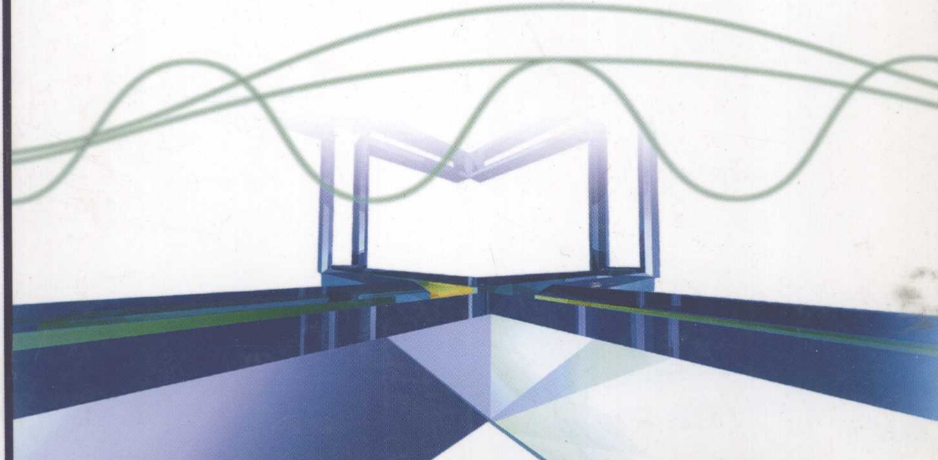
概率论与数理统计
学习指导与习题全解

马军英　编著



- 知识要点讲解与评注
- 典型例题精解与点评
- 单元练习题与全解
- 单元模拟试题与答案
- 综合模拟试题与解答

山东科学技术出版社 www.lkj.com.cn

概率论与数理统计

学习指导与习题全解

马军英　编著

山东科学技术出版社

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计学习指导与习题全解/马军英编著.
济南：山东科学技术出版社，2005.9
ISBN 7-5331-4204-7

Ⅰ.概…　Ⅱ.马…　Ⅲ.①概率论-高等学校-教学参考资料②数理统计-高等学校-教学参考资料
Ⅳ.021

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第108324号

概率论与数理统计
学习指导与习题全解

马军英　编著

出版者:山东科学技术出版社
地址:济南市玉函路16号
邮编:250002　电话:(0531)82098088
网址:www.lkj.com.cn
电子邮件:sdkj@sdpress.com.cn
发行者:山东科学技术出版社
地址:济南市玉函路16号
邮编:250002　电话:(0531)82098071
印刷者:济南申汇印务有限责任公司
地址:济南市王官庄12号
邮编:250022　电话:(0531)87966822

开本:850mm×1168mm　1/32
印张:13.25
字数:300千
版次:2005年9月第1版第1次印刷
印数:1-3000

ISBN 7-5331-4204-7　　O·114
定价:19.80元

前言

概率论与数理统计是大学理工、经济、管理等专业学生的一门重要的基础课，也是这些专业硕士研究生入学考试的必考科目。多年来的教学实践表明，很多初学者在学习概率论与数理统计这门课程时，感到内容难懂，方法不易掌握，解题时无从下手，解完后又不知正确与否。为了帮助广大读者学好该课程以及为考研做准备，编者根据国家教育部下达的高等院校“高等数学教学基本要求”和“全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲”要求，融学习指导和考研复习指导为一体编写了本书。此书既可与作者编著的教材《概率论与数理统计》配套使用，也可作为读者学习概率论与数理统计课程的参考书和备考硕士研究生入学考试的辅导用书。

本书紧扣高等院校目前所使用教材的内容体系按章编写。全书分为九章，每章内容由四个版块组成，即：

知识要点讲解与评注 提纲挈领地列出各章基本概念、重要定理公式和常用结论，以方便读者复习查阅。同时对某些内容作出了评注，使读者了解重点、难点及应注意的问题，解除疑惑与混乱，澄清一些常犯错误。

典型例题精解与点评 精选了涉及内容较广、类型较多且有典型性的例题和历年考研真题进行分析与解答，通过典型例题较全面、系统地介绍了概率统计解题的思路、常用方法和技巧，并以点评的形式作了归纳和总结。

前言

单元练习题与全解　与各章内容同步，给出了相当数量的练习题与全部解答。习题难度层次分明，题型多样，包括选择、填空、计算、应用、证明题等，其目的在于帮助读者从不同角度、不同侧面进行思考，理解概念，掌握方法。但我们希望读者先自行思考，独立解题，然后与解答对照，以期得到较大收获。

单元模拟试题与答案　通过单元模拟试题的自测，进一步把握基本概念，熟练知识点之间的衔接与转换，培养分析问题、运用知识的能力，达到巩固与提高的目的。

书末选编了三套综合模拟试题，并给出了详细的解答。读者通过做模拟试题，可熟悉考试题型，增加临场应变能力，发现自己的薄弱环节，及时调整复习重点和方向，以期深入理解基本概念，掌握解题方法与技巧，提高综合分析问题及解决问题的能力。

本书在编写过程中，得到了王爱云、张立琴教授的帮助与指导，张玉芬、张燕、王秀丽老师也提出了许多宝贵意见，许新斋教授审阅和核对了书稿，在此一并表示衷心的谢意。

由于编者水平所限，书中疏漏与不妥之处，恳请读者批评指正。

编　者

2005 年 8 月

目录

目　录

第一章　随机事件及其概率

知识要点讲解与评注

一、随机事件及其运算

1. 随机试验

如果试验满足：

(1) 可在相同条件下重复进行；

(2) 每次试验可出现多种可能结果；

(3) 每次试验前能明确试验所有可能的结果，但不能确定试验后会出现哪一个结果.

则称该试验为随机试验，简称试验，用 E 表示.

2. 随机事件

在随机试验中可能出现也可能不出现的结果称为随机事件，简称事件，用 A, B, C 等表示. 随机试验的每一个不能再分解的结果称为基本事件. 由若干个基本事件组成的事件称为复合事件. 每次试验中都发生的事件称为必然事件，用 Ω 表示. 每次试验中都不发生的事件称为不可能事件，用 $\varnothing$ 表示.

3. 样本空间

随机试验 E 产生的所有基本事件构成的集合称为 E 的样

本空间，记为 Ω．其中的每个元素称为一个样本点．

随机事件 A 总是由基本事件组成，即 A 是 Ω 的子集（$A\subset\Omega$），事件 A 发生等价于 A 中所包含的某个样本点在试验中出现．

4．事件的关系与运算

(1) 包含关系　如果事件 A 发生必导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，记为 $A\subset B$．如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 A 与 B 相等，记为 $A=B$．

(2) 互斥关系　如果事件 A 与 B 不能同时发生（即 $AB=\varnothing$），则称事件 A 与 B 互斥（或称 A 与 B 互不相容）．

评注：在一个试验中，基本事件都是两两互斥的．

(3) 对立关系　如果事件 A 与 B 必发生其一，但又不能同时发生（即 $A\cup B=\Omega$ 且 $AB=\varnothing$），则称 B 为 A 的对立事件（或称逆事件），记为 $\bar{A}$．

评注：对立事件一定是互斥事件，但互斥事件不一定是对立事件．

(4) 事件的和　事件 A 与 B 至少有一个发生的事件称为事件 A 与 B 的和，记为 $A\cup B$．类似地有事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和以及可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的和的概念，并分别记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 与 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$．

(5) 事件的积　事件 A 与 B 同时发生所构成的事件称为事件 A 与 B 的积，记为 $A\cap B$，简记为 AB．类似地有事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积以及可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的积的概念，并分别记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$（或 $A_1A_2\cdots A_n$）与 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$．

(6) 事件的差　事件 A 发生且 B 不发生的事件称为事件 A 与 B 的差,记为 $A-B$.

(7) 事件的运算性质　事件的关系、运算与集合的关系、运算相当,且有相同的运算性质:

交换率: $A\cup B=B\cup A$;　$AB=BA$;

结合率: $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$, $(AB)C=A(BC)$;

分配率: $A(B\cup C)=AB\cup AC$,

$A\cup(BC)=(A\cup B)(A\cup C)$;

对偶率: $\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$,　$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

5. 常用结论

(1) $A\cup\Omega=\Omega$,　$A\cup\varnothing=A$,　$A\Omega=A$,　$A\varnothing=\varnothing$.

(2) $A\subset A\cup B$,　$B\subset A\cup B$,　$AB\subset A$,　$AB\subset B$.

(3) $A-B\subset A$,　$A-B=A\overline{B}=A-AB$.

(4) $\overline{\overline{A}}=A$,　$\overline{\Omega}=\varnothing$,　$\overline{\varnothing}=\Omega$.

(5) 若 $A\subset B$,则 $A\cup B=B$, $AB=A$, $\overline{B}\subset\overline{A}$,

$B=A\cup(B-A)$ 且 $A(B-A)=\varnothing$.

(6) 若 $AB=\varnothing$,则 $A\subset\overline{B}$, $B\subset\overline{A}$.

评注:事件的运算顺序约定为先进行逆运算,后交运算,最后并或差运算.

二、随机事件的概率及其性质

1. 定义

设 Ω 是随机试验 E 的样本空间,如果对于 E 中任一事件 A 都赋予一个实数,记为 $P(A)$,且事件函数 $P(\cdot)$满足:

(1) $0\leqslant P(A)\leqslant 1$;

(2) $P(\Omega)=1$;

(3) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 是两两互斥的事件($A_iA_j=\varnothing$, $i\neq j$, $i,j=1,2,\cdots$),有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i),$$

则称 $P(A)$为事件 A 的概率.

2. **性质**

(1) $P(\varnothing)=0$.

(2) 若 $A\subset B$,则

$$P(B-A)=P(B)-P(A), \quad P(A)\leqslant P(B).$$

(3) 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是两两互斥的事件,则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

(4) $P(\bar{A})=1-P(A)$.

(5) 对于任意二事件 A, B 有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

一般地,对于 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n} P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

评注:(1) 由 $P(A)=0$,不能断言 $A=\varnothing$;由 $P(B)=1$,不能断言 $B=\Omega$.

(2) 对于任意二事件 A, B,有

$$P(A-B)=P(A)-P(AB).$$

3. **古典概型**

若随机试验 E 满足:(1)试验的样本空间只有有限个样本

点;(2)试验中每个样本点出现的可能性相同,则称这种试验为古典概型.

对于古典概型,事件 A 的概率为:

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{\text{事件 }A\text{ 包含样本点数}}{\text{样本空间 }\Omega\text{ 包含样本点数}}.$$

4.几何概型

若随机试验 E 满足:(1)试验的样本空间有无穷多个样本点且可用一个可度量的几何区域表示;(2)试验中每个样本点出现的可能性相同,则称这种试验为几何概型.

对于几何概型,事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{A\text{ 的度量}}{\Omega\text{ 的度量}}.$$

三、条件概率及与其有关的公式

1.条件概率

设 A,B 是两个事件,且 $P(B)>0$,则称

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

为在事件 B 发生的条件下事件 A 发生的条件概率.

评注:条件概率是概率,概率的一切性质对条件概率都适用.例如:

$$P(\overline{A}|B)=1-P(A|B)$$

$$P(A-C|B)=P(A|B)-P(AC|B)$$

等等.

2.乘法公式

如果 $P(A)>0$,则 $P(AB)=P(A)P(B|A)$.

一般地，如果 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，则

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1\cdots A_{n-1}).$$

评注：A_i 先于 A_{i+1} 发生时用此公式.

3.全概率公式

设 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 是一个完备事件组，即它们两两互不相容，其和为 Ω，并且 $P(B_i)>0$，$i=1,2,\cdots,n$，则对任一事件 A，有

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i).$$

4.逆概率（贝叶斯）公式

在全概率公式条件下，如果 $P(A)>0$，则

$$P(B_i|A)=\frac{P(B_i)P(A\mid B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(B_j)P(A\mid B_j)},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

评注：如果一个结果 A 的发生总是与某些原因 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 相联系，且 $P(B_i)$ 及 $P(A|B_i)$ 为已知或易求出，则可用全概率公式求 $P(A)$；如果在 A 发生的条件下探求导致这一结果的各种原因 B_i 发生的概率 $P(B_i|A)$，则要用逆概率公式.

四、随机事件的相互独立性

1.定义

设 A,B 是二个事件，如果 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称事件 A 与 B 相互独立，简称 A 与 B 独立.

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 $n(n \geqslant 2)$ 个事件，如果对其中任意有限个事件 $A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_k}(2 \leqslant k \leqslant n)$，有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k}),$$

则称事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立.

2. 性质

(1) 若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n(n \geqslant 2)$ 相互独立，则其中任意 $k(2 \leqslant k \leqslant n)$ 个事件也相互独立.

(2) 若 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n(n \geqslant 2)$ 相互独立，则将 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 中任意多个事件换成它们的对立事件后所得到的 n 个事件仍相互独立.

(3) 若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立，则

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i);$$

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(\overline{A}_i).$$

3. 常用结论

(1) 若 $P(A)=0$ 或 1，则事件 A 与任意事件 B 相互独立.

(2) 若 $0<P(A)<1, 0<P(B)<1, AB=\varnothing$ 或 $A \subset B$，则事件 A 与 B 不相互独立.

(3) 若 $P(B)>0$，则事件 A 与 B 相互独立的充要条件是 $P(A|B)=P(A)$；若 $0<P(B)<1$，则事件 A 与 B 相互独立的充要条件是 $P(A|B)=P(A|\overline{B})$.

评注：n 个事件相互独立必两两独立，反之不然.

典型例题精解与点评

【例 1】 设 A,B,C 是任意三个事件,则以下命题正确的是(　　).

(A) $(A\cup B)-B=A-B$　　(B) $(A-B)\cup B=A$

(C) $(A\cup B)-C=A\cup(B-C)$

(D) $A\cup B=A\bar{B}\cup B\bar{A}$

解 由于

$$(A\cup B)-B=(A\cup B)\bar{B}=A\bar{B}\cup B\bar{B}=A\bar{B}=A-B.$$

故选(A),其余三个选项都不对.这是因为:

$$(A-B)\cup B=(A\bar{B})\cup B=(A\cup B)(B\cup\bar{B})=A\cup B;$$

$$(A\cup B)-C=(A\cup B)\bar{C}=A\bar{C}\cup B\bar{C}=(A-C)\cup(B-C);$$

$$A\cup B=(A-B)\cup(B-A)\cup AB=A\bar{B}\cup B\bar{A}\cup AB.$$

【例 2】 证明:$(A-AB)\cup B=A\cup B$.

证法 1
$$\begin{aligned}(A-AB)\cup B&=(A\overline{AB})\cup B=A(\bar{A}\cup\bar{B})\cup B\\&=A\bar{A}\cup A\bar{B}\cup B=A\bar{B}\cup B=(A\cup B)(\bar{B}\cup B)\\&=A\cup B.\end{aligned}$$

证法 2 因为 $A-AB=$“A 发生,而 A,B 不同时发生”=“A 发生而 B 不发生”,故 $(A-AB)\cup B=$“A,B 至少有一个发生”$=A\cup B$.

点评:将一个复合事件用已知事件通过运算表示出来的方法常用的有推演法、等价法.

推演法是利用事件的运算律将复合事件逐步推演到已知事件的表达式.此法常用于与和、差事件,对立事件有关的复合事件.如例 1、例 2 证法 1 的解答方法.

等价法是将复合事件用其等价的事件来表示.此法常用于"恰有"、"至少"、"至多"、"都发生"、"都不发生"等词语表述的复合事件.如例2证法2的解答方法.

【例3】 设事件 A,B,C 满足 $ABC\neq\varnothing$,试把下列事件表示成互斥事件的和.(1)$B-AC$;(2)$AB\cup BC$.

解 (1) $B-AC=B(\overline{AC})=B(\bar{A}\cup\bar{C})$

$$=\bar{A}B\cup B\bar{C}\xlongequal{\text{添补}\Omega\text{ 相乘}}\bar{A}B\cup B\bar{C}(A\cup\bar{A})$$

$$=\bar{A}B\cup AB\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\xlongequal{\bar{A}B\bar{C}\subset\bar{A}B}\bar{A}B\cup AB\bar{C}.$$

(2) $AB\cup BC=AB\cup BC(A\cup\bar{A})=AB\cup ABC\cup\bar{A}BC$

$$=AB\cup\bar{A}BC.$$

点评:这类问题的处理技巧是在适当的地方添上必然事件 Ω 且相乘,使表达式产生逆事件.

【例4】 设事件 A,B 仅发生一个的概率为0.3,且 $P(A)+P(B)=0.5$,求 A,B 至少有一个不发生的概率.

解 因为

$$P(A\bar{B}\cup\bar{A}B)=0.3,P(A)+P(B)=0.5,$$

且

$$P(A\bar{B}\cup\bar{A}B)=P(A\bar{B})+P(B\bar{A})$$

$$=P(A)-P(AB)+P(B)-P(AB)$$

$$=P(A)+P(B)-2P(AB)=0.3,$$

所以 $0.5-2P(AB)=0.3$,即 $P(AB)=0.1$.故所求概率为:

$$P(\bar{A}\cup\bar{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-0.1=0.9.$$

点评:求与对立事件有关的事件的概率时,经常先用对偶律将所给事件的表达式变形,再用逆事件概率性质转化为求事件的积或和的概率.

【例 5】　设当事件 A 与 B 同时发生时，事件 C 必发生，则(　　).

(A) $P(C)\leqslant P(A)-P(B)$　　(B) $P(C)\geqslant P(A)-P(B)$

(C) $P(C)\leqslant P(A)-P(\bar{B})$　　(D) $P(C)\geqslant P(A)-P(\bar{B})$

解　由已知 $AB=C$，所以 $P(AB)\leqslant P(C)$. 由分解式

$$A=AB\cup A\bar{B}$$

得

$$P(A)=P(AB)+P(A\bar{B}),$$
$$P(AB)=P(A)-P(A\bar{B})\geqslant P(A)-P(\bar{B}),$$

故

$$P(C)\geqslant P(AB)\geqslant P(A)-P(\bar{B}).$$

故应选(D).

【例 6】　从 $0,1,\cdots,9$ 十个数字中任选三个不同的数字，试求下列事件的概率.

$$A_1=\{三个数字中不含\ 0\ 和\ 5\};$$

$$A_2=\{三个数字中含\ 0\ 但不含\ 5\};$$

$$A_3=\{三个数字中不含\ 0\ 或\ 5\}.$$

解　随机试验是从十个数字中任取三个数字，样本点总数为 C_{10}^3，即基本事件是有限且等可能的，因此试验是古典概型.

如果取得的三个数字不含 0 和 5，则必须在其余的八个数字中取得，故 A_1 所包含的样本点数为 C_8^3，所以

$$P(A_1)=\frac{C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{7}{15}.$$

如果取得的三个数字含 0 但不含 5，则需取到 0，再在其余 9 个数字中取出两个数字，有 $C_1^1C_9^2$ 种取法，但这样包括了含 0