

胡孟权 张登成 董彦非 等编著



高等大气飞行力学

航空工业出版社

高等大气飞行力学

胡孟权 张登成 董彦非 编著
张美忠 徐浩军

江苏工业学院图书馆
藏书章

航空工业出版社

北 京

内 容 提 要

本书主要讲述飞机大气飞行力学的基本理论、分析方法以及飞机飞行力学近年来的进展。主要内容包括飞机飞行力学的数学模型、分析计算方法；飞机对大气湍流响应的分析计算；带自动器飞机操稳特性分析计算；空战动力学基础；飞行模拟器以及空战仿真。

本书内容丰富、体系完整，可作为飞行力学相关专业的硕士及博士研究生的教学用书，也可作为空军和航空工业科技工作者的参考资料。

图书在版编目 (C I P) 数据

高等大气飞行力学/胡孟权, 张登成, 董彦非 等 编著.

北京: 航空工业出版社, 2007. 10

ISBN 978 - 7 - 80183 - 965 - 7

I. 高… II. ①胡…②张…③董… III. 飞机—
飞行力学 IV. V212.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2007) 第 079713 号

高等大气飞行力学 Gaodeng Daqi Feixing Lixue

航空工业出版社出版发行

(北京市安定门外小关东里 14 号 100029)

发行部电话: 010-64815606 010-64978486

北京富生印刷厂印刷

全国各地新华书店经售

2007 年 10 月第 1 版

2007 年 10 月第 1 次印刷

开本: 787 × 1092 1/16

印张: 15.25

字数: 380 千字

印数: 1—1200

定价: 48.00 元

前 言

飞机大气飞行力学是一门综合性的力学分支，其本质内容为分析评估飞机的作战使用性能、飞机的安全性以及飞行员驾驶飞机完成预定任务的难易程度。随着科学技术的不断进步，现代战斗机的作战环境和作战模式均发生了巨大的变化。现代战斗机已发展成为一种精密的武器系统平台。飞机飞行力学的研究越来越与信息技术、飞行控制、火力控制、武器系统动力学等交叉耦合。

本书主要作为飞机、飞行力学专业方向的硕士研究生及相关专业的博士研究生教学用书，在编写过程中注意了内容和体系的完整性，注重了飞机大气飞行力学的最新发展。学习本书的读者一般应具备大学本科所必须掌握的飞行力学知识。

本书由胡孟权主编，第1、6章由胡孟权编写，第2章由张美忠、胡孟权编写，第3、4、5章由张登成编写，第7章由徐浩军、张登成编写，第8、9章由董彦非编写。

本书的出版得到了空军工程大学工程学院训练部的大力支持，得到了徐浩军教授国家自然科学基金（70671106）的资助，在此表示衷心感谢。

由于编者水平有限，难免有谬误不足之处，诚恳希望各方面专家和读者批评指正。

编 者
2007.1

目 录

第1章 飞行力学数学模型和基本分析方法	(1)
1.1 引言	(1)
1.2 飞机运动方程	(2)
1.2.1 平静大气中的飞机刚体运动方程	(2)
1.2.2 有风时飞机刚体运动方程	(4)
1.2.3 考虑结构弹性的飞机运动方程	(4)
1.3 飞机运动的计算和分析方法	(7)
1.3.1 非线性六自由度全量运动方程的求解	(7)
1.3.2 作为线性系统的飞机动态特性分析方法	(12)
1.4 飞机机动飞行性能分析评估	(15)
1.4.1 飞机改变能量的能力	(15)
1.4.2 飞机改变飞行方向的能力	(17)
1.4.3 飞机改变空间位置的能力	(17)
1.4.4 飞机过载极曲线	(18)
1.5 飞机敏捷性	(22)
1.5.1 瞬时敏捷性尺度	(23)
1.5.2 功能敏捷性尺度	(24)
1.5.3 潜力敏捷性尺度	(26)
1.6 带自动控制系统飞机飞行品质分析评估	(26)
1.6.1 自动飞行控制系统的数学描述	(27)
1.6.2 等效系统拟配	(27)
第2章 飞机对大气湍流的响应	(32)
2.1 随机过程基础	(32)
2.1.1 基本概念	(32)
2.1.2 平稳随机过程	(34)
2.1.3 功率谱密度	(34)
2.1.4 随机过程的谐波分析	(35)
2.1.5 多个随机过程特性	(36)
2.1.6 线性系统对随机输入的响应	(38)
2.2 大气湍流的数学描述	(39)
2.2.1 大气湍流的假设	(39)

2.2.2	大气湍流速度的相关函数和频谱函数	(39)
2.2.3	大气湍流速度梯度的频谱函数	(43)
2.3	飞机对大气湍流的响应分析	(45)
2.3.1	大气湍流速度场的线化	(46)
2.3.2	大气湍流速度的气动等价作用	(46)
2.3.3	飞机的运动方程和传递函数	(48)
2.3.4	飞机对大气湍流的响应特性计算	(52)
2.4	大气湍流的模拟	(58)
2.4.1	白噪声的滤波结果	(58)
2.4.2	大气湍流速度的模拟	(58)
第3章	飞行自动控制基础	(60)
3.1	飞行控制系统的主要组成	(61)
3.1.1	敏感元件	(61)
3.1.2	系统性能调节元件	(70)
3.1.3	执行元件	(75)
3.1.4	飞行员	(78)
3.2	飞行控制系统分析和综合的有关基础理论	(80)
3.2.1	根轨迹法	(81)
3.2.2	伯德图法	(85)
3.2.3	系统时域响应与 s 域响应之间的关系	(88)
3.2.4	常用的系统性能指标	(92)
3.3	信号离散化	(96)
3.3.1	整量化	(97)
3.3.2	采样器	(98)
3.3.3	采样定理	(99)
3.3.4	保持器	(100)
3.3.5	零阶保持器的传递函数	(100)
3.4	z 变换的理论基础	(101)
3.4.1	z 变换的定义	(101)
3.4.2	从 s 平面到 z 平面的映射	(102)
3.4.3	z 反变换	(103)
3.4.4	一些重要的 z 变换定理	(104)
第4章	带自动器飞机纵向操稳特性	(105)
4.1	超声速飞机气动力和力矩变化的特点	(105)
4.2	改善纵向稳定性的增稳系统	(106)
4.2.1	纵向阻尼器	(106)
4.2.2	放宽静稳定性飞机的增稳器	(108)
4.3	积分式指令控制增稳系统	(110)

4.3.1	俯仰角速度积分式指令控制增稳系统	(111)
4.3.2	过载积分式指令控制增稳系统	(117)
4.4	比例式指令控制增稳系统	(122)
第5章	带自动器飞机横航向操稳特性	(127)
5.1	超声速飞机横航向气动力和力矩变化的特点	(127)
5.1.1	航向静稳定性导数	(127)
5.1.2	横向静稳定性导数	(129)
5.1.3	横向和航向阻尼导数	(129)
5.1.4	副翼操纵导数	(129)
5.1.5	方向舵操纵导数	(130)
5.2	横航向运动稳定性的近似分析	(130)
5.2.1	数学模型	(130)
5.2.2	横航向运动稳定性的近似分析	(131)
5.3	飞机的横航向操纵特性	(134)
5.3.1	飞机的横向操纵特性	(134)
5.3.2	飞机的航向操纵特性	(138)
5.4	具有控制增稳系统飞机的横航向稳定性和操纵性	(139)
5.4.1	偏航阻尼器	(139)
5.4.2	滚转阻尼器	(141)
5.4.3	副翼方向舵交联	(143)
5.4.4	航向增稳器	(144)
第6章	飞机空间非线性动力学	(147)
6.1	飞机非线性动力学定性研究的基本概念	(148)
6.2	飞机急滚动力学	(150)
6.2.1	惯性交感的基本概念	(150)
6.2.2	飞机急滚稳定性的线性近似分析	(151)
6.2.3	飞机急滚非线性分析	(154)
6.3	偏离动力学	(156)
6.3.1	横航向偏离的线性近似分析	(156)
6.3.2	偏离的非线性分析	(158)
6.4	尾旋动力学	(160)
6.4.1	稳态尾旋的近似分析	(161)
6.4.2	尾旋的全局稳定性分析	(162)
第7章	飞行模拟器	(164)
7.1	地面飞行模拟器	(165)
7.1.1	引言	(165)
7.1.2	地面飞行模拟器的组成及功能	(165)

7.1.3	对地面飞行模拟器的基本要求	(169)
7.1.4	飞机运动仿真要求	(176)
7.2	空中飞行模拟器	(178)
7.2.1	空中飞行模拟器的基本概念	(178)
7.2.2	空中飞行模拟器基本原理和模拟方法	(179)
7.2.3	空中飞行模拟器的基本构成	(183)
7.2.4	空中飞行模拟器的应用	(183)
第8章	空战动力学	(187)
8.1	空战机动	(187)
8.1.1	空战中常用的综合机动	(187)
8.1.2	空战中争取优势的战术机动	(189)
8.2	能量机动性	(191)
8.2.1	有关概念	(191)
8.2.2	空战机动中能量关系	(193)
8.2.3	空战中能量的支配和运用	(195)
8.3	空空导弹的导引与攻击区	(197)
8.3.1	空空导弹的导引规律	(197)
8.3.2	导弹攻击区计算	(198)
第9章	空战仿真	(201)
9.1	概述	(201)
9.1.1	空战过程	(201)
9.1.2	空战仿真系统的组成	(202)
9.2	空战机动决策方法	(203)
9.2.1	导引率方法	(203)
9.2.2	优化导引方法	(204)
9.2.3	人工智能导引方法	(210)
9.2.4	影响图法	(215)
9.2.5	空战机动决策方法综合评述	(220)
9.3	空战战术决策方法	(223)
9.3.1	概述	(223)
9.3.2	空战态势评估	(223)
9.3.3	空战威胁评估	(227)
9.4	机载武器系统模型	(231)
9.4.1	机载探测设备	(231)
9.4.2	空空导弹杀伤概率	(233)
	参考文献	(234)

第 1 章 飞行力学数学模型和基本分析方法

1.1 引言

本书主要讲述有人驾驶固定翼飞机的飞行动力学问题，其基本任务是对飞机的飞行性能和飞行品质进行分析评估。因此，传统的飞机飞行力学内容主要分为两大部分，即飞机的飞行性能和飞机的飞行品质分析。其中，飞机的飞行性能一般假设飞机为一质点，研究其沿飞行轨迹作定常或非定常运动的能力，主要包括确定飞机基本飞行性能和飞行包线、巡航性能、机动飞行性能、起飞着陆性能等。飞机的飞行品质（飞机的稳定性和操纵性）主要研究飞机对各种内部和外部扰动的反应。自 20 世纪 70 年代以后，由于控制技术的飞速发展，飞机本体设计和飞行控制系统紧密结合，使得飞机飞行品质的分析和综合扩展到包括飞机本体动力学和飞行控制系统相耦合的动力学系统。

进行飞行力学问题研究的基础是建立飞机运动的数学模型，亦即飞机的运动方程。根据需要解决问题的目的和要求，可以采用对飞机运动进行不同详细程度的数学描述。本章主要介绍飞机本体的数学模型（运动方程）及其计算分析方法；飞机机动性的评估；飞机稳定性和操纵性的评价分析方法。

本书在分析飞行力学问题时，采用的主要坐标系包括：

地轴系 $O_g x_g y_g z_g$ ：此坐标系固连于地面，其原点 O_g 固定于地面上某点， $O_g y_g$ 轴铅垂向上， $O_g x_g$ 和 $O_g z_g$ 轴位于水平面内和 $O_g y_g$ 构成右手坐标系。

体轴系 $Oxyz$ ：此坐标系固连于飞机，其原点为飞机质心， Ox 轴平行于机身轴线或机翼的平均空气动力弦线，指向前方； Oy 轴在飞机对称面内垂直于 Ox 轴向上； Oz 轴与 Ox 和 Oy 轴构成右手坐标系。

航迹轴系 $Ox_k y_k z_k$ ：此坐标系固连于飞机，其原点为飞机质心， Ox_k 轴沿飞机飞行速度（地速）方向； Oy_k 轴在包含 Ox_k 轴的铅垂面内向上； Oz_k 轴与 Ox_k 和 Oy_k 轴构成右手坐标系。

速度轴系 $Ox_a y_a z_a$ ：此坐标系固连于飞机，其原点为飞机质心， Ox_a 轴沿飞机飞行速度（空速）方向； Oy_a 轴在飞机对称面内垂直于 Ox_a 轴向上； Oz_a 轴与 Ox_a 和 Oy_a 轴构成右手坐标系。

稳定轴系 $Ox_s y_s z_s$ ：此坐标系固连于飞机，其原点为飞机质心， Ox_s 轴沿飞机基准运动状态下的飞行速度在飞机对称面投影方向； Oy_s 轴在飞机对称面内垂直于 Ox_s 轴向上； Oz_s 轴与 Ox_s 和 Oy_s 轴构成右手坐标系。

1.2 飞机运动方程

目前的有人驾驶固定翼飞机飞行高度一般小于 30km，马赫数一般小于 3。故在建立飞机运动方程时，可以忽略地球的旋转运动和地球的曲率，做“平板大地假设”，这样，地轴系为惯性坐标系。由于飞机的飞行高度远小于地球半径，可以不考虑重力加速度随高度的变化，认为重力加速度为常数。

1.2.1 平静大气中的飞机刚体运动方程

忽略飞机上的旋转部件在飞机运动时产生的陀螺力矩，忽略飞机机体的弹性变形以及飞机机体内部活动部件对飞机飞行的影响，将飞机视为刚体。假设大气静止。

1.2.1.1 动力学方程

飞机的动力学方程包括飞机平移动力学方程和绕质心的转动动力学方程。在刚体飞机的假设下，飞机机体上各质点的相对距离为常数。飞机在任意活动坐标系中的平移动力学方程为：

$$m\left(\frac{d\mathbf{V}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}\right) = \mathbf{R} + \mathbf{P} + \mathbf{G} \quad (1-1)$$

飞机绕质心的转动动力学方程为：

$$\frac{d\mathbf{h}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h} = \Sigma \mathbf{M} \quad (1-2)$$

式中： $\mathbf{V}$ ——飞机质心的运动速度矢量；

$\mathbf{R}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{G}$ ——作用在飞机上的空气动力、发动机推力、重力矢量；

$\boldsymbol{\omega}$ ——活动坐标系相对于地轴系的转动角速度矢量；

$\mathbf{h}$ ——飞机机体相对于质心的动量矩矢量；

$\Sigma \mathbf{M}$ ——作用在飞机上的外力矩矢量。

将式 (1-1) 和式 (1-2) 写成在飞机体轴系中的标量形式，有：

$$m \left\{ \begin{bmatrix} \dot{V}_x \\ \dot{V}_y \\ \dot{V}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sin\vartheta \\ \cos\vartheta \\ -\cos\vartheta \sin\gamma \end{bmatrix} G \quad (1-3)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{h}_x \\ \dot{h}_y \\ \dot{h}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma M_x \\ \Sigma M_y \\ \Sigma M_z \end{bmatrix} \quad (1-4)$$

式中： m ——飞机质量；

V_x , V_y , V_z ——飞机速度矢量在体轴系上的三个分量；

$\omega_x, \omega_y, \omega_z$ ——飞机体轴系相对于地轴系的旋转角速度矢量在体轴系上的三个分量；

F_x, F_y, F_z ——作用在飞机上的空气动力和发动机推力在体轴系上的三个分量；

M_x, M_y, M_z ——作用在飞机上的合外力矩在体轴系上的三个分量；

h_x, h_y, h_z ——飞机动量矩矢量在体轴系上的三个分量：

$$h_x = I_x \omega_x - I_{xy} \omega_y - I_{xz} \omega_z$$

$$h_y = I_y \omega_y - I_{xy} \omega_x - I_{yz} \omega_z$$

$$h_z = I_z \omega_z - I_{xz} \omega_x - I_{yz} \omega_y$$

I_x, I_y, I_z ——飞机对体轴系 $Oxyz$ 中 Ox, Oy, Oz 轴的转动惯量；

I_{xy}, I_{yz}, I_{xz} ——飞机对 Ox 轴与 Oy 轴、 Oy 轴与 Oz 轴、 Ox 轴与 Oz 轴的惯性积。因为飞机具有左右对称面，对飞机的体轴系 $Oxyz$ 而言，一般 $I_{yz} = I_{xz} = 0$ 。

式 (1-3) 和式 (1-4) 为描述飞机刚体随其质心平动和转动的六自由度动力学方程。方程左端为惯性项，右端为外力项。该方程组是以时间 t 为自变量的非线性耦合微分方程组。由于飞机质量随燃油的消耗而减小，当飞机进行长时间飞行时，不能假设飞机质量为常数，还应补充关于飞机质量的方程：

$$\frac{dm}{dt} = -CP \quad (1-5)$$

式中： C ——飞机发动机燃油消耗率。

1.2.1.2 运动学方程

飞机的动力学方程组中的外力项与飞机的姿态角、大气密度（即飞行高度）等相关。为了求解飞机的动力学方程组，还必须建立飞机的运动学方程，以建立在地轴系中飞机的质心位置和其运动速度、飞机姿态角与其角速度之间的关系。所以飞机运动学方程也包括飞机平移运动学方程和绕质心的转动运动学方程。

飞机的平移运动学方程为：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_g \\ \dot{y}_g \\ \dot{z}_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{xg} \\ V_{yg} \\ V_{zg} \end{bmatrix} = L_g^k \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\vartheta \cos\psi & \sin\gamma \sin\psi - \cos\gamma \sin\vartheta \cos\psi & \cos\gamma \sin\psi + \sin\gamma \sin\vartheta \cos\psi \\ \sin\vartheta & \cos\gamma \cos\vartheta & -\sin\gamma \cos\vartheta \\ -\cos\vartheta \sin\psi & \sin\gamma \cos\psi + \cos\gamma \sin\vartheta \sin\psi & \cos\gamma \cos\psi - \sin\gamma \sin\vartheta \sin\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} \quad (1-6)$$

飞机的转动运动学方程为：

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = L_g^b \begin{bmatrix} \dot{\vartheta} \sin\psi \\ \dot{\psi} \\ \dot{\vartheta} \cos\psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\gamma} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin\vartheta & 0 \\ 0 & \cos\vartheta \cos\gamma & \sin\gamma \\ 0 & -\cos\vartheta \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\vartheta} \end{bmatrix}$$

或

$$\begin{bmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\vartheta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\tan\vartheta \cos\gamma & \tan\vartheta \sin\gamma \\ 0 & \frac{\cos\gamma}{\cos\vartheta} & -\frac{\sin\gamma}{\cos\vartheta} \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (1-7)$$

式中： L_g^b, L_b^k ——分别为地轴系到体轴系，体轴系到地轴系的坐标转换矩阵。

1.2.2 有风时飞机刚体运动方程

上一节推导的飞机运动方程假设大气是静止的,但实际上大气往往不是平静的,即有风。飞机运动的惯性力决定于飞机相对于地面的速度 V (飞机的地速),但作用在飞机上的空气动力和发动机推力则决定于飞机相对于空气的速度 U (飞机的空速)。所以风对飞机的运动起作用,在飞机的设计和使用中,风的影响是十分重要和不可忽视的因素。

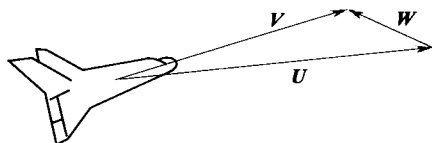


图 1-1 地速、空速和风速的关系

如图 1-1 所示,飞机的地速 V 、飞机的空速 U 和风速 W 具有如下关系:

$$V = U + W \quad (1-8)$$

在风对飞机飞行的影响方面,有两类不同性质的问题。第一类是有规律风对飞行的影响,属于确定性问题;第二类是连续大气湍流对飞行的影响,属于随机性问题。本节主要讨论第一类问题,推导其运动方程。第二类问题在第二章中加以研究。

假设风速 W 是已知的,它可以是时间和位置的确定函数,在地轴系中三个方向的分量用 W_{xg} 、 W_{yg} 、 W_{zg} 表示。在运动计算中,风速的大小、方向以及变化规律是假定的,这种假定必须以大气的实际情况、飞机的设计条件和经验为依据,或是以具有代表性的,或是在设计中应予以考虑的最严重情况。在对飞行试验结果进行复核计算时,风的数据应以试验中实际测量到的大气条件为依据。

显然,有风时,飞机运动学方程和无风时相同,即为式 (1-6)、式 (1-7)。

对于飞机的动力学方程式 (1-3) 和式 (1-4),如前所述,方程左端为惯性项,右端为外力项;飞机运动的惯性力决定于飞机的地速 V ,但作用在飞机上的空气动力和发动机推力则决定于飞机的空速 U 。故飞机动力学方程的形式不变,只不过在计算方程右端的空气动力、力矩、发动机推力、力矩时所用的速度为飞机的空速 U 。所以有规律风时飞机刚体运动方程只需在平静大气中的飞机刚体运动方程的基础上补充计算空速的方程即可。

根据速度关系式 (1-8),有 $U = V - W$ 。将其投影到机体轴系,有:

$$\begin{bmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} - L_g^b \begin{bmatrix} W_{xg} \\ W_{yg} \\ W_{zg} \end{bmatrix} \quad (1-9)$$

所以,有规律风时飞机刚体运动方程由式 (1-3) ~ 式 (1-7) 以及式 (1-9) 组成。

1.2.3 考虑结构弹性的飞机运动方程

在前面推导的飞机运动方程中,假定飞机是绝对刚性的,即飞机结构不因载荷而产生变形。这一假定,对于飞行速度较低、刚度较大的飞机是适用的。然而对于厚度较薄的后掠翼和细长机身的飞机在高速飞行时,这一假设与实际情况有较大出入。此时,飞机的结构弹性变形对飞机的稳定性和操纵性产生较大的影响。气动弹性问题处理不当,还会引起飞机的结构发散与颤振。

飞机结构弹性变形对其运动特性的影响可以从以下两个方面加以分析考虑。

- (1) 静弹性变形对飞机稳定性和操纵性的影响；
- (2) 结构弹性振动对“飞机－操纵系统”组合系统运动稳定性的影响。

1.2.3.1 静弹性变形的影响

考虑静弹性变形影响的基本原理是结构力学中的准弹性假设，即认为飞机的结构刚度很大，而气动载荷的变化很慢，因此飞机结构振动的自振频率大大高于飞机受外力扰动运动的频率，以至于在所有时刻，飞机结构都处于静平衡状态。飞机的结构变形，使得作用在飞机上的空气动力和刚体飞机有所不同，从而对飞机的稳定性和操纵性产生影响。

为了确定结构弹性变形对飞机稳定性和操纵性的影响，首先需要对各种定常飞行状态（不同的飞行重量、马赫数、高度、法向过载等）进行飞机结构静弹性变形和气动分布分析，确定相应的弹性变形和空气动力特性的变化，然后采用修正因子或增量形式对原始的气动导数进行弹性修正，如：

$$\begin{aligned} C_{ye}^{\alpha} &= \xi_{C_y^{\alpha}}(M, q) C_{yr}^{\alpha} & m_{ze}^{\delta_z} &= \xi_{m_{z\delta_z}}(M, q) m_{zr}^{\delta_z} \\ m_{ze}^{\omega_z} &= \xi_{m_{z\omega_z}}(M, q) m_{zr}^{\omega_z} & m_{xe}^{\beta} &= \xi_{m_x^{\beta}}(M, q) m_{xr}^{\beta} \\ &\dots & & \end{aligned}$$

对于迎角静稳定度，由增量形式确定：

$$m_{ze}^{C_y} = m_{zr}^{C_y} + \Delta m_z^{C_y}(M, q)$$

以上各式中下标 r 表示刚体飞机，下标 e 表示弹性飞机， ξ 表示修正因子。

有了考虑结构弹性的飞机气动导数后，代入刚体飞机的运动方程，即可进行考虑静弹性变形飞机运动稳定性和操纵性分析。

1.2.3.2 结构弹性振动的影响

上述关于结构静弹性变形的影响分析方法，在本质上还是将飞机作为刚体来求解，只不过在各项气动导数中考虑了弹性变形的影响。在考虑弹性变形影响时，认为作用在飞机上的气动力与结构变形的内应力平衡，略去了结构弹性变形过程中的惯性项和阻尼项的作用。这种准弹性假设不适用于结构弹性变形振动频率与飞机运动频率相差不大的情况。

当飞机运动频率（如飞机纵向短周期模态频率，横航向荷兰滚模态频率）与飞机结构弹性变形振动的最低几阶频率接近时，应该将飞机看做由 n 个质点（包含质心）组成的弹性结构。如图 1-2 所示，飞机上任意一个质点单元在惯性空间中的位置矢量 $\mathbf{R}$ 为飞机质心在惯性空间中的位置矢量 $\mathbf{R}_0$ 和质心到该质点单元的矢量 $\mathbf{r}$ 之和，即：

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{r}$$

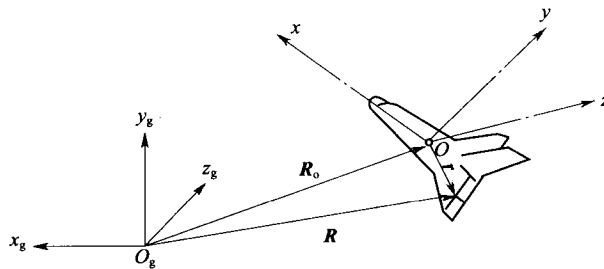


图 1-2 飞机上任意一个质点单元在惯性空间中的位置矢量

为了确定 R_0 ，需要三个分量，每一个分量表示一个平动自由度，为确定体轴系相对于惯性轴系的方位，还需要三个方位角，每一个方位角表示一个转动自由度。这六个自由度相当于刚体飞机的自由度，已由刚体飞机的运动方程描述。为了确定 $(n-1)$ 个质点单元相对于飞机质心的位置 r ，需要 $3(n-1)$ 个分量，即有 $3(n-1)$ 个弹性位移自由度。为了确定各质点单元在体轴系中的方向，还需要 $3(n-1)$ 个角位移自由度。所以在研究结构弹性振动的影响时，还需要补充 $6(n-1)$ 个方程。这 $6(n-1)$ 个方程就是由弹性飞机的几何方程（拉压变形、剪切变形与质点位移之间的关系）和物理方程（应力与应变的关系）结合边界条件（作用在飞机表面上的空气动力与结构内应力的关系）组合得到的内力平衡方程。

在具体描述飞机结构弹性变形运动时，常采用广义坐标的概念。所谓广义坐标是指：如果将飞机作为 n 个质点单元组成的弹性结构，那么，在运动的任一时刻，能够确定这 n 个质点单元位置的独立参数称为广义坐标，通常用矢量 q 加以表示。显然，广义坐标的个数等于飞机结构弹性变形的自由度。假设飞机结构弹性变形后的外形偏移其基准飞行状态是小量，则可认为结构的应力和应变成线性关系。同时，取飞机的基准运动为对称定常直线飞行，在小扰动假设下，飞机运动可以分解为纵向和横航向两部分分别处理。按照这样的思路，就可以写出飞机绕质心的动量和动量矩方程以及其他各弹性质点的内力平衡方程组。例如，弹性飞机的纵向方程组可写为如下的矩阵形式，即：

$$C\ddot{q} = [D_a + D_s]\dot{q} + [B_a + B_s]q \quad (1-10)$$

式中： C ——与 $\ddot{q}$ 相关的惯性系数矩阵；

D_a ——与 $\dot{q}$ 相关的气动力系数矩阵；

D_s ——与 $\dot{q}$ 相关的结构阻尼矩阵；

B_a ——与 q 相关的气动力系数矩阵；

B_s ——与 q 相关的结构刚度矩阵。

求解微分方程式 (1-10) 就可以分析弹性飞机的稳定性，但实际上，式 (1-10) 需要联立求解飞机绕质心的动量和动量矩方程以及各弹性质点的内力平衡方程组，求解比较困难。在工程实际中，常忽略气动力和弹性变形的耦合作用，认为飞机结构在基准运动状态下，受扰动后做自由振动。这样，除了飞机绕质心的动量和动量矩方程外，其他以广义坐标表示的内力平衡方程可简化为：

$$C\ddot{q} = D_s\dot{q} + B_s q \quad (1-11)$$

由上式求出的弹性质点系各个广义坐标 q 随时间的变化规律后，代入飞机绕质心的动量和动量矩方程组即可求解。

作为弹性飞机结构的自由振动，方程式 (1-11) 的解可以写为：

$$q = \phi u(t) \quad (1-12)$$

式中： ϕ ——自然振型（或自然模态），为广义坐标的函数，与时间无关；

$u(t) = e^{i\omega t}$ ——取决于结构自由振动频率 ω 的谐波函数，自然振型不同，对应的振动频率不同。

在工程计算中，并不需要计算 n 个质点的全部振型，只要选择与飞机质心运动固有频率最接近的几个振型所对应的频率写出式 (1-12)，再代入飞机绕质心的动量和动量矩方程求解即可。

1.3 飞机运动的计算和分析方法

飞机运动的计算求解通常有两种方法：

- 直接求解非线性、变系数的六自由度全量运动方程；
- 在小扰动假设下，将飞机运动方程简化为常系数线性微分方程后进行求解分析。

1.3.1 非线性六自由度全量运动方程的求解

飞机运动方程式 (1-3) ~ 式(1-7) 是非线性、变系数的微分方程。非线性不仅直接表现在飞机运动方程的形式上，而且还存在于飞机气动特性和发动机推力特性中，这些特性通常用非线性表达式或曲线（转化为表格数据）来描述。所以，飞机的全量运动方程在多数情况下不能求得解析解，而只能利用计算机进行数值求解。

微分方程的数值求解问题是计算数学的一个分支，目前有许多方法可供选择，如欧拉法、龙格-库塔法等，读者可参阅相关文献。本节重点介绍在飞机运动方程积分过程中出现奇异性的处理。

从飞机转动运动学方程式 (1-7) 中可以看出，当飞机俯仰角 $\vartheta = 90^\circ$ 时， $\tan\vartheta \rightarrow \infty$ ， $\frac{1}{\cos\vartheta} \rightarrow \infty$ ，从而导致微分方程组的数值积分计算无法继续进行，这就是飞机运动方程的奇异性。因为描述飞机姿态的姿态角是按欧拉概念定义的，故亦称欧拉角，常规飞机运动方程的奇异性也称为欧拉方程的奇异性。

欧拉方程的奇异性，是广泛采用欧拉角概念的航空航天界中姿态控制和飞行模拟的共性的难题。克服欧拉方程奇异性的方法有单欧法、双欧法和四元数法等。单欧法采用死区定值，缺陷明显。本节主要介绍克服欧拉方程奇异性的双欧法和四元数法。

1.3.1.1 双欧法

如果从地面坐标系变换到机体坐标系的三次变换顺序是偏航、俯仰、滚转，则对应的偏航角、俯仰角、滚转角称为正欧拉角，记作 ψ 、 ϑ 、 γ ，其对时间的导数与飞机转动角速度在机体坐标系中的分量 ω_x 、 ω_y 、 ω_z 的关系，如式 (1-7)。三个姿态角的定义域为：

$$\begin{aligned}\vartheta &\in [-90^\circ, 90^\circ] \\ \psi &\in [-180^\circ, 180^\circ] \\ \gamma &\in [-180^\circ, 180^\circ]\end{aligned}$$

$\vartheta = \pm 90^\circ$ 为此方程组的奇异点；如果变换顺序是偏航、滚转、俯仰，则对应的偏航角、滚转角、俯仰角称为反欧拉角，记作 ψ_r 、 γ_r 、 ϑ_r ，其对时间的导数与飞机自转角速度的关系由反欧拉方程组来描述，即：

$$\begin{cases} \dot{\psi}_r = (\omega_x \sin\vartheta_r + \omega_y \cos\vartheta_r) / \cos\gamma_r \\ \dot{\gamma}_r = \omega_x \cos\vartheta_r - \omega_y \sin\vartheta_r \\ \dot{\vartheta}_r = \omega_z + \dot{\psi}_r \sin\gamma_r \end{cases} \quad (1-13)$$

三个反欧拉角的定义域为：

$$\begin{aligned}\gamma_r &\in [-90^\circ, 90^\circ] \\ \psi_r &\in [-180^\circ, 180^\circ] \\ \vartheta_r &\in [-180^\circ, 180^\circ]\end{aligned}$$

可以发现，反欧拉方程组同样存在着奇异性， $\gamma_r = \pm 90^\circ$ 是此方程的奇异点，它使 ϑ_r 和 ψ_r 为无穷大，使方程组无法求解。

由于正、反两组欧拉方程组都存在着奇异性，所以单独使用都会造成较大的误差。双欧法则是将两者结合起来，以 $|\vartheta| = 45^\circ$ 为界，交替求解正、反欧拉方程组，避开各自方程组的奇异点，使方程的求解顺利进行。

可以证明，当 $|\vartheta| > 45^\circ$ 时， $|\gamma_r| < 45^\circ$ 。这样，当 $|\vartheta| \leq 45^\circ$ 时，求解正欧拉方程，避开了正欧拉方程组的奇异点；当 $|\vartheta| > 45^\circ$ 时，求解反欧拉方程，避开了反欧拉方程组的奇异点。正、反欧拉方程组交替运算，避开了单个欧拉方程的奇异点，解决了欧拉方程的奇异性问题。

虽然双欧法避开了求解欧拉方程的奇异点，解决了求解欧拉方程的奇异性，但是，求解反欧拉方程得到的是反欧拉角，求解正欧拉方程得到的是正欧拉角。所以，在双欧法的使用过程中，必须进行正、反欧拉角的相互转换。在正、反欧拉角相互转换过程中仍然存在奇异性。

从地面坐标系到机体坐标系的坐标转换矩阵，不论转动顺序怎样或转动次数多少，其坐标转换矩阵总是唯一的，即各种条件下得到的坐标转换矩阵总是相等的。这样，由正欧拉角组成的从地面坐标系到机体坐标系的坐标转换矩阵与由反欧拉角组成的从地面坐标系到机体坐标系的坐标转换矩阵是相等的，即：

$$L = [\gamma]_x [\vartheta]_z [\psi]_y = [\vartheta_r]_z [\gamma_r]_x [\psi_r]_y \quad (1-14)$$

展开为：

$$\begin{bmatrix} \cos\vartheta\cos\psi & \sin\vartheta & -\cos\vartheta\sin\psi \\ \sin\gamma\sin\psi - \cos\gamma\sin\vartheta\cos\psi & \cos\gamma\cos\vartheta & \sin\gamma\cos\psi + \cos\gamma\sin\vartheta\sin\psi \\ \cos\gamma\sin\psi + \sin\gamma\sin\vartheta\cos\psi & -\sin\gamma\cos\vartheta & \cos\gamma\cos\psi - \sin\gamma\sin\vartheta\sin\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\vartheta_r\cos\psi_r + \sin\vartheta_r\sin\gamma_r\sin\psi_r & \sin\vartheta_r\cos\gamma_r & -\cos\vartheta_r\sin\psi_r + \sin\vartheta_r\sin\gamma_r\cos\psi_r \\ -\sin\vartheta_r\cos\psi_r + \cos\vartheta_r\sin\gamma_r\sin\psi_r & \cos\vartheta_r\cos\gamma_r & \sin\vartheta_r\sin\psi_r + \cos\vartheta_r\sin\gamma_r\cos\psi_r \\ \cos\gamma_r\sin\psi_r & -\sin\gamma_r & \cos\gamma_r\cos\psi_r \end{bmatrix} \quad (1-15)$$

因为正、反欧拉方程组需要交互求解，所以必须进行正、反欧拉角的相互转换。从式 (1-15) 可以得到正、反欧拉角以三角函数形式表示的互求表达式。

由正欧拉角求解反欧拉角的表达式为：

$$\begin{cases} \sin\gamma_r = \sin\gamma\cos\vartheta \\ \tan\vartheta_r = \frac{\tan\vartheta}{\cos\gamma} \\ \tan\psi_r = \frac{\cos\gamma\sin\psi + \sin\gamma\sin\vartheta\cos\psi}{\cos\gamma\cos\psi - \sin\gamma\sin\vartheta\sin\psi} \end{cases} \quad (1-16)$$

由反欧拉角求解正欧拉角的表达式为：

$$\begin{cases} \sin\vartheta = \cos\gamma_r \sin\vartheta_r \\ \tan\gamma = \frac{\tan\gamma_r}{\cos\vartheta_r} \\ \tan\psi = \frac{\cos\vartheta_r \sin\psi_r - \sin\vartheta_r \sin\gamma_r \cos\psi_r}{\cos\vartheta_r \cos\psi_r + \sin\vartheta_r \sin\gamma_r \sin\psi_r} \end{cases} \quad (1-17)$$

当 $|\vartheta| \leq 45^\circ$ 时，求解正欧拉方程组，需要使用式(1-16)进行从正欧拉角到反欧拉角的转换，为求解反欧拉方程做准备。转换中，当 $\gamma = \pm 90^\circ$ 时， $\cos\gamma = 0$ ，使得式(1-16)中第二式 $\tan\vartheta_r$ 为无穷， $\gamma = \pm 90^\circ$ 称为从正欧拉角到反欧拉角转换的奇异点；式(1-16)中第三式的分母也存在为零的可能性，使得 $\tan\psi_r$ 为无穷。这样就无法精确求解 ϑ_r 和 ψ_r 的值。这是从正欧拉角向反欧拉角转换的奇异性。

同样，当 $|\vartheta| > 45^\circ$ 时，求解反欧拉方程组，需要使用式(1-17)进行从反欧拉角到正欧拉角的转换。可以证明，当 $|\vartheta| > 45^\circ$ 时， $45^\circ < |\vartheta_r| < 135^\circ$ 。转换中，当 $\vartheta_r = \pm 90^\circ$ 时， $\cos\vartheta_r = 0$ ，使得式(1-17)中第二式 $\tan\gamma$ 为无穷， $\vartheta_r = \pm 90^\circ$ 称为从反欧拉角到正欧拉角转换的奇异点；式(1-17)中第三式的分母也存在为零的可能性，使得 $\tan\psi$ 为无穷。这样就无法精确求解 γ 和 ψ 的值。这是从反欧拉角向正欧拉角转换的奇异性。

从式(1-15)中还可以得到其他形式的正、反欧拉角的互求关系式，但不论何种形式的关系式，总是存在着除以零或数值为无穷的情况，存在着正、反欧拉角无法精确求解的情况，存在正、反欧拉角相互转换的奇异点和奇异性。

将正、反欧拉角相互转换的奇异性称之为欧拉角转换奇异性，它不同于欧拉方程的奇异性。欧拉方程的奇异性是欧拉方程本身所具有的性质，它会造成欧拉方程在奇异点处无法求解，而欧拉角转换奇异性是在采用双欧法解决欧拉方程的奇异性时正、反欧拉角相互转换的奇异性，此奇异性可利用计算机编程语言的特点，通过程序编写技巧得以克服，从而可以应用于飞行仿真系统中。

1.3.1.2 四元数法

四元数是由四个元素组成的超复数，其解析表达式为：

$$Q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3$$

其中， q_0, q_1, q_2, q_3 是任意实数； q_0 称为四元数的标部； $iq_1 + jq_2 + kq_3$ 称为四元数的矢部； i, j, k 是虚数单位，规定它们服从下列运算规则：

$$\begin{aligned} ii = jj = kk = -1 & \quad ij = -ji = k \\ jk = -kj = i & \quad ki = -ik = j \end{aligned}$$

根据四元数的定义和运算法则，对于四元数而言，乘法的分配律仍然成立，为：

$$Q_1(Q_2 + Q_3) = Q_1Q_2 + Q_1Q_3$$

但交换律不成立，为：

$$Q_1Q_2 \neq Q_2Q_1$$

定义 $Q^* = q_0 - iq_1 - jq_2 - kq_3$ 为 Q 的共轭四元数，不难导出：

$$QQ^* = Q^*Q = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = N^2(Q)$$