



出现频率最高的

100种

典型题型 精解精练

数学二

- ◆ 研究常考题型是考试过关的捷径
- ◆ 实战预测试卷是加分致胜的法宝

汪志宏 王伦夫 彭宜青 编著

2009

考研必备

巧学、巧练、巧过关



清华大学出版社

G643.6/7

:2

2008

全国硕士研究生入学考试考

出现频率最高的 100 种典型题型

精解精练——数学二

汪志宏 王伦夫 彭宜青 编著

清华大学出版社

北 京

内 容 简 介

考研作为一种选拔性水平考试,试题规范,规律性很强,不少题型反复出现,把这些反复出现的题型按考试出现频率整理归类,并提供解题思路,可以帮助考生节省宝贵的复习时间,提高应试效率,对考生迎考大有帮助。本书正是基于这一思路,由资深考研辅导老师精心编写而成。

全书共分6章,第1~5章归纳整理了最常考的100种典型题型,具体内容包括:一元函数微分学、一元函数积分学、多元函数微分学与二重积分、微分方程、线性代数,第6章为全国硕士研究生入学考试数学二全真预测试题及其参考解答。每种题型分为三个板块:真题分析、题型点睛和即学即练。真题分析以历届考研真题为实例进行分析,旨在让读者彻底明白这类题型的解法;题型点睛浓缩了该题型的要点,并加以讲解与点评,便于读者理解与记忆;即学即练中作者设计了部分试题,让读者即学即练,即练即会,以达到举一反三的功效。本书附录给出了各章即学即练试题的详细解析与参考答案。

本书以广大考研读者为主要对象,帮助考生在短时间内获取较大收益,同时可作为考研辅导班的培训教材以及高等院校相关师生的教学参考书。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13501256678 13801310933

图书在版编目(CIP)数据

出现频率最高的100种典型题型精解精练. 数学. 2/汪志宏, 王伦夫, 彭宜青编著.
—北京:清华大学出版社, 2008

(全国硕士研究生入学考试考题排行榜系列丛书)

ISBN 978-7-302-16931-4

I. 出… II. ①汪…②王…③彭… III. 高等数学—研究生—入学考试—解题
IV. G643-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008) 第 010114 号

责任编辑:丁庆翔

责任校对:孟宗芳

责任印制:科海

出版发行:清华大学出版社

<http://www.tup.com.cn>

c-service@tup.tsinghua.edu.cn

社总机:010-62770175

投稿咨询:010-62772075

地址:北京清华大学学研大厦A座

邮编:100084

邮购热线:010-62786544

客户服务:010-62776969

印装者:北京市艺辉印刷有限公司印刷

经销:全国新华书店

开本:185×260 印张:15

字数:364千字

版次:2008年2月第1版

印次:2008年2月第1次印刷

印数:1~5000

定价:25.00元

本书如存在文字不清、漏印以及缺页、倒页、脱页等印装质量问题,请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话:82896445 产品编号:027038-01

前 言

读考题排行榜 走成功捷径路

全国硕士研究生入学考试试题是广大工作在教学一线的骨干教师和参加命题的专家教授的智慧 and 劳动结晶, 考试试题既反映了考试大纲对考生知识、能力等的要求, 又蕴含着考研命题的基本原则和趋势, 对于广大准备考研的考生而言, 也是一笔宝贵财富。

为了给广大考生提供一套高效实用的试题导航标准应试教材, 我们在广泛调研和充分论证的基础上, 听取资深专家及众多考生的建议, 组织编写了这套《全国硕士研究生入学考试考题排行榜系列丛书》, 其目的是帮助考生在复习阶段, 浓缩考试中出现频率最高的题型, “把书读薄”, 以做到成竹在胸, 引导考生在短时间内快速突破过关。

◆ 丛书书目

丛书第一批推出 8 本:

- ◇ 出现频率最高的 100 种典型题型精解精练——数学一
- ◇ 出现频率最高的 100 种典型题型精解精练——数学二
- ◇ 出现频率最高的 100 种典型题型精解精练——数学三
- ◇ 出现频率最高的 100 种典型题型精解精练——数学四
- ◇ 出现频率最高的 100 种典型题型精解精练——数据结构
- ◇ 出现频率最高的 100 种典型题型精解精练——C 语言程序设计
- ◇ 出现频率最高的 100 种典型题型精解精练——操作系统
- ◇ 出现频率最高的 100 种典型题型精解精练——电路

◆ 关于本书

本书通过深入分析历年真题特点, 归纳整理出了硕士研究生“数学二”入学考试常考的 100 种题型, 并依据考试大纲的章节顺序, 将这 100 种题型分成 5 章进行解析与点评, 便于考生更快地了解和掌握复习的重点, 发现命题的规律, 明确复习方向, 节省宝贵的复习时间。由于某些题型几乎是年年出现, 所以本书可以令考生更高效地复习与掌握必考题型与知识点。这也正是本书的最大特色: 省时、高效、高命中率。

书中将全国几十所重点高校近 10 年考研试卷中的同一题型试题, 归纳整理成 100 种高频题型 (即 TOP1~TOP100), 对每种题型进行了详细分析并给出参考解答, 便于考生复习该内容时可以了解: 这种题型考过什么样的题目, 常与哪些知识点联系起来出题, 从哪个角度命题, 等等。每种题型具体分为如下三个板块:

- 真题分析。以重点高校近 10 年的考研真题为实例，分析解题思路，实际就是进行破题，最终找出解题方法。分析以后给出详细的解答，旨在让考生掌握解题方法和技巧，以及这些方法技巧在每个具体问题中的灵活运用，彻底明白这类题型的解法。
- 题型点睛。浓缩该题型的要点，给出该题型的相关知识点和解题的一般方法或步骤，并加以讲解分析，便于考生理解与记忆。
- 即学即练。给出部分试题，让考生学过“真题分析”和“题型点睛”后就进行做题练习，以便更快更好地掌握所练题型的相关知识点和解题的一般方法或步骤，以达到举一反三、触类旁通的功效。

本书还提供了 3 套全国硕士研究生入学考试数学二全真预测试题并附有具体的参考解答，可以供考生在考前实战演练。为了让考生及时掌握自己的学习效果，书中最后还给出了“即学即练”中试题的具体解答，以便考生自查。

◆ 读者对象

本套丛书以全国硕士研究生入学考试的考生为主要读者对象，特别适合希望在较短时间内取得较大进步的广大应试考生，也可作为相关考试培训班的培训教材，以及高校师生的教学参考书。

◆ 关于作者

丛书由一线教学及考试研究专家分工编写。作者均长期从事这方面的教学和研究工作，积累了丰富的经验，对研究生入学考试颇有研究（其中大多数编写者多年参加真题阅卷及相关培训与辅导工作）。本书由汪志宏、王伦夫和彭宜青执笔编写而成。参与本丛书组织、指导、编写、审校和资料收集的人员有（以姓氏笔画为序）：王伦夫、石雪梅、刘志高、孙建东、余雪勇、吴蕾、张宏、李千目、李勇智、李海、杜松、杨帮华、汪志宏、汪胡青、罗玮、费宁、徐倩、袁堃、彭宜青、葛武滇等，在此对诸位作者付出的辛勤劳动表示衷心的感谢。

◆ 特别致谢

在此，首先对丛书所选用的参考文献的著作者，以及丛书所引用试题的出题老师和相关单位表示真诚的感谢。

◆ 互动交流

由于时间仓促，书中不妥之处，敬请广大读者批评指正。读者的进步，是我们最大的心愿。您如果发现书中有任何疑惑之处，请与我们交流。

作者的联系方式：iteditor@126.com。

出版社的联系方式：feedback@khp.com.cn

作者

2008 年 1 月

目 录

第 1 章 一元函数微分学	1
TOP1: 求复合函数的表达式	1
TOP2: 求 1^∞ 型极限	2
TOP3: 求 $\frac{0}{0}$ 型极限	4
TOP4: 求 $0 \cdot \infty$ 型极限	6
TOP5: 利用麦克劳林公式求函数极限	7
TOP6: 函数有界性、奇偶性和周期性的判断或证明	8
TOP7: 无穷小的比较或确定无穷小的阶或根据无穷小的阶反求参数	8
TOP8: 判断等价无穷小以及利用等价无穷小反求参数	11
TOP9: 数列极限的判定或求解或证明	12
TOP10: 利用单调有界定理判断数列极限存在及求极限	13
TOP11: 将和式的数列极限用定积分表示	14
TOP12: 函数间断点的讨论或判定	15
TOP13: 已知函数连续性, 反求函数中的参数	17
TOP14: 已知函数极限存在, 反求函数中的参数	18
TOP15: 讨论函数的连续性	18
TOP16: 求函数的值域	20
TOP17: 与函数微分的概念和性质相关的命题	21
TOP18: 函数在一点可导的判定或求解	22
TOP19: 求复合函数的导数或微分	24
TOP20: 求隐函数的导数或微分	25
TOP21: 求参数方程所确定函数的导数	26
TOP22: 利用泰勒公式求函数在一点的高阶导数	27
TOP23: 求函数在一点的麦克劳林展开式	28
TOP24: 函数的凹凸性判定与凹凸区间的求解	29
TOP25: 函数的极值点、拐点的判定	30
TOP26: 函数的最值求解	32
TOP27: 函数及其导函数的关系或图形的判定	34
TOP28: 绝对值函数不可导点个数的求解	36
TOP29: 利用单调性证明不等式	36
TOP30: 小邻域内不等式的证明或判定	38



TOP31: 利用罗尔定理证明等式或不等式.....	39
TOP32: 利用拉格朗日中值定理或柯西中值定理证明等式或不等式.....	40
TOP33: 利用闭区间上连续函数性质证明某个式子成立.....	42
TOP34: 函数单调性的判断或增减区间的求解.....	43
TOP35: 方程根的判定或唯一性证明	44
TOP36: 求平面曲线在一点的切线方程或法线方程.....	45
TOP37: 求曲线的渐近线方程	48
第 2 章 一元函数积分学	50
TOP38: 利用第一换元法求不定积分	50
TOP39: 利用第二换元法求不定积分	51
TOP40: 利用第二换元法与分部积分法综合求不定积分.....	52
TOP41: 函数的原函数性质的判定	54
TOP42: 求绝对值函数或分段函数的定积分.....	55
TOP43: 利用换元法与分部积分法求定积分.....	56
TOP44: 利用定积分的几何意义求定积分.....	58
TOP45: 定积分的比较	59
TOP46: 求变上限积分的导数或定积分中含有参数的导数.....	61
TOP47: 求解含有积分上限函数的方程.....	62
TOP48: 求含未知函数的积分	64
TOP49: 求无界函数的广义积分	65
TOP50: 求无穷限的广义积分	66
TOP51: 求曲线的曲率或曲率半径及其相关问题.....	68
TOP52: 求曲线的弧长	69
TOP53: 利用直角坐标求平面图形的面积.....	71
TOP54: 利用极坐标求平面图形的面积.....	72
TOP55: 求旋转体的体积或立体的体积.....	73
TOP56: 求函数的平均值	75
TOP57: 定积分在物理上的应用——求变力做功或压力等	76
TOP58: 利用夹逼准则定理证明含积分的不等式.....	78
第 3 章 多元函数微分学与二重积分	80
TOP59: 讨论二元函数连续、偏导数、全微分等基本概念.....	80
TOP60: 求一般初等多元复合函数的一阶偏导数.....	81
TOP61: 求抽象多元复合函数的一阶偏导数.....	82
TOP62: 求抽象多元复合函数的二阶偏导数.....	83
TOP63: 多元函数极值最值的判定或求解.....	84
TOP64: 利用直角坐标求二重积分	86

TOP65: 利用极坐标求二重积分	89
TOP66: 二重积分的累次积分表示或交换	90
第 4 章 微分方程	93
TOP67: 求可分离变量及可化成可分离变量微分方程的通解或特解	93
TOP68: 求全微分方程的通解或特解	94
TOP69: 求一阶线性微分方程的通解或特解	95
TOP70: 求 $f(x)=e^{\lambda x} P_m(x)$ 的二阶齐次或非齐次线性微分方程的通解或特解	96
TOP71: 求 $f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos \omega x+P_n(x)\sin \omega x]$ 的二阶齐次或非齐次线性微分方程的通解或特解	97
TOP72: 求 $y''=f(y,y')$ 可降阶的微分方程的通解或特解	98
TOP73: 求 $y''=f(x,y')$ 型可降阶微分方程的通解或特解	99
TOP74: 已知二阶线性微分方程的解, 反求微分方程	100
TOP75: 利用代换化简微分方程并求通解或特解	101
TOP76: 利用微分方程求解物理应用题	103
TOP77: 利用微分方程求解几何应用题	104
第 5 章 线性代数	106
TOP78: 行列式的计算	106
TOP79: 求方阵的行列式	108
TOP80: 逆矩阵计算	109
TOP81: 解矩阵方程或求矩阵表达式	112
TOP82: 伴随矩阵计算	114
TOP83: 矩阵的初等变换与初等矩阵	116
TOP84: 矩阵秩的问题	118
TOP85: 利用定义判断向量组线性相关与线性无关	119
TOP86: 利用定理判断向量组线性相关与线性无关	121
TOP87: 讨论含参变量的向量组的线性相关性	123
TOP88: 求向量组的极大线性无关组	124
TOP89: 向量的线性表出或含参变量之向量的线性表出	125
TOP90: 齐次线性方程组基础解系求解或判定	129
TOP91: 根据解或解的情况, 求线性方程组或其中的参数	131
TOP92: 求线性方程组的通解	133
TOP93: 含参数线性方程组求解	135
TOP94: 线性方程组应用	137
TOP95: 线性方程组公共解的问题	139
TOP96: 求矩阵的特征值或特征向量及其逆问题	141
TOP97: 已知含参数矩阵的特征向量或特征值或特征方程, 求参数	143

TOP98: 利用逆阵将矩阵对角化	144
TOP99: 利用正交阵将矩阵对角化	146
TOP100: 矩阵相似、合同关系的判定问题.....	147
第 6 章 全国硕士研究生入学考试数学二全真预测试题及其参考解答	149
硕士研究生入学考试数学二全真预测试题一	149
硕士研究生入学考试数学二全真预测试题一参考解答	151
硕士研究生入学考试数学二全真预测试题二	158
硕士研究生入学考试数学二全真预测试题二参考解答	160
硕士研究生入学考试数学二全真预测试题三	166
硕士研究生入学考试数学二全真预测试题三参考解答	168
附录 即学即练解答.....	174
参考文献	232

第1章 一元函数微分学

TOP1: 求复合函数的表达式

【真题分析】

【真题1】(2001, 4分) 设 $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1, \\ 0 & |x| > 1, \end{cases}$ 则 $f\{f[f(x)]\}$ 等于

(A) 0

(B) 1

(C) $= \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$

(D) $= \begin{cases} 0 & |x| \leq 1 \\ 1 & |x| > 1 \end{cases}$

分析: 按复合过程逐步替换即可.

解答: 因 $f[f(x)] = \begin{cases} 1 & |f(x)| \leq 1, \\ 0 & |f(x)| > 1, \end{cases}$ 而由 $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1, \\ 0 & |x| > 1, \end{cases}$ 可知 $|f(x)| \leq 1$, 从而 $f[f(x)] = 1$, 因此 $f\{f[f(x)]\} = 1$, 故应选 (B).

【真题2】(2003, 4分) 已知 $y = \frac{x}{\ln x}$ 是微分方程 $y' = \frac{y}{x} + \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ 的解, 则 $\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ 的表达式为

(A) $-\frac{y^2}{x^2}$

(B) $\frac{y^2}{x^2}$

(C) $-\frac{x^2}{y^2}$

(D) $\frac{x^2}{y^2}$

分析: 将 $y = \frac{x}{\ln x}$ 代入题设微分方程再利用简单的复合函数运算求解即可.

解答: 将 $y = \frac{x}{\ln x}$ 代入微分方程 $y' = \frac{y}{x} + \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$, 得

$$\frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} = \frac{1}{\ln x} + \varphi(\ln x)$$

即 $\varphi(\ln x) = -\frac{1}{\ln^2 x}$.



令 $\ln x = u$, 得 $\varphi(u) = -\frac{1}{u^2}$, 从而 $\varphi\left(\frac{x}{y}\right) = -\frac{y^2}{x^2}$, 故应选 (A).

【题型点睛】

1. 复合函数的定义.

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1 , 函数 $u=g(x)$ 在 D 上有定义且 $g(D) \subset D_1$, 则函数 $y=f[g(x)]$, $x \in D$ 称为由函数 $u=g(x)$ 和函数 $y=f(u)$ 构成的复合函数, 它的定义域为 D , 变量 u 称为中间变量. 函数 g 与函数 f 构成的复合函数通常记为 $f \circ g$, 即 $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$.

2. g 与 f 构成复合函数 $f \circ g$ 的条件:

函数 g 在 D 上的值域 $g(D)$ 必须含在 f 的定义域 D_f 内, 即 $g(D) \subset D_f$, 否则, 不能构成复合函数.

3. 求函数 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 复合的一般方法:

将 $g(x)$ 代换 $y=f(x)$ 里的自变量 x , 注意 $y=g(x)$ 值域是 $y=f(x)$ 定义域的子集, 同时确定定义域, 则 $y=f[g(x)]$ 就是所求.

【即学即练】

1. (2004, 4 分) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义, 在区间 $[0, 2]$ 上 $f(x) = x(x^2 - 4)$. 若对任意的 x 都满足 $f(x) = k f(x+2)$, 其中 k 为常数, 写出 $f(x)$ 在 $[-2, 0)$ 上的表达式.

2. 设 $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1, \\ 0 & |x| = 1, \\ -1 & |x| > 1, \end{cases}$ $g(x) = e^x$, 求 $f(g(x))$ 和 $g(f(x))$.

TOP2: 求 1^∞ 型极限

【真题分析】

【真题 1】(2002, 7 分) 已知函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上可导, $f(x) > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, 且满足

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x+hx)}{f(x)} \right]^{\frac{1}{h}} = e^{\frac{1}{x}}, \text{ 求 } f(x).$$

分析: 先由题设条件及导数的定义导出微分方程, 解之即可.

解答: 因 $\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x+hx)}{f(x)} \right]^{\frac{1}{h}} = \lim_{h \rightarrow 0} e^{\frac{1}{h} \ln \frac{f(x+hx)}{f(x)}} = e^{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln \frac{f(x+hx)}{f(x)}}$, 而

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln \frac{f(x+hx)}{f(x)} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln f(x+hx) - \ln f(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x[\ln f(x+hx) - \ln f(x)]}{hx} \\
 &= x[\ln f(x)]'
 \end{aligned}$$

故

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x+hx)}{f(x)} \right]^{\frac{1}{h}} = e^{x[\ln f(x)]'}$$

从而由已知条件可得 $e^{x[\ln f(x)]'} = e^{\frac{1}{x}}$, 即 $x[\ln f(x)]' = \frac{1}{x}$, $[\ln f(x)]' = \frac{1}{x^2}$.

于是 $\ln f(x) = -\frac{1}{x} + \ln C$, 而 $f(x) > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln f(x) = \ln \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ln C = \ln 1$$

即得 $C=1$, 因此 $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$.

【题型点睛】

1. 利用重要极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ 求 1^∞ 型数列未定式极限的方法:

(1) 将数列未定式化为: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ [1 + f(n)]^{\frac{1}{f(n)}} \right\}^{\varphi(n)}$ ($n \rightarrow \infty$ 时, $f(n) \rightarrow 0$, $\varphi(n) \rightarrow a$);

(2) 原极限等于 e^a .

2. 利用洛必达法则求 1^∞ 型数列未定式极限的一般步骤: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

(1) 将 n 换成 x , 有新的未定式 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ [1 + f(x)]^{\frac{1}{f(x)}} \right\}^{\varphi(x)}$;

(2) 再取自然对数, 化为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式;

(3) 求出新未定式的极限 A ;

(4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ [1 + f(x)]^{\frac{1}{f(x)}} \right\}^{\varphi(x)} = e^A$, 原极限等于 e^A .

【即学即练】

1. (2001, 7分) 求 $\lim_{t \rightarrow x} \left(\frac{\sin t}{\sin x} \right)^{\frac{x}{\sin t - \sin x}}$, 记此极限为 $f(x)$, 求 $f(x)$ 的间断点并指出其类型.

TOP3: 求 $\frac{0}{0}$ 型极限

【真题分析】

【真题 1】(2005, 10 分) 设函数 $f(x)$ 连续, 且 $f(0) \neq 0$, 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (x-t)f(t)dt}{x \int_0^x f(x-t)dt}$.

分析: 利用洛必达法则与积分中值定理求解.

解答: 令 $x-t=u$, 则 $\int_0^x f(x-t)dt = \int_x^0 f(u)(-du) = \int_0^x f(u)du$, 故

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (x-t)f(t)dt}{x \int_0^x f(x-t)dt} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt}{x \int_0^x f(u)du} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t)dt + xf(x) - xf(x)}{\int_0^x f(u)du + xf(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t)dt}{\int_0^x f(u)du + xf(x)} \end{aligned}$$

利用积分中值定理, 有 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t)dt}{\int_0^x f(u)du + xf(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(\xi)}{xf(\xi) + xf(x)}$, ξ 位于 0 与 x 之间.

所以
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (x-t)f(t)dt}{x \int_0^x f(x-t)dt} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(\xi)}{xf(\xi) + xf(x)} = \frac{f(0)}{f(0) + f(0)} = \frac{1}{2}$$

【真题 2】(2001, 3 分) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3-x} - \sqrt{1+x}}{x^2 + x - 2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

分析: 将分子有理化即可.

解答:
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3-x} - \sqrt{1+x}}{x^2 + x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(1-x)}{(x-1)(x+2)} \cdot \frac{1}{\sqrt{3-x} + \sqrt{1+x}} \\ &= -\frac{2}{2\sqrt{2}} \times \frac{1}{1+2} = -\frac{\sqrt{2}}{6} \end{aligned}$$

【真题 3】(2002, 3 分) 设 $y=y(x)$ 是二阶线性常系数微分方程 $y'' + py' + qy = e^{3x}$ 满足初始条件 $y(0) = y'(0) = 0$ 的特解, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数 $\frac{\ln(1+x^2)}{y(x)}$ 的极限

- (A) 不存在 (B) 等于 1 (C) 等于 2 (D) 等于 3

【 】

分析: 利用洛必达法则及等价无穷小代换求解.

解答: 由 $y'' + py' + qy = e^{3x}$ 及 $y(0) = y'(0) = 0$ 可知 $y''(0) = 1$, 于是

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{y(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{y(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{y'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{y''(x)} = 2$$

故应选 (C).

【题型点睛】

1. 求未定式 $\frac{0}{0}$ 型的极限可以利用洛必达法则, 利用洛必达法则求该极限的一般步骤:

(1) 判断未定式是否是 $\frac{0}{0}$ 型, 若不是, 化成该型;

(2) 分子、分母同时求导, 适当化简再判断是否是 $\frac{0}{0}$ 型, 若不是, 化成该型;

(3) 最后得出结果.

2. 其他类型的未定式 $0 \cdot \infty$ 、 $\infty - \infty$ 型可利用变量代换、通分等方法直接化为 $\frac{0}{0}$ 型, 再计算.

3. 在利用洛必达法则求未定式 $\frac{0}{0}$ 型的极限时, 有时同等价无穷小量结合起来, 可大大简化运算, 如 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1) \tan x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$.

4. 特殊的可以利用重要极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, 如 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1$.

5. 还可以采用消除零因子法解题, 如极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x+1} = \frac{0}{2} = 0$.

采取消除零因子法求 $\frac{0}{0}$ 型极限, 一般将 $f(x)$ 的分子、分母同时除以零因子, 或 $\frac{1}{f(x)}$ 的分子、分母同时除以零因子, 使得最终能用四则运算.

6. 其他方法还有:

采用先分母有理化再消除零因子的方法, 如真题 2 很多情况下解题是多种方法的综合, 这需要在解题过程中灵活运用.

【即学即练】

1. (1999, 5 分) 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x \ln(1+x) - x^2}$.



2. (1998, 3 分) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

3. (2000, 3 分) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{\ln(1+2x^3)} = \underline{\hspace{2cm}}.$

TOP4: 求 $0 \cdot \infty$ 型极限

【真题分析】

【真题 1】(2004, 4 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \left[\left(\frac{2+\cos x}{3} \right)^x - 1 \right].$

分析: 对于幂指函数来说首先要将其恒等变形化为指数函数, 这样可将原极限化为 $\frac{0}{0}$ 型基本型, 再利用洛必达法则并结合等价无穷小代换求解.

解答: 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{x \ln \frac{2+\cos x}{3}} - 1}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln \frac{2+\cos x}{3}}{x^3} \quad (e^u - 1 \sim u, u \rightarrow 0 \text{ 时})$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2+\cos x) - \ln 3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2+\cos x} \cdot (-\sin x)}{2x} \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2+\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x} = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

【题型点睛】

1. 计算 $\infty \cdot 0$ 型未定式的一般方法:

(1) 将 $\infty \cdot 0$ 型未定式直接化为 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型, 或利用等价无穷小代换后再化为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型;

(2) 利用洛必达法则计算出结果.

2. 可以先化为 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式, 再采取消除零因子等求 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式的方法求出极限.

【即学即练】

1. 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{2x}{x^2 + 1} = \underline{\hspace{2cm}}.$

TOP5: 利用麦克劳林公式求函数极限

【真题分析】

【真题 1】(2007, 4 分) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - \sin x}{x^3} = \underline{\hspace{2cm}}.$

分析: 利用带有皮亚诺余项的麦克劳林公式可快速求解.

解答: 因 $x \rightarrow 0$ 时, $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$,

故 $\arctan x - \sin x = -\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$, 从而原极限 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}{x^3} = -\frac{1}{6}.$

【题型点睛】

1. 带皮亚诺余项的麦克劳林公式:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

2. 高阶无穷小运算的结论:

- (1) 有限个无穷小的和也是无穷小;
- (2) 有界函数与无穷小的乘积是无穷小;
- (3) 常数与无穷小的乘积是无穷小;
- (4) 有限个无穷小的乘积也是无穷小.

3. 利用麦克劳林公式求函数极限的一般步骤:

- (1) 根据分子或分母, 确定要展开函数的阶数;
- (2) 利用高阶无穷小的运算化简分子或分母;
- (3) 求出新的简单极限.

【即学即练】

1. (2000, 3 分) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + f(x)}{x^2}$ 为

- (A) 0
- (B) 6
- (C) 36
- (D) ∞

【 】



TOP6: 函数有界性、奇偶性和周期性的判断或证明

【真题分析】

【真题 1】(2004, 4 分) 设 $f(x) = \int_x^{x+\frac{\pi}{2}} |\sin t| dt$, 证明 $f(x)$ 是以 π 为周期的周期函数;

分析: 按函数周期性的定义证明.

解答: 令 $t = u + \pi$, 则

$$\begin{aligned} f(x+\pi) &= \int_{x+\pi}^{x+\frac{3}{2}\pi} |\sin t| dt = \int_x^{x+\frac{\pi}{2}} |\sin(u+\pi)| du \\ &= \int_x^{x+\frac{\pi}{2}} |\sin u| du = f(x) \end{aligned}$$

故 $f(x)$ 是以 π 为周期的周期函数.

【题型点睛】

1. 函数 $f(x)$ “在数集 X 上” 是有界还是无界:

若单纯说函数有界或无界, 则指的是函数在它的定义域内有界还是无界.

2. 如果对于任一 $x \in D$, 有 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为偶函数; 如果对于任一 $x \in D$, 有 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 为奇函数.

(1) 奇函数或偶函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称 (即若 $x \in D$, 则 $-x \in D$).

(2) 偶函数的图形关于 y 轴对称, 奇函数的图形关于原点对称.

3. 周期函数的定义:

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 如果存在一个正数 l , 使得对于任一 $x \in D$ 均有 $(x \pm l) \in D$, 且 $f(x+l) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为周期函数, l 称为 $f(x)$ 的周期.

求函数的周期一般都是指求其最小正周期.

4. 这些函数性质的判断都可直接利用上述定义.

【即学即练】

1. “ $f(x) = \frac{1}{x}$ 是有界函数”, 这种说法正确吗?

TOP7: 无穷小的比较或确定无穷小的阶或根据无穷小的阶反求参数

【真题分析】

【真题 1】(2006, 10 分) 试确定常数 A, B, C 的值, 使得