非稳态电磁场A-ϕ方法

马昌凤 ◎ 著

科学出版社
www.sciencep.com

非稳态电磁场 A-ϕ 方法

马昌凤　著

科 学 出 版 社

北　京

内 容 简 介

本书系统地介绍了求解几类非稳态电磁场(多介质低频电磁场、三维涡流场及高频电磁场)的 $\boldsymbol{A}$-ϕ 方法及其解耦格式和有限元误差分析. 全书共分 9 章. 第 1 章简述了电磁场基本理论及索伯列夫空间的有关概念; 第 2、3 章针对多介质中的低频电磁问题建立了基于非规范势的交替 $\boldsymbol{A}$-ϕ 方法(第 2 章)和分数步 $\boldsymbol{A}$-ϕ 方法(第 3 章), 并在一定条件下给出了这两类解耦方法的有限元误差分析; 第 4、5 章针对三维涡流场, 分别提出了基于磁矢势的 $\boldsymbol{A}$-$\phi\oplus\boldsymbol{A}$ 方法(第 4 章)和基于电矢势的 $\boldsymbol{A}$-$\phi\oplus\phi$ 方法(第 5 章), 并在适当假设下给出了这两类方法及其解耦格式的有限元误差估计; 第 6 章针对控制源电磁感应问题, 提出了基于拉格朗日乘子的 $\boldsymbol{H}$-ϕ 分数步投影方法, 并给出了该方法的有限元误差分析; 第 7、8 章针对高频电磁场, 分别提出了基于 Wave 格式的 $\boldsymbol{A}$-ϕ 方法(第 7 章) 和基于磁场显格式的 $\boldsymbol{A}$-ϕ 方法(第 8 章), 并在适当假设下获得了关于磁场 $\boldsymbol{H}$ 和电场 $\boldsymbol{E}$ 的有限元误差估计; 第 9 章分别给出了低频场和高频场的一个数值算例, 数值结果对本书的理论分析进行了验证.

本书思路清晰, 内容新颖, 既注重计算方法的实用性, 又保持理论分析的严谨性. 适合作为从事电磁场数值分析的工作者和电气工程师的参考资料, 也可作为计算数学、应用数学及物理学有关专业研究生的教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

非稳态电磁场 A-ϕ 方法/马昌凤著. —北京: 科学出版社, 2008
ISBN 978-7-03-021947-3

Ⅰ.非… Ⅱ.马… Ⅲ.电磁场–研究 Ⅳ.O441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008) 第 068319 号

责任编辑: 王丽平 王国华 / 责任校对: 鲁 素
责任印制: 赵德静 / 封面设计: 王 浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008 年 7 月第 一 版 开本: B5(720×1000)
2008 年 7 月第一次印刷 印张: 9 1/4
印数: 1—2 500 字数: 168 000

定价: 36.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈长虹〉)

谨以此书祝贺梁国平先生七十寿辰

前　言

自 1873 年麦克斯韦建立电磁场基本方程以来, 电磁场及电磁波理论和应用的发展已经有 100 多年的历史. 当前, 电磁场和电磁波技术已经渗透到与电子信息有关的几乎所有领域, 例如, 微波装置的设计、光纤通信和移动通信、雷达技术、微波和天线技术、电磁成像、地下电磁探测、电磁兼容以及电机设计等都涉及求麦克斯韦方程的数值解. 电磁场和电磁波在实际环境中的表现形式和传播过程十分复杂, 如各种复杂目标的散射, 复杂结构天线的辐射, 在波导和微带结构中的传播以及实际通信中城市环境、复杂地形和海面对电磁波传播的影响, 等等. 因此, 具体地、定量地分析和研究电磁场和电磁波的特性具有十分重要的意义. 随着计算机技术的发展, 计算电磁学也取得了巨大的进展, 以致近年来电磁场和电磁波的数值技术, 特别是三维涡流场的数值计算已逐步成为电机、变压器等电工设备设计和运行中不可或缺的计算工具.

目前, 电磁学专家已不再满足于对静态电场或磁场的数值模拟, 越来越注重于非稳态电磁场的数值计算. 麦克斯韦方程是电磁学最基本和最重要的偏微分方程, 它对于与电磁场有关的各种工程与科学问题的求解都是必不可少的, 因此求解麦克斯韦方程成为一个十分重要的问题. 最近 20 多年来, 电磁学家与数学家对麦克斯韦方程的数值求解进行了许多深入的研究. 尽管原则上各种电磁现象的数值计算都可以归结为数值求解麦克斯韦方程组, 但在一些特定情形下, 可以通过某些合理化假设来达到简化模型的目的, 从而避免求解完整的麦克斯韦方程组. 例如, 在工程领域广泛应用的三维涡流场问题即源自略去位移电流项的麦克斯韦方程, 这是针对高导低频情况通过忽略电容影响所做出的一种合理地模拟原问题的近似模型.

近年来, 电磁学家与数学家对麦克斯韦方程的数值求解进行了许多更深入的专门研究. 电场 $\boldsymbol{E}$ 和磁场 $\boldsymbol{H}$ 不属于 H^1 空间, 因此不能使用传统的节点连续元去求解. 当前有两种方法被公认能够较好地求解电磁场问题：棱单元方法和 $\boldsymbol{A}$-ϕ 电磁势方法. 这两种方法各有优缺点, 前者已有了不少数学分析文章, 后者尚不多见. 跟棱单元方法相比, $\boldsymbol{A}$-ϕ 方法具有下列优缺点：① 通过求解 $\boldsymbol{A}$-ϕ 间接获得的场量 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$ 能够自然地满足电场的切向连续性和磁通密度的法向连续性, 这一点跟棱单元方法是一样的; ② 可以使用节点连续元去求解 $\boldsymbol{A}$-ϕ, 因而在数值上容易编程实现, 如果使用四面体单元, 用直接法求解时, 总的计算量跟棱单元方法相当; ③ $\boldsymbol{A}$-ϕ 方法使用节点单元求解, 因而可以直接调用已有的有限元通用子程序, 而棱单元由于自由度定义在棱边上, 需要使用或开发专用的软件进行计算; ④ 不加规范条件的

$\boldsymbol{A}$-ϕ 方法由于解的不唯一性, 离散后线性方程组的系数矩阵有可能非正定, 因而使用迭代法求解存在困难, 而棱单元方法则不存在这个问题. $\boldsymbol{A}$-ϕ 方法由于可以使用节点连续元在 H^1 空间中求解、逼近度良好且容易编程实现而深受电气工程师们的喜爱. 但到目前为止, 该方法尚未引起数学家的重视, 其误差分析方面的研究尚属空白.

当前, 关于 $\boldsymbol{A}$-ϕ 方法的研究和使用尚局限于工程界, 并且对施加规范条件和不加规范条件存在一定的分歧. 前者为了保证势函数解的唯一性而人为地强加一种所谓规范性条件, 后者指出不加规范条件更符合事物的自然本性. 但不加规范条件导致数值处理上的困难, 对于大型的复杂问题, 离散后的方程组由于其系数矩阵不具有正定性而无法使用迭代法求解. 因此, 构造这一方法的解耦算法, 将问题转化为交替求解一个关于矢变量 $\boldsymbol{A}$ 的旋度算子方程和一个关于标变量 ϕ 的泊松方程, 这样不仅解的存在唯一性得到了保证 (因而可以使用迭代法求解离散后的线性代数方程组), 而且大大降低了计算的复杂度和计算量. 因此, 构造 $\boldsymbol{A}$-ϕ 方法的解耦格式并给出其误差分析具有十分重要的意义.

本书的主旨是: 在统一的理论框架下, 研究求解几类非稳态电磁场 (多介质低频电磁场、三维涡流场及高频电磁场) 的 $\boldsymbol{A}$-ϕ 方法及其解耦格式和有限元误差分析.

在本书的编写过程中得到了桂林电子科技大学博士基金和国家自然科学基金 (No.10661005) 及广西自然科学基金 (桂科自 0640165) 的部分资助, 在此深表谢意. 此外, 福建师范大学数学与计算机科学学院为作者提供了全部的出版经费, 特表示衷心的感谢. 最后, 本书之所以能够顺利付梓, 在很大程度上应归于夫人刘菊庄女士所付出的辛勤劳动和无私奉献, 深表感谢.

作　者

2008 年 3 月

目 录

第 1 章　绪　　论

电磁场数值分析, 亦称为计算电磁学 [1~6], 是经典电磁学的发展. 它以计算机为工具, 研究工程中的电磁学问题. 计算电磁学涉及电磁场理论、数值分析方法、计算机图形学、优化方法以及计算机软件工程等诸多领域, 它的研究范围也不断扩大 —— 从二维场到三维场、从稳态场到瞬态场直至微波电磁场.

1.1　电磁场数值分析概述

1. 发展历史的简单回顾

最近 30 多年来, 电子计算机技术的迅速发展促进了计算电磁学的前进. 作为计算电磁学的主体部分, 电磁场数值分析的理论和方法得到了比较充分的研究. 目前已经发展起来的数值方法可以归结为积分方程法和微分方程法两大类. 其中积分方程法还可细分为体积分方程法和边界元法; 而微分方程法则可再分为有限差分法和有限元法. 有限元法是目前应用最广泛的一种数值方法, 最初是在力学领域提出并发展起来的. Winslow[7] 率先将有限元法应用于电工设备中电磁场的计算, 他用有限元法分析了加速器磁铁的饱和效应. Silvester 和 Chari[8] 则提出了电机内电磁场问题的第一个通用非线性变分表述. 20 世纪 70 年代, Anderson[9] 和 Okuda[10] 等分别对变压器漏磁场和汽轮发电机端部磁场进行了开创性研究. 而在 80 年代, Nakata[11] 等对电磁材料特性的数值模拟核试验研究以及 Morisue[12,13]、Bíró[14] 等对规范问题的新见解, 也都是富有开创性的成果.

2. 电磁场数值分析的当前概况

目前, 电磁场数值分析已发展成为一门综合性的学科, 所求解的问题深入到工业生产的各个领域. 每年有数千篇的研究论文发表在国际性的学术会议和刊物上. COMPUMAG(Computing Electromagnetic Fields)Conference 是这一学科最重要的世界性会议, 从 1976 年到 1999 年, 这一会议共举行了 12 次, 参与交流的论文有 2000 多篇. 从交流论文中反映出的计算电磁学已取得的成就和尚待解决的问题如下:

(1) 有限元法 (FEM) 的二维、三维解已经有了很大发展, 包括对稳态、时变场问题和非线性问题、运动介质问题的处理, 对规范问题的正确理解等. 用有限元法

解决工程问题的论文所占比例最大. 目前, 时变电磁场问题, 特别是三维涡流场及高频场的数值分析仍然是最受重视的问题之一.

(2) 已经发展用边界元法 (BEM) 解决二维和三维电磁场问题, 但边界元与有限元相比, 哪一种方法更有前途, 目前尚无定论.

(3) 已经发展用棱单元 (edge element) 的方式去构造 FEM 和 BEM 的基函数, 这是对传统节点单元的一种革新, 对于描述场的变化和连续性提供了有效的物理框架. 棱单元方法是电磁计算领域颇有前途的一种数值分析方法.

(4) 提出了用于有限元的其他泛函, 其中包含了能量的上界解和下界解以及构成方法.

(5) 对所研究场域外部问题的处理已发展了多种方法, 特别是 Kelvin 变换 (用于与 FEM 结合) 已被广泛采用.

(6) 网格的自动生成和误差分析已经取得了很大的进展, 但自适应三维网格的生成还有待于大力研究.

(7) 电磁场分析的逆问题和优化问题发展很快, 几种随机化的总体优化方法正在平行研究, 但尚未形成通用性强、易于操作的高效能方法.

(8) 软件的操作和运行环境已经有了长足的进步, 开发出了一批电磁场分析的通用及专用商业软件, 如 ANSYS、QUICKFIELD、FEPG 等, 在实际工作中给设计工程师带来了很大的方便.

(9) 利用计算电磁学的工具已经能够进行电磁设备的有效设计, 避免制造昂贵的样机, 能够研究许多传统方法不能解决的问题, 因而这一工具在许多工业领域得到了日益广泛的应用.

(10) TEAM (testing of electromagnetic analysis method) Workshops 有组织的学术活动是计算电磁学积极发展的标志之一. 数值计算的结果是大量的数据, 对于三维实际工程问题, 数据量常常超过几十兆甚至上百兆. 如何从计算结果来检验计算方法及相应软件的正确性, 这个问题本身就构成一个值得研究的课题. 计算电磁学的学者和专家们提出了一个又一个的试验模型并给出详细的测试数据, 分别模拟某一类工程问题, 经 TEAM 的国际学术会组织确认后, 作为检验和比较各种算法的计算精度的模型题目, 称为 TEAM Workshop 问题. 至 2000 年 7 月, 已经确认了 30 个这样的题目.

3. 电磁场数值分析的未来展望

Trowbridge 在文献 [65] 中关于计算电磁学未来的发展说过这样一段话：关于未来, 可能是乐观的. 很多年来, 要让工业界的管理人员和工程设计人员相信“计算电磁学的工具很有用”并不是很容易的. 其原因部分是由于技术上的局限性 —— 这一工具的使用确实存在着问题, 但这也是一种正在变化的计算机世界中的文化现

象. 由于软件技术的新发展, 这一局限性正在消失. 最重要的变化来源于对年青一代技术人员计算机能力的期望. 同时, Trowbridge 在文献 [65] 中还提出了计算电磁学在 21 世纪有待攻克的十大难点:

(1) 三维电磁分析, 其中包含物体的运动, 处理并行和耦合问题;

(2) 非线性介质中波的传播, 微分和积分方程的混合方法;

(3) 总体优化方法 (多目标, 非线性约束);

(4) 知识数据库和智能设计系统的集成, 以便构造适当的工业设计环境;

(5) 各种几何建模方式, 布尔算子和自适应网格;

(6) 对铁磁物质磁滞特性 (包括局部磁滞回环) 的模拟;

(7) 参数提取 (parameter extraction), 电网和电磁设备的耦合, 电机的瞬态运动和系统分析, 成为研究新设备的基本部分;

(8) 电磁场与相关学科 (热力学, 流体力学等) 的结合;

(9) 利用图形和彩色进行三维场的可视化显示;

(10) 为上述研究服务的可行的国际数据标准的研究.

文献 [56] 也提出了几个值得关注的研究方向, 包括半解析数值方法, 离散形式的约束方程, 非线性电磁场以及寻找建立数值方法的其他途径等.

电磁场数值计算方法的发展已有 30 多年的历史, 数值计算本身的优势和弱点也已充分地显示出来. 就学科而言, 电磁场数值分析介于基础学科与工程应用学科之间, 目前这一学科已逐步走向总结性阶段. 许多研究者都在做深入思考, 并寻找新的突破点.

4. 有限元法在电磁场数值分析中的地位

在电磁场的数值分析中, 有限差分法先与有限元法得到应用. 但由于有限差分法的规则网格不能满意地模拟几何形状复杂的问题, 而电工设备中的电磁场却往往正是以包含复杂的几何形状和不同材料的物理参数为特征, 因此有限差分法在电磁场分析中的应用逐步被有限元法所替代.

有限元法的出现, 是数值分析方法研究领域重大的突破性进展. 与其他数值方法相比, 有限元法具有如下三方面的突出优点:

(1) 有限元网格具有很大的灵活性, 可以根据一定的条件构造不同类型的单元, 在一个求解场域中可以使用同一类型单元, 也可以将不同类型单元组合起来使用, 同一类型单元又可以具有不同的形状;

(2) 有限元法得出的离散化方程组具有稀疏对称的系数矩阵, 使方程组的求解得以简化, 计算机存储量和计算时间也相应大大减少;

(3) 边界条件的处理容易并入有限元数学模型, 便于编写通用的计算机程序.

上述优点使得有限元法成为目前多学科领域中应用最广泛的一种数值方法. 在电磁场分析中, 有限元法也占据了主流地位. 可以预言: 电磁场数值分析的未来, 必然是有限元方法的天下!

1.2　基础电磁学概述

电磁分析问题实际上是求解给定初边值条件下的麦克斯韦方程组的问题. 本节简要回顾一下有关的基本电磁理论和方程.

1. 麦克斯韦方程组

麦克斯韦方程组是支配所有宏观电磁现象的一组基本控制方程 [1~6]. 设 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)$ 和 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},t)$ 分别表示电场和磁场强度, 其中 $\boldsymbol{x}\in\Omega$ 为空间变量, $t\in[0,T]$ 为时间变量, $\Omega\subset\boldsymbol{R}^3$ 是电磁场作用的空间区域. 则麦克斯韦方程组的微分形式是

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mu\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t},\quad(\boldsymbol{x},t)\in Q_T=\Omega\times[0,T],\tag{1.2.1}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}+\sigma\boldsymbol{E}+\boldsymbol{J}_s,\quad(\boldsymbol{x},t)\in Q_T,\tag{1.2.2}$$

式中: 已知函数 $\boldsymbol{J}_s(\boldsymbol{x},t)$ 是源电流密度; 参数 ε、μ 和 σ 分别表示介质的介电常数、磁导率和电导率. 对于各向异性介质, 这些参数是张量; 对于各向同性介质, 它们是标量. 对于非均匀介质, 它们是位置的函数; 对于均匀介质, 它们不随位置变化.

注意到由式 (1.2.1) 和式 (1.2.2), 可以推出下面两个方程

$$\nabla\cdot\left(\mu\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}\right)=0,\quad(\boldsymbol{x},t)\in Q_T,\tag{1.2.3}$$

$$\nabla\cdot\left(\varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}+\sigma\boldsymbol{E}+\boldsymbol{J}_s\right)=0,\quad(\boldsymbol{x},t)\in Q_T.\tag{1.2.4}$$

另一个基本方程是电流连续性方程

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J}=-\frac{\partial\rho}{\partial t},\quad(\boldsymbol{x},t)\in Q_T,\tag{1.2.5}$$

式中: $\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}+\boldsymbol{J}_s$ 是电流密度; $\rho(\boldsymbol{x},t)$ 是电荷密度.

注 1.2.1　(1) 如果初始值 $\boldsymbol{H}_0=\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},0)$ 满足条件: $\nabla\cdot(\mu\boldsymbol{H}_0)=0$. 则可由式 (1.2.3) 推出

$$\nabla\cdot(\mu\boldsymbol{H})=0,\quad(\boldsymbol{x},t)\in Q_T,\tag{1.2.6}$$

此即磁场高斯定律.

(2) 利用电流连续性方程 (1.2.5), 若成立初始条件 $\nabla\cdot(\varepsilon\boldsymbol{E}_0)=\rho_0$, 则结合式 (1.2.4) 可推出

$$\nabla\cdot(\varepsilon\boldsymbol{E})=\rho. \tag{1.2.7}$$

即著名的电场高斯定律.

2. 边界条件

众所周知, 一个电磁问题的完整描述, 除微分方程本身外, 还应该包括边界条件的全部信息. 下面给出用于许多实际问题的一些边界条件.

1) 两介质间的边界条件

在两介质的边界面上 (例如介质 1 和介质 2), 边界条件的数学表述如下:

对于电场有

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}_1-\boldsymbol{E}_2)=\boldsymbol{0}, \tag{1.2.8}$$

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{D}_2)=0, \tag{1.2.9}$$

式中: $\boldsymbol{n}$ 是垂直于边界面的单位向量, 由介质 2 指向介质 1. $\boldsymbol{D}_i=\varepsilon_i\boldsymbol{E}_i(i=1,2)$ 为电通量密度. 同样, 对于磁场有

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)=\boldsymbol{0}, \tag{1.2.10}$$

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{B}_2)=0, \tag{1.2.11}$$

式中: $\boldsymbol{B}_i=\mu_i\boldsymbol{H}_i(i=1,2)$ 表示第 i 种介质的磁通量密度. 值得注意的是上述四个边界条件中, 只有两个是独立的, 在实际应用中, 我们可以选取式 (1.2.8)~(1.2.11) 或式 (1.2.9)~(1.2.10) 中的任一组作为边界条件.

注 1.2.2 在式 (1.2.9) ~ (1.2.10) 中, 我们假设了在界面上既没有面电流又没有面电荷存在. 如果在界面上确存在面电流密度 $\tilde{\boldsymbol{J}}_s$ 和面电荷密度 ρ_s, 那么这一组边界条件必须修改如下:

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{D}_2)=\rho_s, \tag{1.2.12}$$

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)=\tilde{\boldsymbol{J}}_s. \tag{1.2.13}$$

2) 理想导体面的边界条件

两导体之一 (如介质 2) 是理想导体时, 边界条件式 (1.2.8)~(1.2.11) 可以简化为下面的特殊情形:

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}, \tag{1.2.14}$$

$$\boldsymbol{n}\cdot(\mu\boldsymbol{H})=0. \tag{1.2.15}$$

在这种情形下, 边界面始终有面电流 $\tilde{\boldsymbol{J}}_s = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{H}$ 和面电荷 $\rho_s = \boldsymbol{n} \cdot (\varepsilon \boldsymbol{E})$ 存在.

1.3　索伯列夫空间简述

设 $\Omega \subset R^d$ $(d=2,3)$ 是一单连通有界多边形区域, $\partial\Omega$ 为其边界. 对于 $1 \leqslant p < \infty$, 定义函数空间

$$L^p(\Omega) = \left\{ v : \int_\Omega |v|^p \mathrm{d}x < +\infty \right\},$$

其范数定义为

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |v|^p \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.3.1}$$

对于 $p \to +\infty$, 以 $L^\infty(\Omega)$ 表示 Ω 上本性有界的函数空间, 相应的范数为

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup\{|v(\boldsymbol{x})| \mid \boldsymbol{x} \in \Omega\}. \tag{1.3.2}$$

当 $p=2$ 时, 它是重要的特殊情形: $L^2(\Omega)$ 是希尔伯特空间, 内积为

$$(u,v) = \int_\Omega uv\mathrm{d}x, \quad \forall u, v \in L^2(\Omega),$$

并简记 $\|v\|_0 = \|v\|_{L^2(\Omega)}$.

对于非负整数 m 及非负指标 $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d, d=2,3$, 定义索伯列夫空间

$$H^m(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) : \text{广义导数 } D^\alpha v \in L^2(\Omega), \forall |\alpha| \leqslant m\},$$

其范数定义为

$$\|v\|_m = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant m} \|D^\alpha v\|_0^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.3.3}$$

内积为

$$(u,v) = \int_\Omega \sum_{|\alpha| \leqslant m} D^\alpha u \cdot D^\alpha v \mathrm{d}x.$$

由索伯列夫空间理论可知, 空间 $H^m(\Omega)$ 是可分的, 自反的和一致凸的 [25]. 特别地, 我们后文经常用到下面的索伯列夫空间 [25,27,28,37]:

$$H_0^1(\Omega) = \{q \in H^1(\Omega) : q|_{\partial\Omega} = 0\}. \tag{1.3.4}$$

再引入如下希尔伯特空间:

$$H(\mathbf{curl}; \Omega) = \{\boldsymbol{v} \in L^2(\Omega)^3 : \nabla \times \boldsymbol{v} \in L^2(\Omega)^3\}, \tag{1.3.5}$$

及其子空间

$$H_0(\mathbf{curl};\Omega)=\{\boldsymbol{v}\in H(\mathbf{curl};\Omega):\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v}|_{\partial\Omega}=\mathbf{0}\}. \tag{1.3.6}$$

关于空间 $H(\mathbf{curl};\Omega)$, 赋予下列范数:

$$\|\boldsymbol{v}\|_{0,\ \mathbf{curl}}^2=\|\boldsymbol{v}\|_0^2+\|\nabla\times\boldsymbol{v}\|_0^2. \tag{1.3.7}$$

进一步, 对于时 - 空函数 $v(\boldsymbol{x},t)$, $(\boldsymbol{x},t)\in Q_T=\Omega\times(0,T)$, 定义下列函数空间:

$$W^{m,\ p}(0,T;B)=\left\{v:(0,T)\to B|\sum_{k=0}^{m}\int_0^T\|v(t)^{(k)}\|_B^p\mathrm{d}t<\infty\right\},$$

式中: $1\leqslant p<\infty$, m 是非负整数; B 是某巴拿赫空间; $v(t)^{(k)}$ 表示函数 $v(\boldsymbol{x},t)$ 对时间变量 t 的 k 阶导数. 定义上述空间的范数为

$$\|v\|_{W^{m,\ p}(0,T;B)}=\left(\sum_{k=0}^{m}\int_0^T\|v(t)^{(k)}\|_B^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.3.8}$$

特别地, 有

$$L^2(0,T;W)=W^{0,\ 2}(0,T;B)=\left\{v:(0,T)\to W|\int_0^T\|v(t)\|_W^2\mathrm{d}t<\infty\right\},$$

其范数为

$$\|v\|_{L^2(0,T;B)}=\left(\int_0^T\|v(t)\|_B^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.3.9}$$

此外, 有

$$H^m(0,T;B)=W^{m,\ 2}(0,T;B)=\left\{v:(0,T)\to B|\sum_{k=0}^{m}\int_0^T\|v(t)^{(k)}\|_B^2\mathrm{d}t<\infty\right\},$$

$m=1,2,\cdots$. 仿此, 可类似定义函数空间 $L^\infty(0,T;W)$, $C^0([0,T];W)$ 及相应的范数.

1.4 几个预备结果

1. Young 不等式

$$2ab\leqslant\gamma a^2+b^2/\gamma,\quad \gamma>0. \tag{1.4.1}$$

2. Green 公式

$$(\boldsymbol{v},\nabla\phi)+(\nabla\cdot\boldsymbol{v},\phi)=\int_{\partial\Omega}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}\phi,\ \forall\boldsymbol{v}\in H(\mathrm{div};\Omega),\ \forall\phi\in H^1(\Omega),$$

$$(\nabla\times\boldsymbol{w},\boldsymbol{v})-(\boldsymbol{w},\nabla\times\boldsymbol{v})=\int_{\partial\Omega}\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w},\ \forall\boldsymbol{v}\in H(\mathbf{curl};\Omega),\ \forall\boldsymbol{w}\in H^1(\Omega)^3.$$

3. 离散 Gronwall 不等式

设 $\{\eta_n\}$ 是非负数列, 且满足

$$\eta_0 \leqslant \beta_0,\ \eta_n \leqslant \beta_n + \sum_{j=0}^{n-1} \omega_j \eta_j, \quad n \geqslant 1, \tag{1.4.2}$$

式中：$\omega_j \geqslant 0$, $\{\beta_n\}$ 是非负的单调不减序列, 则有

$$\eta_n \leqslant \exp\left(\sum_{j=0}^{n-1} \omega_j\right)\beta_n. \tag{1.4.3}$$

4. Helmholtz 分解定理

对于任意既有散度又有旋度的矢量场 $\boldsymbol{F}$:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \xi, \quad \nabla \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{g}, \tag{1.4.4}$$

可以将其表示成一个只有旋度而无散度的矢量场 $\boldsymbol{A}$ 和一个只有散度而无旋度的矢量场 $\boldsymbol{B}$ 的叠加, 即

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{G}, \tag{1.4.5}$$

式中: $\nabla \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{g}; \nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$ 及 $\nabla \cdot \boldsymbol{G} = \xi; \nabla \times \boldsymbol{G} = 0.$ (1.4.6)

而 $\nabla \times \boldsymbol{G} = 0$ 意味着存在标量函数 ϕ, 使得

$$\boldsymbol{G} = \nabla \phi, \tag{1.4.7}$$

于是, 任意既有散度又有旋度的矢量场 $\boldsymbol{F}$ 可以表示为

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{A} + \nabla \phi, \tag{1.4.8}$$

式中：$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$.

5. 两个矢量恒等式

对于标量函数 $\phi = \phi(\boldsymbol{x}, t)$ 及矢量函数 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, t)$, 下面的等式恒成立:

$$\nabla \times (\nabla \phi) = 0, \tag{1.4.9}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{0}, \tag{1.4.10}$$

式中: $\boldsymbol{x} \in \Omega \subset R^3$ 是空间变量; $t \in [0, T]$ 是时间变量.

1.5　$\boldsymbol{A}$-ϕ 方法概述

众所周知, 电磁场数值分析的基本任务是寻找电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 的近似解, 并使得这个近似解尽可能逼近真解. 由于实际问题的真解并不知道, 因

此对所设计的数值方法做出先验的误差估计显得尤为重要. 本书的研究侧重点即为求解各类非稳态电磁问题 (似稳场、涡流场和高频场) $\boldsymbol{A}$-ϕ 方法的有限元误差分析.

由电磁场理论可知, 麦克斯韦方程组是描述电磁场宏观性质的一组基本方程, 它由两个旋度方程及两个散度方程所组成. 我们知道, 一个电磁问题的完整描述, 除微分方程本身外, 还应该包括边界条件的全部信息. 在没有面电流存在的条件下, 电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 在两介质的界面上具有切向连续的特性, 即 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 在两介质界面上的切向跳量为 0. 正是由于电场和磁场的这一特性, 用传统的节点连续元去直接求解 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 出现了逼近精度上不尽如人意之处. 于是棱单元 (edge element) 方法应运而生 [3,15,22,23,34~36,38,100~105,116~118], 并逐渐成为电磁场数值分析中一种很有发展前景的方法. 尽管如此, 电磁场数值分析的研究者和工程师们仍然不愿意舍弃节点有限元简单易用、操作灵活、容易编程实现等优点, 一直在寻求一种既不失去节点有限元优点又能很好地逼近电场 $\boldsymbol{E}$ 和磁场 $\boldsymbol{H}$ 真解的方法. 因此, 在棱单元方法出现的同时, 一种求解电磁场问题的新方法 —— 电磁场 $\boldsymbol{A}$-ϕ 方法也横空出世, 且深得电磁学专家和电磁设备设计工程师们的喜爱 [12~15,19,20,59~63,65~83], 并迅速成为电磁分析领域与棱单元方法并驾齐驱的两种主流数值方法之一. 下面简述 $\boldsymbol{A}$-ϕ 方法的基本思想.

根据 Helmholtz 定理 [96~99]: 如果在一有界域内, 有一个满足第一类齐次边界条件的任意矢量场 $\boldsymbol{F}$, 则这一矢量场 $\boldsymbol{F}$ 一定可以唯一地被分解成一个旋量场 $\boldsymbol{A}$ 与一个标量函数 ϕ 的梯度场之和, 即

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{A} + \nabla\phi,$$

所谓旋量场, 是指该场量是无散度的, 即 $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$, 而所谓第一类齐次边界条件即 $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{F}|_{\partial\Omega} = \boldsymbol{0}$.

由于在麦克斯韦方程组的四个方程中, 有两个分别是关于电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的旋度方程和散度方程, 另外两个分别是关于磁通密度 $\boldsymbol{B}(=\mu\boldsymbol{H})$ 的旋度方程和散度方程, 且磁通密度 $\boldsymbol{B}$ 是散度自由的 (磁场高斯定律). 因此, 根据上述讨论, 我们有:

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\partial(\boldsymbol{A} + \nabla\phi)}{\partial t}, \qquad \boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu}\nabla \times \boldsymbol{A}.$$

不难发现, 在上述 $\boldsymbol{A}$-ϕ 方式下表示的电场 $\boldsymbol{E}$ 和磁场 $\boldsymbol{H}$, 可以充分保证电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的切向分量和磁通密度 $\boldsymbol{B}(=\mu\boldsymbol{H})$ 的法向分量连续, 这正是场量 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 所必须满足的条件. 在一般的参考文献及电磁理论的有关书籍中, 将上面的方程式中的 $\boldsymbol{A}$ 称为磁矢势或矢量磁位, 而将 ϕ 称为电标势或标量电位. 这种通过数值求解矢量磁位 $\boldsymbol{A}$ 和标量电位 ϕ 来获取电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 近似解的方法就是所谓的 $\boldsymbol{A}$-ϕ 方法.