2003

研究生入学考试应试指导丛书

公共课系列

Entrance Exams for MD

北京大学研究生院策划

研究生入学考试

微积分

范培华 刘书田 编著

4

北京大学出版社

2003年研究生入学考试应试指导丛书

微 积 分

范培华　刘书田　编著

北京大学出版社
·北　京·

图书在版编目(CIP)数据

微积分/范培华,刘书田编著.—北京:北京大学出版社,2002.3
(2003年研究生入学考试应试指导丛书)
ISBN 7-301-04482-8

Ⅰ.微… Ⅱ.①范… ②刘… Ⅲ.微积分-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.O172

内 容 简 介

本书是经济类硕士研究生入学考试科目"微积分"复习指导书.本书作者多年来一直参加有关考研数学试卷的命题、阅卷和考研辅导班的教学,深知考生的疑难与困惑.作者把他们的教学经验结合考生与考试的实际加以细化、归纳和总结,整理成书奉献给广大读者,旨在提高考研者的数学水平与考试成绩.

本书紧扣数学三、四的考试大纲,贴切考试实践,内容丰富.全书共分九章.内容包括:函数、极限、连续,一元函数微分学,不定积分,定积分,多元函数微分学,多元函数积分学,无穷级数,常微分方程和差分方程等.本书结构新颖,每一章按照:考试要求,复习要点(重要定义、定理及公式),典型例题分析,练习题四部分编写.本书概念叙述简洁,解题思路清晰,对典型例题从多侧面、不同角度、用多种解法进行讲解,注重对考生基本概念的理解、多种类型基础题目的训练和综合解题能力的培养,是考研者较好的复习指导书和良师益友.

本书可作为经济类硕士研究生入学考试数学考试科目"微积分"的复习指导书,也可作为理工科考研者的复习参考书.对于在校的经济类及管理类大学生、大专生及自学考试者,本书也是一本较好的学习用书.

书　　名:微积分
著作责任者:范培华　刘书田　编著
责 任 编 辑:刘　勇
标 准 书 号:ISBN 7-301-04482-8/G·566
出　版　者:北京大学出版社
地　　　址:北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
网　　　址:http://cbs.pku.edu.cn/cbs.htm
电　　　话:出版部 62752015　发行部 62754140　理科编辑部 62752021
电 子 信 箱:zpup@pup.pku.edu.cn
印　刷　者:北京大学印刷厂
发　行　者:北京大学出版社
经　销　者:新华书店
787×1092　16开本　19.25印张　480千字
2001年5月第2版　2002年3月第2次印刷
定　　　价:25.00元

前 言

为了帮助有志攻读硕士研究生的广大考生能在较短的时间内全面、系统地复习有关的数学内容，我们根据教育部制定的“全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲”的有关要求，结合我们多年参加数学考研及有关考试的命题、阅卷和辅导积累的经验，编写了这套数学《2003年研究生入学考试应试指导丛书》，其中包括复习指导书：《高等数学(工学类)》、《微积分》、《线性代数》、《概率论与数理统计》以及《数学模拟试卷(经济学类)》共5册，其中《线性代数》、《概率论与数理统计》供数学一至数学四考生共同使用，《微积分》、《数学模拟试卷(经济学类)》为经济学与管理学考生所编写。

本套应试指导丛书的每一章由以下四部分构成：

一、考试要求——编写这部分的目的是使广大考生明确每一章考的内容是什么，掌握到什么程度就可以了。在编写过程中，根据我们多年以来参加有关命题的经验把考试大纲所要求的内容加以细化、归纳和总结，使广大考生能够正确把握考试要求，这是区别于其他考研辅导书的一大特点。

二、重要定义、定理及公式——这部分根据考试大纲的要求，将概念、定理和公式、方法进行了简明扼要的叙述、归纳和总结；精选了各种典型的例题并作详细的解答，使得考生能够在较短的时间内对重点、难点、热点问题进行复习，全面、系统地掌握所需要的知识，在考试时能够拿得出、用得上。

三、典型例题分析——这部分根据考试大纲要求的题型进行了分类、归纳，总结了各种题型解题的方法及技巧，开阔了考生的解题思路，使所学的知识能够融会贯通，并迅速提高考生的综合解题能力。

四、练习题——每章的最后部分精选了适量的练习题，全部习题都附有答案或提示，这些题目作为考生巩固所学知识、复习有关内容时使用，这有利于提高考生分析问题和解决问题的能力。

《数学模拟试卷(经济学类)》一书由两部分组成：一部分是为了检查前一阶段考生复习效果、更好地提高考生的应试能力而设计编制的全真模拟试题共十四份，其中数学三、四各7份；另一部分是1999、2000、2001和2002年数学三、四考研试题及解答。

本套书可作为参加硕士研究生入学考试数学一至数学四考生的复习指导书，对于在校的大学生、大专生及自学考试者，本套书也是较好的学习参考用书。

由于编者水平有限，加之时间比较仓促，书中难免有错误和疏漏之处，恳请读者批评指正。

编 者

2002年3月

目　录

第一章　函数、极限与连续

一、考试要求

1. 理解函数的概念,掌握函数的表示法;

2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性;

3. 理解复合函数、反函数、隐函数和分段函数的概念;

4. 掌握基本初等函数的性质及其图形,理解初等函数的概念;

5. 会建立简单应用问题中的函数关系式;

6. 了解数列极限和函数极限(包括左极限与右极限)的概念;

7. 了解无穷小的概念和基本性质,掌握无穷小的阶的比较方法.了解无穷大的概念及其与无穷小的关系;

8. 了解极限的性质与极限存在的两个准则,掌握极限四则运算法则,会应用两个重要极限;

9. 理解函数连续性的概念(包括左连续与右连续);

10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性,了解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值与最小值定理和介值定理)及其简单应用.

二、复习要点

(一) 重要定义、定理及公式

1. 函数的概念和几种特性

(1) 函数定义

定义 1.1　设 D 是一个给定的数集,若对于每一个数 $x\in D$,变量 y 按一定法则总有一个确定的数值与之相对应,则称变量 y 是变量 x 的**函数**,记作 $y=f(x)$,x 称作**自变量**,y 称作**因变量**,数集 D 称作函数 $y=f(x)$的**定义域**.

当 x 取值 $x_0\in D$ 时,与 x_0 对应的 y 的值称为函数 $y=f(x)$在点 x_0 的**函数值**,当 x 取遍 D 的每一个数值,对应的函数值的全体 $Y=\{y|y=f(x),x\in D\}$称为函数 $y=f(x)$的**值域**.

(2) 反函数

定义 1.2　设函数 $y=f(x)$的定义域为 D,值域为 Y,若对于每个 $y\in Y$,存在惟一的 $x\in D$,使 $f(x)=y$,当把 y 看作自变量,x 看作因变量时,则 x 是一个定义在 $y\in Y$ 上的函数,记为

$$x=f^{-1}(y)\quad (y\in Y),$$

称为 $y=f(x)$ $(x\in D)$的**反函数**.

习惯上把 x,y 互换,写成

$$y=f^{-1}(x)\quad (x\in Y).$$

(3) 复合函数

定义 1.3　设函数 $y=f(u)$的定义域是 D_f,值域是 Y. 函数 $u=g(x)$的定义域是 D_g,值域

是 G. 如果 $G\cap D_f\neq\varnothing$，则称函数

$$g=f[g(x)],\quad x\in D=\{x|g(x)\in D_f\}$$

是 $y=f(u)$ 与 $u=g(x)$ 复合而成的**复合函数**，u 称为**中间变量**.

(4) 初等函数

常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数等六种函数称为**基本初等函数**.

基本初等函数经过有限次四则运算和复合而得到的函数称为**初等函数**

初等函数是微积分的重要研究对象，此外还有隐函数、分段函数等.

(5) 函数的几种特性

1° 单调性

定义 1.4 设函数 $f(x)$ 定义在区间 I 上，对 I 中任意两点 x_1,x_2，当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)<f(x_2)$ ($f(x_1)>f(x_2)$)，则称 $f(x)$ 在区间 I 上**单调增加**(**单调减少**). 它们统称为**单调函数**.

2° 有界性

定义 1.5 若存在 $M>0$，使得对任意 $x\in I$，都有 $|f(x)|\leqslant M$(可以没有等号)，则称 $f(x)$ 是 I 上的**有界函数**，否则称函数 $f(x)$ 在 I 上**无界**.

3° 奇偶性

定义 1.6 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，若对任意 $x\in D$，有

$$f(-x)=f(x)\quad 或\quad f(-x)=-f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**偶函数**或**奇函数**.

4° 周期性

定义 1.7 设函数 $f(x)$ 定义在 I 上，若存在常数 $T\neq 0$，满足对任意 $x\in I$，有 $x\pm T\in I$，且 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**周期函数**，满足上式的最小正数 T 称为函数 $f(x)$ 的**周期**.

2. 极限的概念与性质

(1) 极限的定义

定义 1.8

1° $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A\Leftrightarrow\forall\ \varepsilon>0,\exists$ 自然数 N，当 $n>N$ 时，都有 $|x_n-A|<\varepsilon$. 若 x_n 存在极限(有限数)，称 $\{x_n\}$ **收敛**，否则称 $\{x_n\}$ **发散**.

2° $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\ \varepsilon>0,\exists\ X>0$，当 $|x|>X$ 时，都有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

(类似可定义 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.)

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=A.$$

3° $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，都有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

(类似可定义：$f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$，$f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$.)

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A.$$

(2) 极限的基本性质

数列极限的基本性质

定理 1.1(极限的不等式性质) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$.

若 $a>b$,则 $\exists\ N$,当 $n>N$ 时,$x_n>y_n$;

若 $n>N$ 时,$x_n\geqslant y_n$,则 $a\geqslant b$.

定理 1.2(极限的惟一性) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=b$,则 $a=b$.

收敛数列的有界性

若 $\{x_n\}$ 收敛,则 x_n 有界(即 $\exists$ 常数 $M>0$,$|x_n|\leqslant M,n=1,2,\cdots$).

函数极限的基本性质

定理 1.3(极限的不等式性质) 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$.

若 $A>B$,则 $\exists\ \delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,$f(x)>g(x)$;

若 $f(x)\geqslant g(x)(0<|x-x_0|<\delta)$,则 $A\geqslant B$.

定理 1.4(极限的保号性) 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$. 若 $A>0\Rightarrow\exists\ \delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,$f(x)>0$;若 $f(x)\geqslant 0(0<|x-x_0|<\delta)\Rightarrow A\geqslant 0$.

定理 1.5(极限的惟一性) 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=B$,则 $A=B$.

定理 1.6(存在极限的函数局部有界性)

设函数 $f(x)$ 存在极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,则 $f(x)$ 在 x_0 的空心邻域 $U_0(x_0,\delta)=\{x|0<|x-x_0|<\delta\}$ 内有界,即 $\exists\ \delta>0,M>0$,使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,就有 $|f(x)|\leqslant M$.

(3) 两个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e},\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}.$$

(4) 数列敛散性的判别定理

定理 1.7(夹逼定理) 若 $\exists\ N$,当 $n>N$ 时,$y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$. 又若

$$\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}z_n=A,\quad 则\ \lim_{n\to\infty}x_n=A.$$

定理 1.8(单调有界数列必有极限准则) 若数列 $\{x_n\}$ 单调上升有上界,即 $x_{n+1}\geqslant x_n(n=1,2,\cdots)$,并存在一个常数 M,使得对一切 n 有 $x_n\leqslant M$,则 $\{x_n\}$ 收敛,即存在一个数 a,使得

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a,\ 且有\ x_n\leqslant a\ (n=1,2,\cdots).$$

若数列 $\{x_n\}$ 单调下降有下界,即 $x_{n+1}\leqslant x_n(n=1,2,\cdots)$ 并存在常数 m,使得对一切 n 有 $x_n\geqslant m$,则 $\{x_n\}$ 收敛,即存在一个常数 b,使得

$$\lim_{n\to\infty}x_n=b,\ 且有\ x_n\geqslant b\ (n=1,2\cdots).$$

(5) 极限的四则运算

定理 1.9 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$,则

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B;\quad \lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B;$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}(B\neq 0).$$

(6) 复合函数的极限

定理 1.10 设 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$,$\lim\limits_{u\to a}f(u)=f(a)$,则

$$\lim_{x\to x_0} f(\varphi(x)) = f(a).$$

推论 1 若 $\lim\varphi(x)=\infty$，$\lim\limits_{u\to\infty} f(u)=A$，则

$$\lim f(\varphi(x)) = A.$$

推论 2 设 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则

$$\lim f(x)^{g(x)} = \lim f(x)^{\lim g(x)} = A^B.$$

3. 无穷小及其阶

(1) 无穷小、无穷大定义

定义 1.9 在某一极限过程中以零为极限的变量称为**无穷小**.

定义 1.10 x_n 为**无穷大**($\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$)$\Leftrightarrow \forall M>0$，$\exists$ 自然数 N，当 $n>N$ 时，$|x_n|>M$.

$x\to\infty$ 时，$f(x)$ 为无穷大($\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$)$\Leftrightarrow \forall M>0$，$\exists X>0$，当 $|x|>X$ 时，$|f(x)|>M$.

$x\to x_0$ 时，$f(x)$ 为无穷大($\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$)$\Leftrightarrow \forall M>0$，$\exists \delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)|>M$.

(2) 无穷小与极限、无穷小与无穷大的关系

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x),$$

其中 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

在同一极限过程中

$$\begin{cases} f(x)\text{为无穷小}, f(x)\neq 0, \text{则}\dfrac{1}{f(x)}\text{为无穷大}, \\ f(x)\text{为无穷大}, \text{则}\dfrac{1}{f(x)}\text{为无穷小}. \end{cases}$$

(3) 无穷小的阶

定义 1.11 设在同一极限过程中 $\lim\alpha(x)=\lim\beta(x)=0$. 若

$$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=l,$$

当 $l\neq 0$ 时，称 $\alpha(x)$，$\beta(x)$ 为同阶无穷小；

当 $l=1$ 时，称 $\alpha(x)$，$\beta(x)$ 为**等价无穷小**，记作 $\alpha(x)\sim\beta(x)$；

当 $l=0$ 时，称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 高阶的无穷小.

若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$，称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 低阶的无穷小.

若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ 不存在(也不为∞)，则 $\alpha(x)$，$\beta(x)$ 不可比较.

常用的等价无穷小

当 $x\to 0$ 时，

$$\sin x\sim x,\quad \arcsin x\sim x,\quad \tan x\sim x,\quad \arctan x\sim x,$$

$$\ln(1+x)\sim x,\quad e^x-1\sim x,\quad a^x-1\sim x\ln a,$$

$$\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\sim x,\quad \sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}\sim x,$$

$$\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}\sim x,$$

$$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,\quad (1+x)^a-1\sim ax.$$

(4) 无穷小的运算性质

1° 有限个无穷小的代数和仍为无穷小.

2° 无穷小乘有界变量仍为无穷小.

4. 几个常用的极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n}=0\quad(a>0)$；　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}nq^n=0\quad(|q|<1)$；　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log_a n}{n}=0\quad(a>1)$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$；　(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$；

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\quad(a>0)$.

5. 函数的连续性

(1) 连续函数的定义

定义 1.12　设函数 $f(x)$在点 x_0 的某个邻域内有定义，

1° 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，称 $f(x)$在 $x=x_0$ **连续**.

2° 若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，称 $f(x)$在 $x=x_0$ **右连续**；

若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$，称 $f(x)$在 $x=x_0$ **左连续**.

3° 若 $f(x)$在(a,b)内任意点均连续，称 $f(x)$在(a,b)连续.

4° 若 $f(x)$在(a,b)内连续，在 $x=a$ 右连续，在 $x=b$ 左连续，称 $f(x)$在$[a,b]$连续.

(2) 连续性运算法则

1° 连续函数的四则运算法则：设 $f(x)$、$g(x)$在 x_0 连续$\Rightarrow f(x)\pm g(x)$，$f(x)\cdot g(x)$，$\dfrac{f(x)}{g(x)}(g(x_0)\neq 0)$在 x_0 连续.

2° 复合函数的连续性：设 $u=\varphi(x)$在 x_0 连续，$u_0=\varphi(x_0)$，$y=f(u)$在 u_0 连续$\Rightarrow y=f[\varphi(x)]$ 在 x_0 连续.

3° 反函数的连续性：设 $y=f(x)$在区间 I_x 上单调且连续，则反函数 $x=\varphi(y)$在对应的区间 $I_y=\{y\,|\,y=f(x),\ x\in I_x\}$上连续且有相同的单调性.

4° 一切初等函数在其定义区间内部连续.

(3) 间断点及其分类

若函数 $f(x)$在点 x_0 不连续，则称 x_0 是 $f(x)$的**间断点**.

间断点的分类

第一类间断点		第二类间断点	
$f(x_0-0)$，$f(x_0+0)$均存在		$f(x_0-0)$，$f(x_0+0)$至少有一个不存在	
$f(x_0-0)=f(x_0+0)$	$f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$	$f(x_0-0)$，$f(x_0+0)$至少一个为∞	除前面情况以外
可去间断点	跳跃间断点	无穷间断点	振荡间断点

(4) 闭区间上连续函数的性质

设函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则

1° **最值定理**：$f(x)$在$[a,b]$上有最大值和最小值.

2° **介值定理**：设 $f(x)$在$[a,b]$上有最大值 M 和最小值 m，则对任意数 $c\in(m,M)$，在$[a,b]$内至少存在一点 ξ，使得

$$f(\xi)=c.$$

3° **根值定理**：若 $f(a)$与 $f(b)$异号，则在(a,b)内至少存在一点 η，使 $f(\eta)=0$.

（二）求函数的定义域

求函数的定义域就是找出解析表达式自变量的取值范围，主要有以下几种情况：

(1) 分式的分母取值不为零；

(2) 偶次根的根底式为非负数；

(3) 对数符号下的真数式子只能是正数；

(4) 反正弦函数、反余弦函数符号下的式子在$[-1,1]$上取值；

(5) 分段函数的定义域是各个部分自变量的取值范围的总和；

(6) 由几个函数经过四则运算而构成的函数，其定义域是各个函数定义域的公共部分.

（三）确定无穷小阶的方法

(1) 利用洛必达法则

设$\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$，为确定 $f(x)$是$(x-a)$的几阶无穷小，由洛必达法则确定常数 $k>0$，使

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{(x-a)^k}=l\neq 0,$$

则 $x\to a$ 时，$f(x)$是 $x-a$ 的 k 阶无穷小.

(2) 利用无穷小的运算性质及定义 1.11

(3) 无穷小阶的运算性质

当 $x\to a$ 时，$\alpha(x)$，$\beta(x)$分别是$(x-a)$的 n 阶和 m 阶无穷小，又 $\lim\limits_{x\to a}h(x)=A\neq 0$，则

1° $\alpha(x)\cdot h(x)$是$(x-a)$的 n 阶无穷小；

2° $\alpha(x)\cdot\beta(x)$是$(x-a)$的 $m+n$ 阶无穷小；

3° 当 $n>m$ 时，$\alpha(x)+\beta(x)$是$(x-a)$的 m 阶无穷小；$\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$是$(x-a)$的 $n-m$ 阶无穷小.

（四）求极限的方法

1. 利用极限的运算法则与重要结论

(1) 利用极限的四则运算与幂指数运算法则求极限

设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to a}(x)=B$，则

$$\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B,\quad \lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B,$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}(B\neq 0),\quad \lim_{x\to a}f(x)^{g(x)}=A^B(A>0).$$

(2) 复合函数的极限

由复合函数的极限知，求复合函数的极限时，函数符号“f”与极限符号“lim”可交换次序，即

若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，$\lim\limits_{u\to a}f(u)=f(a)$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(\varphi(x))=f(a)$. 该式可写成

$$\lim_{x\to x_0}f(\varphi(x))=f(\lim_{x\to x_0}\varphi(x))=f(a).$$

(3) 极限存在的充分必要条件

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A,$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=A.$$

(3) 设 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$,当 $0<|x-a|<\delta$ 时,$g(x)$有界,则

$$\lim_{x\to a}[f(x)g(x)]=0.$$

(4) 设$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty(+\infty)$,$\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty(+\infty)$或$\lim\limits_{x\to a} g(x)=A\neq 0(A>0)$,则

$$\lim_{x\to a}[f(x)g(x)]=\infty(+\infty).$$

(5) 设$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty(+\infty)$,当 $0<|x-a|<\delta$ 时,$g(x)$有界,则

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]=\infty(+\infty).$$

对$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$型的极限,其中重要方法是消去零因子或∞因子.

有理分式求极限

1° $$\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\infty, & \text{当 } m>n,\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & \text{当 } m=n,\\ 0, & \text{当 } m<n;\end{cases}$$

2° $$\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)^sP_1(x)}{(x-a)^rQ_1(x)}=\begin{cases}0, & s>r,\\ \dfrac{P_1(a)}{Q_1(a)}, & s=r,\\ \infty, & s<r,\end{cases}$$

其中 $P_1(a)\neq 0$, $Q_1(a)\neq 0$.

无理分式求极限

1° 当 $x\to\infty$,若分式呈$\frac{\infty}{\infty}$型,则分子分母同除 x 的最高次幂再求极限.

2° 当 $x\to x_0$ 时,若分式呈$\frac{0}{0}$型,则将分子分母同乘一个因式,以便使分子、分母为零的公因子显露出来,消去零因子.

2. 利用两个重要极限及其等价变形

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{\varphi(x)\to 0}\frac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e},\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e},\quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e},$$

$$\lim_{\varphi(x)\to\infty}\left(1+\frac{1}{\varphi(x)}\right)^{\varphi(x)}=\mathrm{e},\quad \lim_{\varphi(x)\to 0}(1+\varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}}=\mathrm{e}.$$

3. 利用等价无穷小代换求极限

在同一极限过程中,

(1) 若 $\alpha(x)\sim\beta(x)$,$\beta(x)\sim\gamma(x)$,则 $\alpha(x)\sim\gamma(x)$;

(2) 若 $\alpha(x)\sim\alpha^*(x)$,$\beta(x)\sim\beta^*(x)$,且$\lim\frac{\alpha^*(x)}{\beta^*(x)}$存在,则 $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\frac{\alpha^*(x)}{\beta^*(x)}$.

该性质表明,在求两个无穷之比的极限时,可用等价无穷小来代换以简化计算.

需要提醒读者注意的是在利用等价无穷小代换时,一般在乘除运算时可以,而在和差运算

时不要轻易使用,因这时往往会改变无穷小的阶,从而造成错误结果.

4. 利用变量替换法求极限

通过变量替换,把求某个极限转化为求另一个极限,若后者是已知的,则问题就解决了.

(1) 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty$, $\lim\limits_{u\to+\infty}f(u)=A$,则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f[\varphi(x)]\xlongequal{u=\varphi(x)}\lim\limits_{u\to+\infty}f(u)=A$ ($x\to-\infty$ 或 $x\to x_0$ 结论同样成立).

(2) 设$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$,$f(u)$在 u_0 连续,则$\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]\xlongequal{u=\varphi(x)}\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=f(u_0)$.

5. 利用夹逼定理和单调有界数列必有极限准则求极限

用夹逼定理时放大与缩小常用的方法有:

(1) 简单的放大与缩小,如 n 个正数之和不超过最大数乘 n,不小于最小数乘 n;分子分母同为正数,分母放大此数缩小;在若干个正数相乘时,小于 1 的因子略去放大,大于 1 的因子略去缩小等.

(2) 利用极限不等式放大或缩小.

6. 利用函数连续性求极限

(1) 设 $f(x)$在 $x=a$ 连续,按定义有$\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$.因此对连续函数求极限就是用代入法求函数值.

(2) 由于一切初等函数在其定义区间内连续,因此,若 $f(x)$是初等函数,a 属于它的定义域,则 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$.

(3) 设 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=A$,若补充定义 $g(a)=A$,则 $g(x)$在 $x=a$ 连续;又若 $y=f(u)$在 $u=A$ 连续,则由复合函数的连续性得 $\lim\limits_{x\to a}f(g(x))=f(\lim\limits_{x\to a}g(x))=f(A)$.

7. 利用洛必达法则求极限

洛必达法则是求极限的一个非常重要、方便易行的方法. 在第二章中重点介绍.

8. 利用函数极限求数列极限

若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$, 则 $\forall\ x_n\to+\infty$有 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)=A$,也就是说,若 y_n 可看成某函数在一串点集 x_n 上的函数值,即 $y_n=f(x_n)$. 当 $x_n\to+\infty$时,由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$,可知

$$\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}f(x_n)=A.$$

由于函数的极限可以应用洛必达法则,因而在求数列极限时,往往先化成求函数的极限.

9. 利用导数定义求极限

设 $f'(x)$存在,若所求极限可化为如下形式

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},$$

由导数定义知,此极限即为 $f'(x)$.

由第 8 段中数列极限与函数极限的关系可以得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(x+\dfrac{1}{n}\right)-f(x)}{\dfrac{1}{n}}=f'(x)\ (\text{假定 } f(x)\text{可导}).$$

此部分的例题将在下章给出.

(五) 函数连续性的判别

若 $f(x)$ 为初等函数，则它在有定义的区间上连续. 若 $f(x)$ 是非初等函数或不知它是否为初等函数，则或按连续定义或按连续性运算法则判断. 若 $f(x)$ 为分段函数，在每一段上都是初等函数，则只需对连接点判断其是否连续，即在连接点的左右极限是否相等且是否等于该点函数值.

（六）曲线渐近线的求法

1. 水平渐近线

对函数 $f(x)$，若 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$ 或 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$，

则曲线 $f(x)$ 有水平渐近线 $y=b$.

2. 铅直渐近线

对函数 $y=f(x)$，若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$，

则曲线 $f(x)$ 有铅直渐近线 $x=x_0$. 点 x_0 可能是函数 $f(x)$ 的间断点，也可能是函数 $f(x)$ 有定义区间的端点.

3. 斜渐近线

对函数 $f(x)$，若 $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}=a$，且 $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-ax]=b$

或 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}=a$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=b$，

则曲线 $y=f(x)$ 有斜渐近线 $y=ax+b$.

三、典型例题分析

（一）填空题

1. $y=\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}$ 的反函数 $f^{-1}(x)=$________.

答案是：$y=\dfrac{1}{2}(x^3+3x)$.

分析 将等式两边 3 次方并化简得 $y^3=2x-3y$，则 $x=\dfrac{1}{2}(y^3+3y)$，因此反函数为

$$y=\frac{1}{2}(x^3+3x).$$

2. 已知函数 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称，且 $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$，则 $g(x)$ =________.

答案是：$g(x)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

分析 因为 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 关于直线 $y=x$ 对称，因而 $g(x)=f^{-1}(x)$，由 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ 解出 x. 先化简：

$$y=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1},\quad e^{2x}y+y=e^{2x}-1,$$

于是 $x=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+y}{1-y}$，从而 $g(x)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

3. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{2000}}{x^\alpha-(x-1)^\alpha}=\beta\neq0$，则 $\alpha=$________，$\beta=$________.

答案是：$\alpha=2001$，$\beta=\dfrac{1}{2001}$.