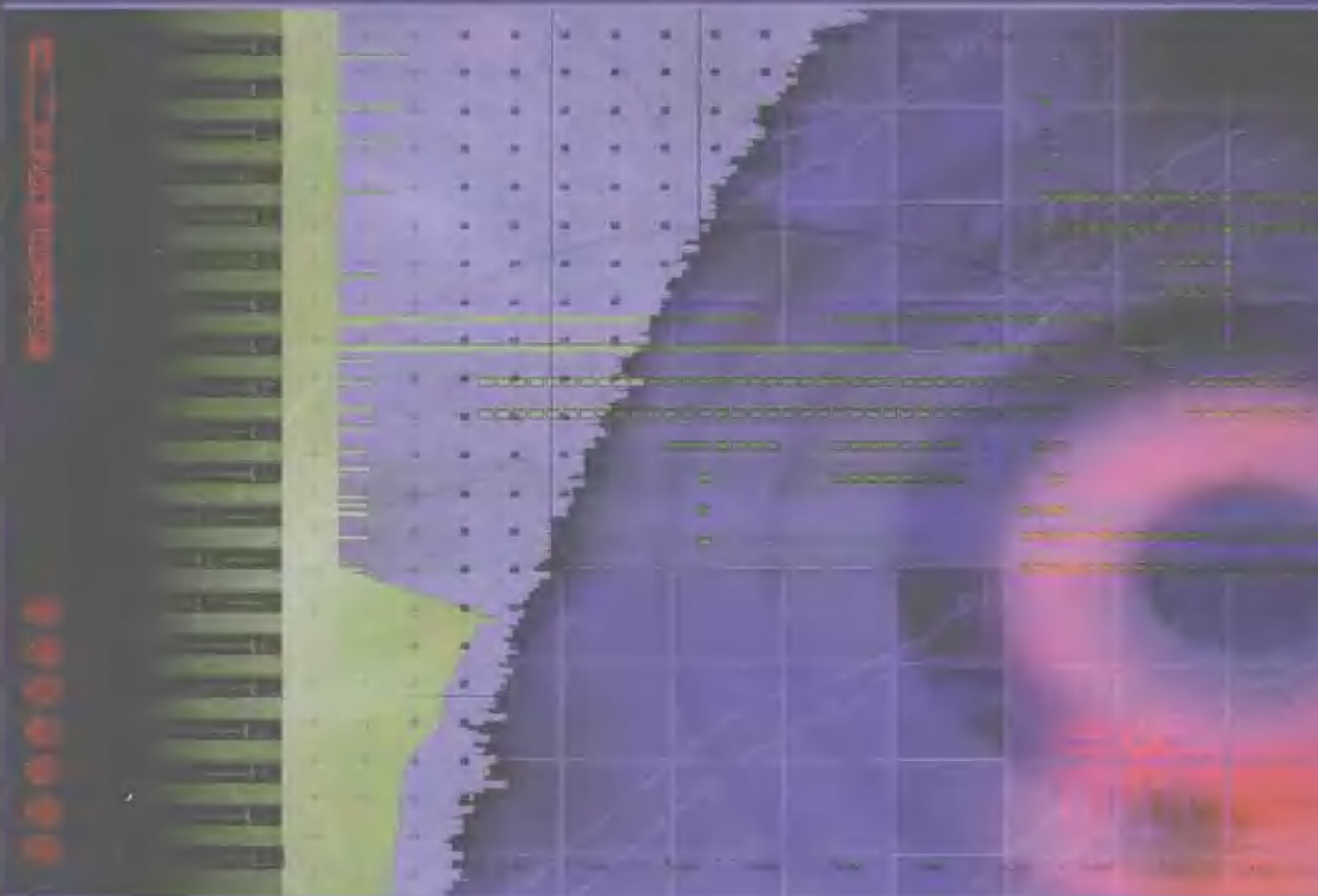
新世纪高职高专
基础类课程规划教材



YINGYONG SHUXUE JICHU

应用数学基础

新世纪高职高专教材编审委员会
主编 李 鹤 主审 于 丽 马 英

大连理工大学出版社

新世纪高职高专基础类课程规划教材

应用数学基础

新世纪高职高专教材编审委员会组编

主 审 于 丽 马 英

主 编 李 鹤 副主编 张景虹 王艳天

YINGYONG SHUXUE JICHU

大连理工大学出版社

DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

应用数学基础/李鹤编. 一大连:大连理工大学出版社,2008.9

新世纪高职高专基础类课程规划教材

ISBN 978-7-5611-4458-9

Ⅰ. 应… Ⅱ. 李… Ⅲ. 应用数学—高等学校:技术学校—教材 Ⅳ. O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 140476 号

大连理工大学出版社出版

地址:大连市软件园路 80 号 邮政编码:116023

发行:0411-84708842 邮购:0411-84703636 传真:0411-84701466

E-mail:dutp@dutp.cn URL:http://www.dutp.cn

大连天正华延彩色印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:185mm×260mm 印张:20.25 字数:456 千字

2008 年 9 月第 1 版 2008 年 9 月第 1 次印刷

责任编辑:杨 云 胡 琳 责任校对:周双双

封面设计:张 莹

ISBN 978-7-5611-4458-9 定 价:32.00 元

总　序

我们已经进入了一个新的充满机遇与挑战的时代，我们已经跨入了21世纪的门槛。

20世纪与21世纪之交的中国，高等教育体制正经历着一场缓慢而深刻的革命，我们正在对传统的普通高等教育的培养目标与社会发展的现实需要不相适应的现状作历史性的反思与变革的尝试。

20世纪最后的几年里，高等职业教育的迅速崛起，是影响高等教育体制变革的一件大事。在短短的几年时间里，普通中专教育、普通高专教育全面转轨，以高等职业教育为主导的各种形式的培养应用型人才的教育发展到与普通高等教育等量齐观的地步，其来势之迅猛，发人深思。

无论是正在缓慢变革着的普通高等教育，还是迅速推进着的培养应用型人才的高职教育，都向我们提出了一个同样的严肃问题：中国的高等教育为谁服务，是为教育发展自身，还是为包括教育在内的大千社会？答案肯定而且惟一，那就是教育也置身其中的现实社会。

由此又引发出高等教育的目的问题。既然教育必须服务于社会，它就必须按照不同领域的社会需要来完成自己的教育过程。换言之，教育资源必须按照社会划分的各个专业（行业）领域（岗位群）的需要实施配置，这就是我们长期以来明乎其理而疏于力行的学以致用问题，这就是我们长期以来未能给予足够关注的教育目的问题。

如所周知，整个社会由其发展所需要的不同部门构成，包括公共管理部门如国家机构、基础建设部门如教育研究机构和各种实业部门如工业部门、商业部门，等等。每一个部门又可作更为具体的划分，直至同它所需要的各种专门人才相对应。教育如果不能按照实际需要完成各种专门人才培养的目标，就不能很好地完成社会分工所赋予它的使命，而教育作为社会分工的一种独立存在就应受到质疑（在市场经济条件下尤其如此）。可以断言，按照社会的各种不同需要培养各种直接有用人才，是教育体制变革的终极目的。

随着教育体制变革的进一步深入，高等院校的设置是否会同社会对人才类型的不同需要一一对应，我们姑且不论。但高等教育走应用型人才培养的道路和走研究型（也是一种特殊应用）人才培养的道路，学生们根据自己的偏好各取所需，始终是一个理性运行的社会状态下高等教育正常发展的途径。

高等职业教育的崛起，既是高等教育体制变革的结果，也是高等教育体制变革的一个阶段性表征。它的进一步发展，必将极大地推进中国教育体制变革的进程。作为一种应用型人才培养的教育，它从专科层次起步，进而应用本科教育、应用硕士教育、应用博士教育……当应用型人才培养的渠道贯通之时，也许就是我们迎接中国教育体制变革的成功之日。从这一意义上说，高等职业教育的崛起，正是在为必然会取得最后成功的教育体制变革奠基。

高等职业教育还刚刚开始自己发展道路的探索过程，它要全面达到应用型人才培养的正常理性发展状态，直至可以和现存的（同时也正处在变革分化过程中的）研究型人才培养的教育并驾齐驱，还需要假以时日；还需要政府教育主管部门的大力推进，需要人才需求市场的进一步完善发育，尤其需要高职教学单位及其直接相关部门肯于做长期的坚忍不拔的努力。新世纪高职高专教材编审委员会就是由全国100余所高职高专院校和出版单位组成的旨在以推动高职高专教材建设来推进高等职业教育这一变革过程的联盟共同体。

在宏观层面上，这个联盟始终会以推动高职高专教材的特色建设为己任，始终会从高职高专教学单位实际教学需要出发，以其对高职教育发展的前瞻性的总体把握，以其纵览全国高职高专教材市场需求的广阔视野，以其创新的理念与创新的运作模式，通过不断深化的教材建设过程，总结高职高专教学成果，探索高职高专教材建设规律。

在微观层面上，我们将充分依托众多高职高专院校联盟的互补优势和丰裕的人才资源优势，从每一个专业领域、每一种教材入手，突破传统的片面追求理论体系严整性的意识限制，努力凸现高职教育职业能力培养的本质特征，在不断构建特色教材建设体系的过程中，逐步形成自己的品牌优势。

新世纪高职高专教材编审委员会在推进高职高专教材建设事业的过程中，始终得到了各级教育主管部门以及各相关院校相关部门的热忱支持和积极参与，对此我们谨致深深谢意，也希望一切关注、参与高职教育发展的同道朋友，在共同推动高职教育发展、进而推动高等教育体制变革的进程中，和我们携手并肩，共同担负起这一具有开拓性挑战意义的历史重任。

新世纪高职高专教材编审委员会

2001 年 8 月 18 日

前　言

《应用数学基础》是新世纪高职高专教材编审委员会组编的基础类课程规划教材之一。

当前，我国高职高专教育成为社会关注的热点，面临大好的发展机遇，同时国家经济、科技和社会发展也对高职高专教育人才的培养提出了更高的要求。为了适应高职高专教育的发展，急需编写适用的、具有特色的教材，本教材正是针对这一需要编写的。

本教材是根据教育部最新制定的《高职高专教育高等数学基础课程教学基本要求》，在认真总结多年从事高职高专数学教改经验的基础上编写的。以"掌握概念、强化应用、培养技能"为指导思想，体现高职高专教育以应用为目的，以必需、够用为度的原则。在体系上注重突出数学课程循序渐进、由浅入深的特点；在内容上淡化理论证明、强调应用和计算；书中所涉及的计算机知识都在数学实验中进行了操作介绍；在教材内容选取上，面向现行高职高专的理科专业和文科专业。

我国近几年的高等教育，在培养高等技术应用型人才方面，高职高专院校起到了主力军的作用。教育部对高职高专院校的培养目标、办学模式和教学管理等，都有了明确的指导思想，为这类院校指明了正确的办学方向。根据教育部的有关指示精神和社会对高职高专业毕业生的实际要求，同时又进一步结合当前高职高专教育发展趋势及学校自身的状况，编写了这本《应用数学基础》教材，本教材具有以下特点：

(1)进一步贯彻以应用为目的，以必需、够用为度的原则，加强数学知识的应用，同时在保持该学科知识体系完整性的基础上，尽量降低难度、着重应用。

(2)教材编写本着分散难点，突出重点，注意几何、物理解释，重点培养学生的空间想象能力、抽象概括能力和动手应用能力。

(3)强调数学的思想和方法，注意体现启发式教学和直观性

教学的原则,不同层次的学生对知识的掌握。

(4)在注重教材科学性和逻辑性的前提下,更注重培养学生科学、良好的思维习惯,适当增加应用性题目。练习题的编写还体现出“加强基础知识、巩固重点”的原则,并涉及专业生产中可能碰到的一些实际问题。

本书由李鹤担任主编,由张景虹、王艳天担任副主编。具体的编写分工为:第 5、6、7、8、9 章由李鹤编写;第 2、4 章由李寅杰等分工编写;第 3 章由张景虹、王艳天编写;第 10 章由李鹤、李寅杰编写。参加本书编写工作的还有刘昊老师。

由于编者水平有限,加之时间比较仓促,书中难免有缺点和错误,敬请广大师生、读者批评指正。

所有意见和建议请发往:gzjckfb@163.com
欢迎访问我们的网站:http://www.dutpgz.cn
联系电话:0411—84707492　84706104

编　者

2008 年 9 月

目　　录

第 1 章

函数　极限　连续

教学要求

1. 了解集合、区间、邻域的概念,初等函数、复合函数、分段函数的概念.

2. 理解函数的概念,会求函数的定义域、函数值.

3. 理解极限的定义、无穷小量、无穷大量的概念以及极限的四则运算法则,会用两个重要极限公式求极限.

4. 掌握复合函数的复合及分解过程,了解反函数的概念,函数在一点连续的概念,初等函数的连续性,闭区间上连续函数的性质.

5. 会用函数关系描述生产生活的实际问题.

函数描述了客观世界中量与量之间的依赖关系,是高等数学研究的主要对象,其研究的基本方法是极限方法.

1.1 函　数

我们先介绍三个与函数有关的概念———集合、区间、邻域.

1.1.1 集合与区间

1. 集合

集合是近代数学中的一个重要的基本概念. 在初等数学中,已对集合做过一些介绍,为了以后讨论问题的方便,下面再将其中有关内容作一个简单的介绍.

具有某种属性的对象的全体,称为一个集合或集. 而组成这个集合的对象则称为该集合的元素. 对于任何集合的元素,不仅是确定的,而且是无序、互异的. 例如,某城市的建设银行所属的所有储蓄所,就构成一个集合,其中每一家储蓄所都是该集合的元素.

在习惯上,人们常用英文的大写字母如 A,B,X,Y 等表示集合,而用英文的小写字母如 a, b, x, y 或 (x,y), (x,y,z) 等表示集合的元素.

由数组成的集合称为数集. 常见的数集有自然数集 N、正整数集 N^+、整数集 Z、有理数集 Q、实数集 R 等. 为了方便起见,还可以用 Q^+ 表示正有理数集,用 R^- 表示负实数集,等等.

一个集合常用的表示方法有列举法、描述法和图示法. 如方程 $x^2-3x+2=0$ 的根所

组成的集合,用列举法表示可写成 $A=\{1,2\}$ 或 $A=\{2,1\}$,用描述法又可写成 $A=\{x|x^2-3x+2=0,\ x\in \mathrm{R}\}$.

只有一个元素 a 的集合,称为单元素集合,记为 $\{a\}$,如 $\{0\}$ 表示只含 0 这个元素的集合.不含任何元素的集合,称为空集,记为 $\varnothing$,但不能写成 $\{\varnothing\}$.例如

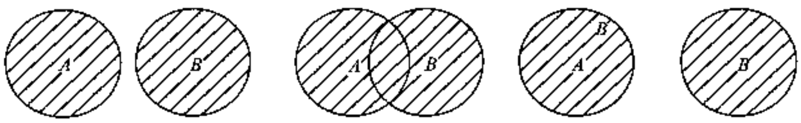
$$\{x|x^2+1=0,x\in \mathrm{R}\}=\varnothing,\quad \{x|x^2<0,x\in \mathrm{R}\}=\varnothing$$

由两个集合 A 和 B 的所有元素组成的集合,称为集合 A 和 B 的并集,记为

$$A\cup B=\{x|x\in A \text{ 或 } x\in B\}$$

例如,$A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,3,4\}$,则 $A\cup B=\{1,2,3,4\}$.

集合 A 和集合 B 的并集 $A\cup B$,可用图 1-1 中的阴影部分表示.



(1) (2) (3) (4)

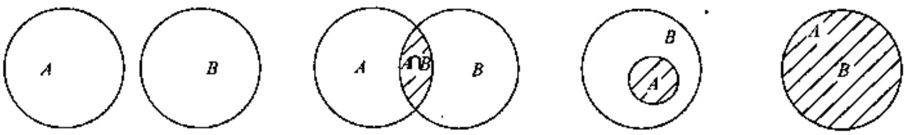
图 1-1

由同时属于集合 A 和 B 的所有元素组成的集合称为集合 A 和 B 的交集,记为

$$A\cap B=\{x|x\in A \text{ 且 } x\in B\}$$

例如,设 $A=\{a,b,c\}$,$B=\{b,c,d\}$,则 $A\cap B=\{b,c\}$.

集合 A 与集合 B 的交集 $A\cap B$ 可用图 1-2 中的阴影部分表示.



$A\cap B=\varnothing$ $A\cap B=A$ $A=B$

(1) (2) (3) (4)

图 1-2

设 I 为全集,A 是 I 的子集,由 I 中所有不属于 A 的元素组成的集合,称为集合 A 在集合 I 中的补集,记为 $\overline{A}$ 即

$$\overline{A}=\{x|x\in I \text{ 且 } x\notin A\}$$

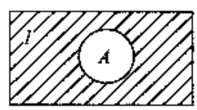


图 1-3

A 的补集 $\overline{A}$ 可用图 1-3 中的阴影部分表示.

关于集合的概念,必须注意以下两个问题:

(1)元素与集合的关系,只有属于"$\in$"或不属于"$\notin$"的关系;

(2)集合与集合的关系,只有"包含"或"相等"的关系.

2. 区间

在讨论问题时,所用到的集合常常是实数 R 的一些子集,而这些子集可用区间来表示变量的取值范围.

设 $a,b\in R$,且 $a<b$,那么有以下关系:

(1)满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的所有实数 x 的集合,称为闭区间,记为 $[a,b]$,即

$$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$$

如$[1,4]=\{x|1\leqslant x\leqslant 4\}$，$[-1,2]=\{x|-1\leqslant x\leqslant 2\}$.

(2)满足不等式$a<x<b$的所有实数x的集合，称为开区间，记为(a,b)，即

$$(a,b)=\{x|a<x<b\}$$

如$(-2,2)=\{x|-2<x<2\}$，$(-5,1)=\{x|-5<x<1\}$.

(3)满足不等式$a<x\leqslant b$的所有实数x的集合，称为半开区间，记为$(a,b]$，即

$$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$$

还有半开区间$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$. 如$(-2,0]=\{x|-2<x\leqslant 0\}$，$[-2,0)=\{x|-2\leqslant x<0\}$.

上述区间都是以有限数a,b为端点，故称为有限区间，而称$b-a$为区间的长度.

除了有限区间外，还有以下几类无限区间：

(1)$[a,+\infty)=\{x|a\leqslant x<+\infty\}=\{x|x\geqslant a\}$，$(a,+\infty)=\{x|a<x<+\infty\}=\{x|x>a\}$；

(2)$(-\infty,b]=\{x|-\infty<x\leqslant b\}=\{x|x\leqslant b\}$，$(-\infty,b)=\{x|-\infty<x<b\}=\{x|x<b\}$；

(3)$(-\infty,+\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}=R$，如$(1,+\infty)=\{x|x>1\}$，$(-\infty,-1]=\{x|x\leqslant -1\}$.

注意“$-\infty$”和“$+\infty$”分别读作负无穷大和正无穷大，它们只是个记号，不是一个数.

下面引入在高等数学中常用的以开区间形式定义的某点的“邻域”概念.

所谓点x_0的δ邻域，是指以x_0为中心，以2δ为长度的开区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$，记为$U(x_0,\delta)$，即$U(x_0,\delta)=\{x||x-x_0|<\delta\}$.

在x_0的δ邻域中去掉点x_0，所得集合记为$U(\hat{x}_0,\delta)$称为点x_0的空心δ邻域. 即$U(\hat{x}_0,\delta)=\{x|0<|x-x_0|<\delta\}$. 或用区间的并集表示$(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$.

例如，$U(3,1)=\{x||x-3|<1\}$表示点3的1邻域，它就是开区间$(2,4)$；

$U(\hat{2},1)=\{x|0<|x-2|<1\}$表示点2的空心1邻域，它是两个开区间的并集$(1,2)\cup(2,3)$.

1.1.2 函 数

1. 函数概念的引入

人们在观察研究某一现象或某一运动过程时，会遇到许多变量，这些变量并不是独立变化的，它们之间存在着依赖关系. 现在考虑几个具体例子.

例1 自由落体的运动规律为$h=\frac{1}{2}gt^2$. 式中，h为下降距离，t为时间，g为重力加速度.

该公式提出了在物体自由降落的过程中，距离h和时间t之间的依赖关系.

例2 圆的面积A与它的半径r之间的关系式为$A=\pi r^2$.

还可以举出其他变量间相互依赖关系的例子，在上面两个依赖关系中，有如下共同的特征：

(1)在这些变量中,有些量称为自变量,如时间 t、半径 r,它们有一定的取值范围,例 1 中时间 t 的变化范围为 $(0,T)$,例 2 中半径 r 的变化范围为 $(0,+\infty)$. 在依赖关系中,还有一些量是随着自变量的变化而变化的,称为因变量,如自由落体下降距离 h、面积 A.

(2)对自变量的变化范围内的每一个确定值,通过依赖关系,总能得到一个确定的因变量的值.

把这种特征抽象出来,便得到函数的概念.

2. 函数的定义

定义 1 设 x 和 y 是两个变量,若当变量 x 在非空数集 D 内任取一个数值 x,按照某个对应法则 f,总有唯一确定的数值 y 与之对应,则称变量 y 为变量 x 的函数,记为 $y=f(x)$. D 称为函数的定义域,x 称为自变量,y 称为因变量.

如果 x_0 是函数 $y=f(x)$的定义域中的一个值,则称函数 $y=f(x)$在点 x_0 有定义. 函数在点 x_0 的对应值称为函数在该点的函数值,记为 $f(x_0)$或 $y|_{x=x_0}$.

当自变量 x 在定义域内取每一个数值时,对应的函数值的全体称为函数的值域,记为 M. 通过函数的定义不难发现,确定一个函数,起决定作用的因素是:

(1)对应法则(规则)f(即因变量 y 对于自变量 x 的依存关系);

(2)定义域 D(即自变量 x 的变化范围).

如果两个函数的"对应法则 f"和"定义域"都相同,那么这两个函数就是相同的(或称相等的);否则就是不相同的. 因此,只要对应法则相同,定义域相同,那么这两个函数就表示同一个函数.

例 3 下列各对函数是否相同? 为什么?

(1) $f(x)=\lg x^2, g(x)=2\lg x$; (2) $f(x)=x, g(x)=\sqrt{x^2}$;

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}, g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$; (4) $f(x)=\sqrt{1-\cos^2 x}, g(x)=\sin x$.

解 (1)不相同. $D_1=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, $D_2=(0,+\infty)$,两个函数的定义域不同,因此 $f(x)$与 $g(x)$不相同.

(2)不相同. $f(-1)=-1, g(-1)=1$,两个函数的对应法则不同,所以 $f(x)$与 $g(x)$不相同.

(3)相同. 定义域均为 $(-\infty,+\infty)$,对应法则也相同,因此 $f(x)$与 $g(x)$相同.

(4)不相同. 虽然两个函数的定义域都是 $(-\infty,+\infty)$,但其对应法则不同,$f(x)$的值域 $M_1=[0,1]$, $g(x)$的值域 $M_2=[-1,1]$.

3. 函数的定义域

在研究函数时,必须注意它的定义域,在实际问题中,函数的定义域应根据问题的实际意义来确定,例如,圆的半径的变化范围为 $(0,+\infty)$. 对于用数学式子表示的函数,确定函数定义域的原则是使该数学式子的运算有意义.

例 4 求下列函数的定义域:

(1) $f(x)=\sqrt{9-x^2}$; (2) $f(x)=\lg\dfrac{x}{x-2}$; (3) $f(x)=\sqrt{1-x^2}+\dfrac{1}{x}$.

解 (1)在偶次根式中,被开方式必须大于等于零,所以有 $9-x^2\geqslant 0$,得 $-3\leqslant x\leqslant 3$,即定义域为 $[-3,3]$.

(2)要使 $f(x)$ 有意义,必须使 $\frac{x}{x-2}>0$,得 $x>2$ 或 $x<0$,即定义域为 $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$.

(3)对于 $f(x)$,当 $\begin{cases}1-x^2\geqslant 0\\ x\neq 0\end{cases}$ 时,得 $-1\leqslant x\leqslant 1$,且 $x\neq 0$,即定义域为 $[-1,0)\cup(0,1]$.

4. 分段函数

把定义域分成若干部分，函数关系用不同的式子分段表达的函数称为分段函数. 分段函数是高等数学中常见的一种函数,例如,绝对值函数可以表示为

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}.$$

例 5 如图 1-4 所示,符号函数 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$ 就是一个分段函数,它的定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$,值域为 $R=\{-1,0,1\}$.

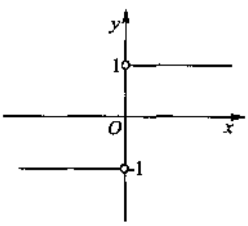


图 1-4

注意 分段函数是由几个关系式合起来表示的一个函数,而不是几个函数. 对于自变量 x 在定义域内的某个值,分段函数 y 只能确定唯一的值. 分段函数的定义域是各段自变量取值集合的并集.

例 6 设函数

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, & -4\leqslant x<1\\ 1, & 1\leqslant x<3\\ 5x-1, & x\geqslant 3\end{cases}$$

求 $f(-\pi)$, $f(1)$, $f(3.5)$ 及函数的定义域.

解 因为 $-\pi\in[-4,1)$,所以 $f(-\pi)=\sin(-\pi)=0$;因为 $1\in[1,3)$,所以 $f(1)=1$;因为 $3.5\in[3,+\infty)$,所以 $f(3.5)=5\times(3.5)-1=16.5$;函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-4,+\infty)$.

5. 隐函数

在某些问题中,函数关系并不是由一个解析式 $y=f(x)$ 给出的,而是由 x 与 y 所组成的一个方程式给出的,例如, $x+y^3-1=0$,因为当自变量 x 在 $(-\infty,+\infty)$ 内任取一个值时,变量 y 都有确定的值与之对应. 当 $x=-7$ 时,$y=2$; $x=0$ 时,$y=1$; $x=3$ 时, $y=-\sqrt[3]{2}$,等等. 所以这个方程确定 y 为 x 的函数,这样的函数称为隐函数.

一般地,如果在方程 $F(x,y)=0$ 中,当 x 在某一区间内任取一个值时,相应地总有满足该方程的唯一一个 y 值存在,从而确定一个函数 $y=f(x)$ 满足 $F(x,f(x))=0$,则称 $y=f(x)$ 是由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的隐函数.

相对来说,如果函数的解析式能写成 $y=f(x)$,则称该函数为显函数. 把一个隐函数化为显函数,称为隐函数的显化. 例如,从方程 $x+y^3-1=0$ 中解出 $y=\sqrt[3]{1-x}$,就是把隐函数化为显函数. 但是,隐函数的显化有时是困难的,甚至是不可能的. 例如,方程 $\sin(x+y)=2^y$ 所确定的隐函数就不能显化.

1.1.3 函数的几个简单特性

1. 函数的单调性

设函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内有定义，如果对于(a,b)内的任意两点 x_1,x_2. 当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称此函数 $f(x)$在(a,b)内是单调增加的；当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称此函数 $f(x)$在(a,b)内是单调减少的.

单调增加和单调减少的函数统称为单调函数，单调增区间和单调减区间统称为单调区间. 在单调增区间内，函数图形随 x 的增大而上升(如图 1-5 所示)；在单调减区间内，函数图形随 x 的增大而下降(如图 1-6 所示).

例如，函数 $y=x^2$ 在区间$(-\infty,0]$内单调减少，在区间$[0,+\infty)$内单调增加，$(-\infty,0]$，$[0,+\infty)$是它的单调区间.

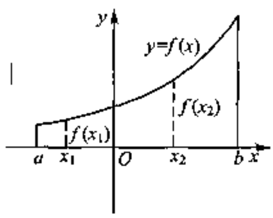


图 1-5

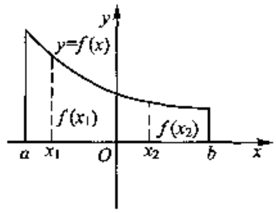


图 1-6

2. 函数的奇偶性

设函数 $y=f(x)$在集合 D 上有定义，如果对于任意 $x\in D$，恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$为偶函数；如果对于任意 $x\in D$，恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$为奇函数.

奇函数的图形关于原点对称(如图 1-7 所示)，偶函数的图形关于 y 轴对称(如图 1-8 所示).

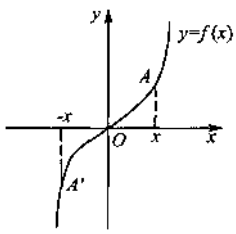


图 1-7

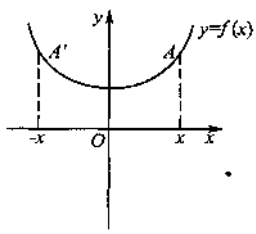


图 1-8

例 7 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=3x^4-5x^2+7$；　　(2) $f(x)=2x^2+\sin x$；

(3) $f(x)=\dfrac{1}{2}(a^{-x}-a^x)(a>0,a\neq 0)$；　　(4) $f(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$.

解 由函数奇偶性的定义可知：

(1)因为 $f(-x)=3(-x)^4-5(-x)^2+7=3x^4-5x^2+7=f(x)$，所以 $f(x)=3x^4-5x^2+7$ 是偶函数.

(2)因为 $f(-x)=2(-x)^2+\sin(-x)=2x^2-\sin x\neq f(x)$，所以 $f(x)=2x^2+\sin x$ 既非奇函数，也非偶函数.

(3)因为 $f(-x)=\frac{1}{2}(a^{-(-x)}-a^{-x})=-\frac{1}{2}(a^{-x}-a^{x})=-f(x)$，所以 $f(x)=\frac{1}{2}(a^{-x}-a^{x})$是奇函数.

(4)因为 $f(-x)=\log_a(-x+\sqrt{(-x)^2+1})=\log_a(-x+\sqrt{x^2+1})$

$$=\log_a\frac{(-x+\sqrt{x^2+1})(x+\sqrt{x^2+1})}{x+\sqrt{x^2+1}}=\log_a\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$$

$$=-\log_a(x+\sqrt{x^2+1})=-f(x)$$

所以，$f(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$是奇函数.

3. 函数的周期性

对于函数 $y=f(x)$，如果存在一个常数 $T\neq 0$，使得对于任意 $x\in D$，必有 $x\pm T\in D$，且恒有

$$f(x\pm T)=f(x)$$

则称 $f(x)$为周期函数，其中 T 称为函数 $f(x)$的周期，通常所说的周期是指它的最小正周期.

例如 $y=\sin x$，$y=\cot x$ 都是以 2π 为周期的周期函数；$y=\tan x$，$y=\cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数.

4. 函数的有界性

设函数 $y=f(x)$在区间 I 上有定义，如果存在一个正数 M，使得对于任意 $x\in I$，都有

$$|f(x)|\leqslant M$$

则称函数 $f(x)$在 I 上有界，也称 $f(x)$为 I 上的有界函数，否则称 $f(x)$在 I 上无界，也称 $f(x)$为 I 上的无界函数.

注意有界性是依于区间的. 例如函数 $y=\frac{1}{x}$ 在区间(0,1)内无界，但在区间(1,2)内有界.

1.1.4 反函数

定义 2 设函数 $y=f(x)$的定义域为 D，值域为 M，如果对于 M 中的每一个 y 值，在 D 中有使 $y=f(x)$的唯一的 x 值与之对应，则其对应法则记为 f^{-1}，这个定义在 M 上的函数 $x=f^{-1}(y)$称为 $y=f(x)$的反函数，或称它们互为反函数.

函数 $y=f(x)$，x 为自变量，y 为因变量，它的定义域为 D，值域为 M；函数 $x=f^{-1}(y)$，y 为自变量，x 为因变量，它的定义域为 M，值域为 D. 习惯上用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，因此将 $x=f^{-1}(y)$改写为以 x 为自变量、以 y 为因变量的函数 $y=f^{-1}(x)$，可以说 $y=f^{-1}(x)$是 $y=(x)$的反函数.

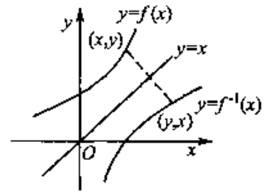


图 1-9

$y=f(x)$与 $y=f^{-1}(x)$的图形关于直线 $y=x$ 对称.(如图 1-9 所示)

例 8 求函数 $y=10^{x+1}$的反函数.

解 由 $y=10^{x+1}$得