全国硕士研究生入学考试考题排行榜系列丛书

出现频率最高的100种典型题型精解精练

数学二

◆ 研究常考题型是考试过关的捷径

◆ 实战预测试卷是加分致胜的法宝

汪志宏 王伦夫 彭宜青 编著

2009 考研必备

巧学、巧练、巧过关

清华大学出版社

全国硕士研究生入学考试考题排行榜系列丛书

出现频率最高的100种典型题型精解精练——数学二

汪志宏　王伦夫　彭宜青　编著

清华大学出版社
北　京

内 容 简 介

考研作为一种选拔性水平考试，试题规范，规律性很强，不少题型反复出现，把这些反复出现的题型按考试出现频率整理归类，并提供解题思路，可以帮助考生节省宝贵的复习时间，提高应试效率，对考生迎考大有帮助。本书正是基于这一思路，由资深考研辅导老师精心编写而成。

全书共分 6 章，第 1~5 章归纳整理了最常考的 100 种典型题型，具体内容包括：一元函数微分学、一元函数积分学、多元函数微分学与二重积分、微分方程、线性代数，第 6 章为全国硕士研究生入学考试数学二全真预测试题及其参考解答。每种题型分为三个板块：真题分析、题型点睛和即学即练。真题分析以历届考研真题为实例进行分析，旨在让读者彻底明白这类题型的解法；题型点睛浓缩了该题型的要点，并加以讲解与点评，便于读者理解与记忆；即学即练中作者设计了部分试题，让读者即学即练，即练即会，以达到举一反三的功效。本书附录给出了各章即学即练试题的详细解析与参考答案。

本书以广大考研读者为主要对象，帮助考生在短时间内获取较大收益，同时可作为考研辅导班的培训教材以及高等院校相关师生的教学参考书。

图书在版编目（CIP）数据

出现频率最高的 100 种典型题型精解精练. 数学. 2/汪志宏，王伦夫，彭宜青编著.
—北京：清华大学出版社，2008
（全国硕士研究生入学考试考题排行榜系列丛书）
ISBN 978-7-302-16931-4

Ⅰ.出…　Ⅱ.①汪…②王…③彭…　Ⅲ.高等数学—研究生—入学考试—解题
Ⅳ.G643-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 010114 号

责任编辑： 丁庆翔
责任校对： 孟宗芳
责任印制： 科　海
出版发行： 清华大学出版社
http://www.tup.com.cn
c-service@tup.tsinghua.edu.cn
社 总 机： 010-62770175
投稿咨询： 010-62772075
地　　址： 北京清华大学学研大厦 A 座
邮　　编： 100084
邮购热线： 010-62786544
客户服务： 010-62776969
印 装 者： 北京市艺辉印刷有限公司印刷
经　　销： 全国新华书店
开　　本： 185×260　**印　　张：** 15　**字　　数：** 364 千字
版　　次： 2008 年 2 月第 1 版　**印　　次：** 2008 年 2 月第 1 次印刷
印　　数： 1~5000
定　　价： 25.00 元

本书如存在文字不清、漏印以及缺页、倒页、脱页等印装质量问题，请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话：82896445　产品编号：027038-01

前　言

读考题排行榜　走成功捷径路

全国硕士研究生入学考试试题是广大工作在教学一线的骨干教师和参加命题的专家教授的智慧和劳动结晶，考试试题既反映了考试大纲对考生知识、能力等的要求，又蕴含着考研命题的基本原则和趋势，对于广大准备考研的考生而言，也是一笔宝贵财富。

为了给广大考生提供一套高效实用的试题导航标准应试教材，我们在广泛调研和充分论证的基础上，听取资深专家及众多考生的建议，组织编写了这套《全国硕士研究生入学考试考题排行榜系列丛书》，其目的是帮助考生在复习阶段，浓缩考试中出现频率最高的题型，“把书读薄”，以做到成竹在胸，引导考生在短时间内快速突破过关。

✦ 丛书书目

丛书第一批推出 8 本：

- ✧ 出现频率最高的 100 种典型题型精解精练——数学一
- ✧ 出现频率最高的 100 种典型题型精解精练——数学二
- ✧ 出现频率最高的 100 种典型题型精解精练——数学三
- ✧ 出现频率最高的 100 种典型题型精解精练——数学四
- ✧ 出现频率最高的 100 种典型题型精解精练——数据结构
- ✧ 出现频率最高的 100 种典型题型精解精练——C 语言程序设计
- ✧ 出现频率最高的 100 种典型题型精解精练——操作系统
- ✧ 出现频率最高的 100 种典型题型精解精练——电路

✦ 关于本书

本书通过深入分析历年真题特点，归纳整理出了硕士研究生“数学二”入学考试常考的 100 种题型，并依据考试大纲的章节顺序，将这 100 种题型分成 5 章进行解析与点评，便于考生更快地了解和掌握复习的重点，发现命题的规律，明确复习方向，节省宝贵的复习时间。由于某些题型几乎是年年出现，所以本书可以令考生更高效地复习与掌握必考题型与知识点。这也正是本书的最大特色：省时、高效、高命中率。

书中将全国几十所重点高校近 10 年考研试卷中的同一题型试题，归纳整理成 100 种高频题型（即 TOP1~TOP100），对每种题型进行了详细分析并给出参考解答，便于考生复习该内容时可以了解：这种题型考过什么样的题目，常与哪些知识点联系起来出题，从哪个角度命题，等等。每种题型具体分为如下三个板块：

- 真题分析。以重点高校近 10 年的考研真题为实例，分析解题思路，实际就是进行破题，最终找出解题方法。分析以后给出详细的解答，旨在让考生掌握解题方法和技巧，以及这些方法技巧在每个具体问题中的灵活运用，彻底明白这类题型的解法。
- 题型点睛。浓缩该题型的要点，给出该题型的相关知识点和解题的一般方法或步骤，并加以讲解分析，便于考生理解与记忆。
- 即学即练。给出部分试题，让考生学过“真题分析”和“题型点睛”后就进行做题练习，以便更快更好地掌握所练题型的相关知识点和解题的一般方法或步骤，以达到举一反三、触类旁通的功效。

本书还提供了 3 套全国硕士研究生入学考试数学二全真预测试题并附有具体的参考解答，可以供考生在考前实战演练。为了让考生及时掌握自己的学习效果，书中最后还给出了“即学即练”中试题的具体解答，以便考生自查。

✦ 读者对象

本套丛书以全国硕士研究生入学考试的考生为主要读者对象，特别适合希望在较短时间内取得较大进步的广大应试考生，也可作为相关考试培训班的培训教材，以及高校师生的教学参考书。

✦ 关于作者

丛书由一线教学及考试研究专家分工编写。作者均长期从事这方面的教学和研究工作，积累了丰富的经验，对研究生入学考试颇有研究（其中大多数编写者多年参加真题阅卷及相关培训与辅导工作）。本书由汪志宏、王伦夫和彭宜青执笔编写而成。参与本丛书组织、指导、编写、审校和资料收集的人员有（以姓氏笔画为序）：王伦夫、石雪梅、刘志高、孙建东、余雪勇、吴蕾、张宏、李千目、李勇智、李海、杜松、杨帮华、汪志宏、汪胡青、罗玮、费宁、徐倩、袁堃、彭宜青、葛武滇等，在此对诸位作者付出的辛勤劳动表示衷心的感谢。

✦ 特别致谢

在此，首先对丛书所选用的参考文献的著作者，以及丛书所引用试题的出题老师和相关单位表示真诚的感谢。

✦ 互动交流

由于时间仓促，书中不妥之处，敬请广大读者批评指正。读者的进步，是我们最大的心愿。您如果发现书中有任何疑惑之处，请与我们交流。

作者的联系方式：iteditor@126.com。

出版社的联系方式：feedback@khp.com.cn

作者

2008 年 1 月

目　录

第 1 章　一元函数微分学

TOP1：求复合函数的表达式

【真题分析】

【真题 1】（2001, 4 分）设 $f(x)=\begin{cases}1 & |x|\leqslant 1,\\ 0 & |x|>1,\end{cases}$ 则 $f\{f[f(x)]\}$ 等于

（A）0　　　　（B）1

（C）$=\begin{cases}1 & |x|\leqslant 1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$　　　　（D）$=\begin{cases}0 & |x|\leqslant 1\\ 1 & |x|>1\end{cases}$

【　　】

分析：按复合过程逐步替换即可.

解答：因 $f[f(x)]=\begin{cases}1 & |f(x)|\leqslant 1,\\ 0 & |f(x)|>1,\end{cases}$ 而由 $f(x)=\begin{cases}1 & |x|\leqslant 1,\\ 0 & |x|>1,\end{cases}$ 可知 $|f(x)|\leqslant 1$，从而 $f[f(x)]=1$，因此 $f\{f[f(x)]\}=1$，故应选（B）.

【真题 2】（2003, 4 分）已知 $y=\dfrac{x}{\ln x}$ 是微分方程 $y'=\dfrac{y}{x}+\varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)$ 的解，则 $\varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)$ 的表达式为

（A）$-\dfrac{y^2}{x^2}$　　　　（B）$\dfrac{y^2}{x^2}$

（C）$-\dfrac{x^2}{y^2}$　　　　（D）$\dfrac{x^2}{y^2}$

【　　】

分析：将 $y=\dfrac{x}{\ln x}$ 代入题设微分方程再利用简单的复合函数运算求解即可.

解答：将 $y=\dfrac{x}{\ln x}$ 代入微分方程 $y'=\dfrac{y}{x}+\varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)$，得

$$\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}=\frac{1}{\ln x}+\varphi(\ln x)$$

即 $\varphi(\ln x)=-\dfrac{1}{\ln^2 x}$.

令$\ln x=u$，得$\varphi(u)=-\frac{1}{u^2}$，从而$\varphi\left(\frac{x}{y}\right)=-\frac{y^2}{x^2}$，故应选（A）.

【题型点睛】

1．复合函数的定义.

设函数$y=f(u)$的定义域为D_1，函数$u=g(x)$在D上有定义且$g(D)\subset D_1$，则函数$y=f[g(x)]$，$x\in D$称为由函数$u=g(x)$和函数$y=f(u)$构成的复合函数，它的定义域为D，变量u称为中间变量. 函数g与函数f构成的复合函数通常记为$f\circ g$，即$(f\circ g)(x)=f[g(x)]$.

2．g与f构成复合函数$f\circ g$的条件：

函数g在D上的值域$g(D)$必须含在f的定义域D_f内，即$g(D)\subset D_f$，否则，不能构成复合函数.

3．求函数$y=f(x)$和$y=g(x)$复合的一般方法：

将$g(x)$代换$y=f(x)$里的自变量x，注意$y=g(x)$值域是$y=f(x)$定义域的子集，同时确定定义域，则$y=f[g(x)]$就是所求.

【即学即练】

1.（2004, 4分）设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有定义，在区间$[0, 2]$上$f(x)=x(x^2-4)$. 若对任意的x都满足$f(x)=k\,f(x+2)$，其中k为常数，写出$f(x)$在$[-2, 0)$上的表达式.

2．设$f(x)=\begin{cases}1 & |x|<1,\\ 0 & |x|=1,\\ -1 & |x|>1,\end{cases}$ $g(x)=\mathrm{e}^x$，求$f(g(x))$和$g(f(x))$.

TOP2：求1^∞型极限

【真题分析】

【真题1】（2002, 7分）已知函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上可导，$f(x)>0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$，且满足

$\lim\limits_{h\to0}\left[\frac{f(x+hx)}{f(x)}\right]^{\frac{1}{h}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$，求$f(x)$.

分析：先由题设条件及导数的定义导出微分方程，解之即可.

解答：因$\lim\limits_{h\to0}\left[\frac{f(x+hx)}{f(x)}\right]^{\frac{1}{h}}=\lim\limits_{h\to0}\mathrm{e}^{\frac{1}{h}\ln\frac{f(x+hx)}{f(x)}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h}\ln\frac{f(x+hx)}{f(x)}}$，而

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\ln\frac{f(x+hx)}{f(x)}=\lim_{h\to0}\frac{\ln f(x+hx)-\ln f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{x[\ln f(x+hx)-\ln f(x)]}{hx}$$
$$=x[\ln f(x)]'$$

故
$$\lim_{h\to0}\left[\frac{f(x+hx)}{f(x)}\right]^{\frac{1}{h}}=\mathrm{e}^{x[\ln f(x)]'}$$

从而由已知条件可得$\mathrm{e}^{x[\ln f(x)]'}=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$，即$x[\ln f(x)]'=\dfrac{1}{x}$，$[\ln f(x)]'=\dfrac{1}{x^2}$.

于是$\ln f(x)=-\dfrac{1}{x}+\ln C$，而$f(x)>0,\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$，所以
$$\lim_{x\to+\infty}\ln f(x)=\ln\lim_{x\to+\infty}f(x)=\ln C=\ln1$$

即得$C=1$，因此$f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$.

【题型点睛】

1．利用重要极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$求$1^\infty$型数列未定式极限的方法：

（1）将数列未定式化为：$\lim\limits_{n\to\infty}\left\{[1+f(n)]^{\frac{1}{f(n)}}\right\}^{\varphi(n)}$ （$n\to\infty$时，$f(n)\to0$，$\varphi(n)\to a$）；

（2）原极限等于e^a.

2．利用洛必达法则求1^∞型数列未定式极限的一般步骤：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$.

（1）将n换成x，有新的未定式$\lim\limits_{x\to\infty}\left\{[1+f(x)]^{\frac{1}{f(x)}}\right\}^{\varphi(x)}$；

（2）再取自然对数，化为$\dfrac{0}{0}$或$\dfrac{\infty}{\infty}$型未定式；

（3）求出新未定式的极限A；

（4）$\lim\limits_{x\to\infty}\left\{[1+f(x)]^{\frac{1}{f(x)}}\right\}^{\varphi(x)}=\mathrm{e}^A$，原极限等于$\mathrm{e}^A$.

【即学即练】

1．（2001, 7分）求$\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$，记此极限为$f(x)$，求$f(x)$的间断点并指出其类型.

TOP3：求$\frac{0}{0}$型极限

【真题分析】

【真题1】（2005, 10分）设函数$f(x)$连续，且$f(0)\neq 0$，求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}$.

分析：利用洛必达法则与积分中值定理求解.

解答：令$x-t=u$，则$\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t=\int_x^0 f(u)(-\mathrm{d}u)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$，故

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}=\lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+xf(x)-xf(x)}{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+xf(x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+xf(x)}$$

利用积分中值定理，有$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+xf(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(\xi)}{xf(\xi)+xf(x)}$，$\xi$位于0与$x$之间.

所以
$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\,\mathrm{d}t}=\lim_{x\to 0}\frac{xf(\xi)}{xf(\xi)+xf(x)}=\frac{f(0)}{f(0)+f(0)}=\frac{1}{2}$$

【真题2】（2001, 3分）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}=$______.

分析：将分子有理化即可.

解答：
$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{2(1-x)}{(x-1)(x+2)}\cdot\frac{1}{\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x}}$$

$$=-\frac{2}{2\sqrt{2}}\times\frac{1}{1+2}=-\frac{\sqrt{2}}{6}$$

【真题3】（2002, 3分）设$y=y(x)$是二阶线性常系数微分方程$y''+py'+qy=\mathrm{e}^{3x}$满足初始条件$y(0)=y'(0)=0$的特解，则当$x\to 0$时，函数$\dfrac{\ln(1+x^2)}{y(x)}$的极限

（A）不存在　　（B）等于1　　（C）等于2　　（D）等于3

【　】

分析：利用洛必达法则及等价无穷小代换求解.

解答：由 $y''+py'+qy=e^{3x}$ 及 $y(0)=y'(0)=0$ 可知 $y''(0)=1$，于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{y(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{y(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{y'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{y''(x)}=2$$

故应选（C）.

【题型点睛】

1．求未定式 $\frac{0}{0}$ 型的极限可以利用洛必达法则，利用洛必达法则求该极限的一般步骤：

（1）判断未定式是否是 $\frac{0}{0}$ 型，若不是，化成该型；

（2）分子、分母同时求导，适当化简再判断是否是 $\frac{0}{0}$ 型，若不是，化成该型；

（3）最后得出结果.

2．其他类型的未定式 $0\cdot\infty$ 、$\infty-\infty$ 型可利用变量代换、通分等方法直接化为 $\frac{0}{0}$ 型，再计算.

3．在利用洛必达法则求未定式 $\frac{0}{0}$ 型的极限时，有时同等价无穷小量结合起来，可大大简化运算，如 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(e^x-1)\tan x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}=1$.

4．特殊的可以利用重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，如 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x}=1$.

5．还可以采用消除零因子法解题，如极限 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x+1}=\frac{0}{2}=0$.

采取消除零因子法求 $\frac{0}{0}$ 型极限，一般将 $f(x)$ 的分子、分母同时除以零因子，或 $\frac{1}{f(x)}$ 的分子、分母同时除以零因子，使得最终能用四则运算.

6．其他方法还有：

采用先分母有理化再消除零因子的方法，如真题2很多情况下解题是多种方法的综合，这需要在解题过程中灵活运用.

【即学即练】

1．（1999, 5分）求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$.

2.（1998, 3 分）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=$______.

3.（2000, 3 分）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-x}{\ln(1+2x^3)}=$______.

TOP4：求 0 • ∞型极限

【真题分析】

【真题 1】（2004, 4 分）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$.

分析：对于幂指函数来说首先要将其恒等变形化为指数函数，这样可将原极限化为 $\dfrac{0}{0}$ 型基本型，再利用洛必达法则并结合等价无穷小代换求解.

解答：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x\ln\frac{2+\cos x}{3}}-1}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln\dfrac{2+\cos x}{3}}{x^3}$（$e^u-1\sim u,u\to 0$ 时）

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(2+\cos x)-\ln 3}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{2+\cos x}\cdot(-\sin x)}{2x}$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{2+\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}=-\frac{1}{6}$$

【题型点睛】

1．计算 $\infty\cdot 0$ 型未定式的一般方法：

（1）将 $\infty\cdot 0$ 型未定式直接化为 $\dfrac{0}{0}$ 型或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型，或利用等价无穷小代换后再化为 $\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型；

（2）利用洛必达法则计算出结果.

2．可以先化为 $\dfrac{0}{0}$ 型或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型未定式，再采取消除零因子等求 $\dfrac{0}{0}$ 型或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型未定式的方法求出极限.

【即学即练】

1．极限 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{2x}{x^2+1}=$______.

TOP5：利用麦克劳林公式求函数极限

【真题分析】

【真题1】（2007, 4分）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-\sin x}{x^3}=$______.

分析：利用带有皮亚诺余项的麦克劳林公式可快速求解.

解答：因 $x\to 0$ 时，$\arctan x = x-\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)$，$\sin x = x-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)$，

故 $\arctan x-\sin x=-\dfrac{1}{6}x^3+o(x^3)$，从而原极限$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}{x^3}=-\dfrac{1}{6}$.

【题型点睛】

1. 带皮亚诺余项的麦克劳林公式：

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$$

2. 高阶无穷小运算的结论：
（1）有限个无穷小的和也是无穷小；
（2）有界函数与无穷小的乘积是无穷小；
（3）常数与无穷小的乘积是无穷小；
（4）有限个无穷小的乘积也是无穷小.

3. 利用麦克劳林公式求函数极限的一般步骤：
（1）根据分子或分母，确定要展开函数的阶数；
（2）利用高阶无穷小的运算化简分子或分母；
（3）求出新的简单极限.

【即学即练】

1.（2000, 3分）若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$ 为

（A）0　　（B）6
（C）36　　（D）∞

【　　】

TOP6：函数有界性、奇偶性和周期性的判断或证明

【真题分析】

【真题 1】（2004, 4 分）设 $f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin t|\,dt$，证明 $f(x)$ 是以 π 为周期的周期函数；

分析：按函数周期性的定义证明.

解答：令 $t=u+\pi$，则

$$f(x+\pi)=\int_{x+\pi}^{x+\frac{3}{2}\pi}|\sin t|\,dt=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin(u+\pi)|\,du$$

$$=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin u|\,du=f(x)$$

故 $f(x)$ 是以 π 为周期的周期函数.

【题型点睛】

1．函数 $f(x)$“在数集 X 上”是有界还是无界：

若单纯说函数有界或无界，则指的是函数在它的定义域内有界还是无界.

2．如果对于任一 $x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；如果对于任一 $x\in D$，有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.

（1）奇函数或偶函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称（即若 $x\in D$，则 $-x\in D$）.

（2）偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称.

3．周期函数的定义：

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个正数 l，使得对于任一 $x\in D$ 均有 $(x\pm l)\in D$，且 $f(x+l)=f(x)$，则称 $f(x)$为周期函数，l 称为 $f(x)$的周期.

求函数的周期一般都是指求其最小正周期.

4．这些函数性质的判断都可直接利用上述定义.

【即学即练】

1．“$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 是有界函数”，这种说法正确吗？

TOP7：无穷小的比较或确定无穷小的阶或根据无穷小的阶反求参数

【真题分析】

【真题 1】（2006, 10 分）试确定常数 A,B,C 的值，使得