(图 1-8)为

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha \quad (1-10)$$

$$\tau_{\alpha\beta} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \quad (1-11)$$

式中: σ_x 、 τ_{xy} 和 σ_y 、 τ_{yx} 分别是法线为 x 轴和 y 轴的截面上的正应力和剪应力。应力的符号规定为:正应力以拉应力为正而压应力为负,剪应力对单元体内任意点的矩为顺时针转向

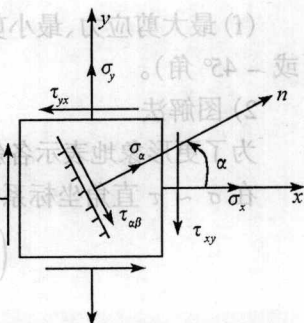


图 1-8

时,规定为正,反之为负, α 为斜截面外法线 n 与 x 轴的夹角,从 x 轴逆时针转至斜截面外法线 n 方向的 α 角规定为正,反之为负。

主应力

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (1-12)$$

主平面的方位角 α_0 为

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (1-13)$$

最大剪应力、最小剪应力及作用平面方向分别表示为

$$\sigma_{\max} + \tau = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (1-14)$$

$$\tan(2\alpha_1) = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \quad (1-15)$$

应指出:

(a) 斜截面上的应力公式是根据力的平衡条件得出,不要理解为应力平衡。

(b) 上面公式中的值均为代数值,使用这些公式时应特别注意应力和角度的正负号规定。

(c) 主应力公式中用 $\sigma_{\max}$ 和 $\sigma_{\min}$,而不用 σ_1 和 σ_2 ,是因为二向应力状态中有一个主应力为零,只有在求出 $\sigma_{\max}$ 和 $\sigma_{\min}$ 以后,再将 $\sigma_{\max}$ 、 $\sigma_{\min}$ 和为零的主应力按代数值重新排序,以保证 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ 。

(d) 由公式求出的主平面方位角为 $2\alpha_0$,应有两个角度,这两个角度相差 180° ,即 α_0 的两个角度相差 90° 。

$\alpha_0, \alpha_0 + 90^\circ$ 即为主平面的方位角,两个主平面上分别作用有一个主应力。确定一主应力作用在 α_0 平面上还是作用在 $\alpha_0 + 90^\circ$ 平面上的方法有多种,这里只介绍其中的一种。即较大的主应力总是偏向 σ_x 和 σ_y 中的较大者,较小的主应力总是偏向于 σ_x 和 σ_y 中的较小者。具体规则如下:

当 $\sigma_x > \sigma_y$ 时, $\sigma_1 > \sigma_2$, σ_1 与 σ_x 的夹角为 α_0 , σ_2 与 σ_y 的夹角也是 α_0 ;

当 $\sigma_x < \sigma_y$ 时, $\sigma_1 > \sigma_2$, σ_1 与 σ_y 的夹角为 α_0 , σ_2 与 σ_x 的夹角也是 α_0 ;

当 $\sigma_x = \sigma_y$ 时, $\alpha_0 = 45^\circ$,主应力的方向可由单元体的应力情况直观判断出来。

(e) 单元体上互相垂直平面上的正应力之和相等,且等于同一常量。即:

$$\sigma_{\max} + \sigma_{\min} = \sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y = \sigma_\alpha + \sigma_{\alpha+90^\circ} = C$$

(f) 最大剪应力、最小剪应力也称为主剪应力。最大剪应力所在平面与主平面相交成 45° 角(或 -45° 角)。

2) 图解法

为了更形象地表示各斜截面上应力的相互关系,可以用应力圆来描述一点处的应力状态。

在 $\sigma \sim \tau$ 直角坐标系中,应力圆的方程为

$$\left(\sigma_\alpha - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{\alpha\theta}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 \quad (1-16)$$

应力圆(图1-9)的圆心 C 的坐标为 $\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0\right)$,半径为 $R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$ 。

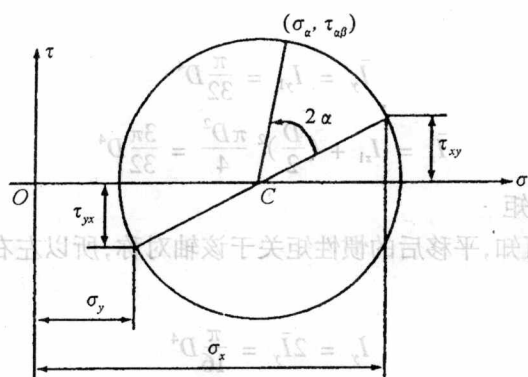


图 1-9

应指出:

- (a) 应力圆上的一点对应单元体上一个斜面上的应力。
- (b) 单元体上转过 α 角, 在应力图上按相同方向转 2α 角; 单元体从某个面开始旋转, 在应力圆上从代表该面应力的点开始旋转。
- (c) 三向应力状态下的最大剪应力

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (1-17)$$

应指出, 该公式不仅对三向应力状态适用, 而且对单向和二向应力状态也适用。

1.2 真题精解

[例 1.1] (国防科技大学 2002 年试题) 图 1 所示为两个圆形的组合图形, 其中 $I_y =$ _____, $I_z =$ _____。

[解] 截面的基本形状为圆形, 但轴线只有一条为主形心惯性轴, 所求惯性矩的轴线与主形心惯性轴平行, 采用惯性轴平移的方法计算是合适的。首先计算基本图形——圆截面主形心惯性轴的惯性矩 I_{y_1} 和 I_{z_1} (如图 2), 然后利用惯性轴平移公式求得轴线的惯性矩, 最后得组合图形的惯性矩。

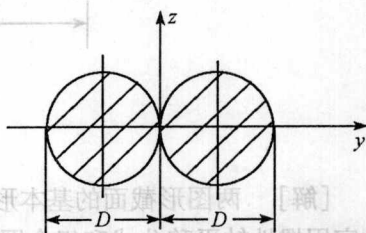
(1) 圆形截面的主形心惯性矩

圆形截面的主形心惯性轴为原点在圆心的直角坐标系。设主形心惯性轴的惯性矩为 I_{y_1} 和 I_{z_1} , 根据惯性矩的定义, 在极坐标系下积分, 得

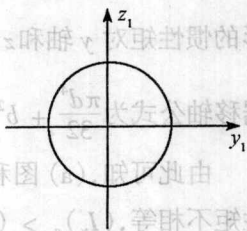
$$I_{y_1} = I_{z_1} = \iint_{x^2+y^2 \leq \frac{D^2}{4}} y^2 dF = \int_0^{\frac{D}{2}} \int_0^{2\pi} \rho^2 \sin^2 \varphi \rho d\rho d\varphi = \frac{\pi}{32} D^4$$

(2) 截面的平移

截面的平移相当于轴线的平移, 将基本图形分别向左、向右平移 $\frac{D}{2}$, 得题中的截面形状, y_1 轴与 y 轴重合, 不必处理。设平移后的惯性矩为 $\bar{I}_{y_1}$ 和 $\bar{I}_{z_1}$, 根据轴线平移公式 (1-5), 得平移后



例 1.1 图 1



例 1.1 图 2

图形的惯性矩

$$\bar{I}_y = I_{y1} = \frac{\pi}{32} D^4$$

$$\bar{I}_z = I_{z1} + \left(\frac{D}{2}\right)^2 \frac{\pi D^2}{4} = \frac{3\pi}{32} D^4$$

(3) 组合图形的惯性矩

根据轴线平移公式可知, 平移后的惯性矩关于该轴对称, 所以左右两图形的惯性矩相同, 故

$$I_y = 2\bar{I}_y = \frac{\pi}{16} D^4$$

$$I_z = 2\bar{I}_z = \frac{3\pi}{16} D^4$$

[例 1.2] (西安交通大学 2000 年试题) 下列图形对各自形心轴 y 、 z 的轴惯性矩之间的关系为:

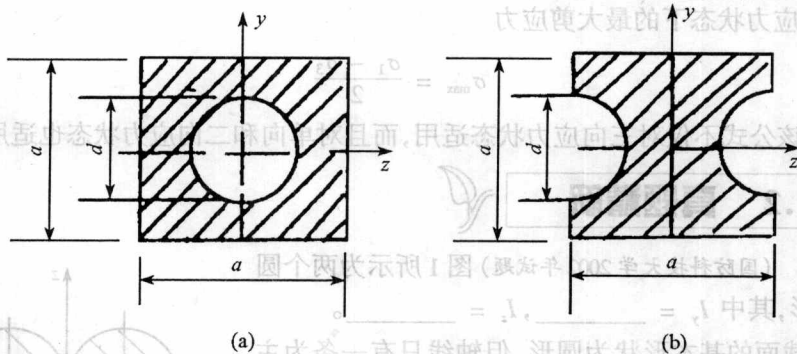
$$(I_y)_a \quad (I_y)_b; (I_z)_a \quad (I_z)_b$$

(A) 大于

(B) 等于

(C) 小于

(D) 不能确定



例 1.2 图

[解] 两图形截面的基本形状均由直径为 d 的两个半圆形和边长为 a 的正方形构成, 因此宜用惯性轴平移公式和组合图形综合考虑解答。(a) 图的正方形形心处截去以形心为圆心、直径为 d 的圆形, (b) 图的正方形截去以两对边的中点为圆心、直径为 d 的半圆, 两图形被截去的总面积相同, 若被截面积的惯性矩越大, 则原图形的惯性矩就越小。(a) 图的正方形截去圆形的惯性矩对 y 轴和 z 轴均为 $\frac{\pi d^4}{32}$, (b) 图正方形截去的两个半圆形惯性矩, 对 y 轴的惯性矩根据移轴公式为 $\frac{\pi d^4}{32} + b^2 \frac{\pi d^4}{4}$, 其中 b 为半圆形心 z 坐标值, 对 z 轴的惯性矩为 $\frac{\pi d^4}{32}$ 。

由此可知, (a) 图和 (b) 图对 z 轴的惯性矩相同, $(I_z)_a = (I_z)_b$ 。(a) 图和 (b) 图对 y 轴的惯性矩不相等, $(I_y)_a > (I_y)_b$ 。

[例 1.3] (南京航空航天大学 2000 年试题) 已知图示三角形截面的惯性矩 I_{z_1} , 求对 z_2 轴惯性矩 I_{z_2} 。

[解] 解法一: 根据定义直接得到惯性矩。三角形面积 $F = \frac{BH}{2}$, 设截面内一点对 z_1 轴和

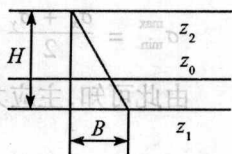
z_2 轴的距离分别为 y_1 和 y_2 , 由图可知

$$y_1 + y_2 = H$$

根据惯性矩的定义

$$I_{z_1} = \iint_{\Delta} y_1^2 dF$$

$$\begin{aligned} I_{z_2} &= \iint_{\Delta} y_2^2 dF = \iint_{\Delta} (H - y_1)^2 dF \\ &= \iint_{\Delta} y_1^2 dF - 2H \iint_{\Delta} y_1 dF + \iint_{\Delta} H^2 dF \\ &= I_{z_1} - 2H \frac{H}{3} F + H^2 F \\ &= I_{z_1} + \frac{H^3 B}{6} \end{aligned}$$



例 1.3 图

积分都是在三角形内进行, 但坐标系不同。上述 I_{z_2} 积分的第二项为截面对轴线的静矩, 等于截面的重心坐标与面积的乘积。

解法二: 利用惯性轴平移公式求得。设过形心的惯性轴为 z_0 轴, 对 z_0 轴的惯性矩为 I_{z_0} , 三角形面积 $F = \frac{BH}{2}$ 。根据轴线平移公式, 有

$$I_{z_1} = I_{z_0} + \left(\frac{H}{3}\right)^2 F$$

$$I_{z_2} = I_{z_0} + \left(\frac{2H}{3}\right)^2 F = I_{z_0} + \left(\frac{H}{3}\right)^2 F + \frac{H^2}{3} F$$

比较上述两式得

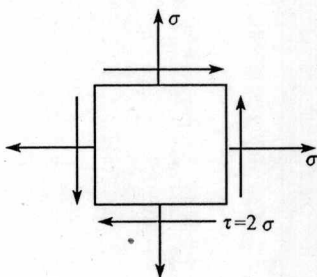
$$I_{z_2} = I_{z_1} + \frac{H^3 B}{6}$$

[例 1.4] (哈尔滨工业大学 2000 年试题) 受力构件内一点应力状态如图所示, 其最大主应力 σ_1 等于_____。

- A. σ B. 2σ C. 3σ D. 4σ

[解] 由题图可知, $\sigma_x = \sigma$, $\sigma_y = \sigma$, $\tau_{xy} = \sigma$ 。此点的应力状态为平面应力状态。由公式(1-12)可得

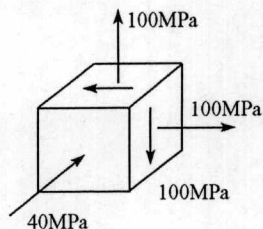
$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 2\sigma$$



例 1.4 图

[例 1.5] (中南大学 2000 年试题) 单元体各面上的应力如图示, 求最大剪应力。

[解] 由题图可知, 纸面方向的应力只有正应力, 无剪应力, 即 $\sigma_z = -40\text{MPa}$ 。其余两个面上的应力状态为 $\sigma_x = 100\text{MPa}$, $\tau_{xy} = -100\text{MPa}$ 和 $\sigma_y = 100\text{MPa}$, $\tau_{xy} = -100\text{MPa}$ 。将坐标系绕 z 轴转动, 由于 z 轴方向无剪应力, 转动对此面的应力无影响, 仍为 $\sigma_z = -40\text{MPa}$ 。其余两个面上的应力状态按二向应力状态计算, 由主应力公式可知, 主应力为



例 1.5 图