高中数学一题多解指导

席振伟 编著

科学技术文献出版社重庆分社

高中数学一题多解指导

席振伟　编著

科学技术文献出版社重庆分社

·一九八九·

责任编辑：栾季生
技术设计：王　维

高中数学一题多解指导　　席振伟　编著

科学技术文献出版社重庆分社 重庆市市中区胜利路132号	出版 发行
全国各地新华书店	经销
重庆新华印刷厂	印刷

开本：787×1092毫米 1/32　印张：11.125　字数：24万
1989年5月第1版　1989年5月第1次印刷
印数：1—6000

ISBN7-5023-0377-4/O·18　定价：3.60元

内容提要

本书是指导自学青年、中学生探索数学问题"一题多解"的参考书。全书分六章，前两章应用思维科学、教育学、心理学的基本原理，结合丰富的实例，论述了"一题多解"在数学教学中的作用；后四章分代数、三角、综合几何，解析几何四部分。通过对若干问题的多种解法的分析和讨论，阐明了解答各类具体问题的思考途径，并附有评注。

本书可供自学青年、中学师生、师范院校师生阅读与参考。

目　录

第一章

为什么要倡导一题多解

众所周知，事物由于所处的系统不同，就会有不同的意义、不同的解释，描述的方法也就不同。同样，一个数学问题，也可以利用不同系统的知识，通过不同途径求得解决，因而就产生了数学问题的“一题多解”。

从数学的“一题多解”中学习数学，不仅是数学学习的一种有效方法，而且这种方法对学习者智力的开发，思维素质的优化，都有其特殊作用。可惜的是，一题多解的这些意义至今仍未被多数人所觉察。例如，许多人的解题教学中，还常常只满足于照搬书本的解法，而不去积极引导学生作新的解题途径的探索，就是很好的一个例证。因此，从教育学、思维学等角度进一步认识一题多解的意义和作用，已是十分迫切的了。

一、一题多解有利于基础知识的巩固、深化和基本技能的增强

唯物辩证法确认，事物的内因是事物变化的根本原因。数学教学中，使学生学过的基础知识得到巩固、深化的关键在于：学生能把学过的知识按照自己理解的深度、广度，结合感觉、知觉、记忆、联想、习惯等认知特征，在头脑中形成一个具有内部规律性的整体结构。由于用多种方法解答同一个问题，需要充分应用学过的一切基础知识、基本技能，凭借对问题的感觉、知觉、联想和以往解题经验，调动一切解题手段才能实现。因此，提倡一题多解利于学生在整体上和内部联系上逐渐建立自己的认知结构，从而促使基础知识的巩固、深化和基本技能的增强。

例如，证明恒等式$x(x-1)(x-2)(x-3)+1=(x^2-3x+1)^2$一题，主要有下面的四种解法：

1°应用乘法公式展开左、右两端，证明它们有相同的结果；

2°左端x与$x-3$，$x-1$与$x-2$分别结合，并令$y=x^2-3x$，进行因式分解，化至右端；

3°用平方差公式分解$(x^2-3x+1)^2-1$，得

$$x(x-1)(x-2)(x-3);$$

4°证明有五个值使左、右两端两个关于x的四次整式取相等值。

这些解法，涉及了恒等式的证明方法、乘法公式、因式分解、方程解的理论等基础知识，以及因式分解中如何恰当

结合因子、实行变量代换等基本技能，求解过程把上述知识和技能织成了一个连通的网络。因此，这样的解题实践，大大有利于学生从整体上、从内部联系上、从应用上去领悟所学知识的精华和规律性，揣摩各种技能贯穿的基本思想，并必将以某种简练的压缩形式纳入自己的认知结构，从而促使知识和技能升华到透过现象、抓住本质、举一反三、触类旁通的境地。

我们知道，任何孤立的、片面的知识，决不能成为巩固的、深刻的知识，只有把握了总体，了解其内部联系并且会灵活应用，所学习的知识才是巩固的、深刻的。因此，提倡一题多解有利于从根本上巩固和深化基础知识，提高和熟练基本技能。

二、一题多解有利于数学能力的增强和思维素质的提高

任何解题过程都是一个揭示矛盾、分析矛盾、解决矛盾的过程，也是一个从问题中收集解题有用的信息，并加以整理、加工的过程。因此，要用多种方法求解同一个问题，就必须善于从不同角度分析题意，寻找已知与未知的矛盾，通过分析矛盾，捕捉对解题有用的信息，然后沿不同线路，采用不同方法，对解题信息进行整理、加工，从而解决问题。实现这一过程，需要具备：

1°对问题独特的分析、综合的能力和鉴别的能力。即能从众多信息中区分出哪些信息是有用的，哪些是无关紧要的，所有有用信息间的相互关系怎样，它们构成怎样实质性的联

系，等等。

2°从一种心理活动迅速转变到另一种心理活动和从陈规俗套中解脱出来的能力。无疑这与数学能力的增强和思维素质的提高是密切相关的。

例如，"试确定等腰三角形的角，使比值$\frac{r}{R}$有最大值（r、R分别表示三角形内切圆、外接圆半径）"一题，要获得问题的多种解法，需要通过题意分析，剔除某些与解题无关的信息，如等腰三角形有旁切圆，顶角的外角平分线平行于底，等等。而保留以下有用信息：

1°等腰三角形的两腰、两底角分别相等，内心I、外心O在底边的高上，通常不重合（图1-1）；

2°等腰三角形的底角与顶角相互被对方所确定；

3°一等腰三角形，若已知底角（或顶角）和底边（或腰），则此等腰三角形就被确定，从而比值$\frac{r}{R}$也被确定；

4°若三角形三边分别为a、b、c，半周长为p，三边所对三角分别为A、B、C，面积为$S_{\triangle ABC}$，则R、r的关系可借助$S_{\triangle ABC}$联结为

$$2R^2\sin A\sin B\sin C=S_{\triangle ABC}=rp;$$

5°建立$\frac{r}{R}$的三角函数表达式后，本问题可归结为三角函数式极值的讨论问题。

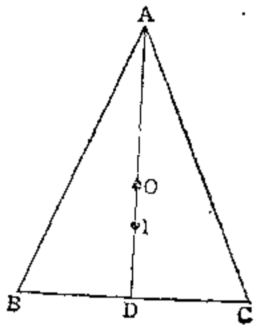

图 1-1

将上述信息重新组合，并加以加工、创造，就有下面的解法：

【解法一】 设$BC=a$，则

$$r=\frac{a}{2}tg\frac{B}{2},\quad R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{a}{2\sin(\pi-2B)}$$

$$=\frac{a}{4\sin B\cdot\cos B},$$

$$\therefore\quad \frac{r}{R}=\frac{a}{2}\text{tg}\frac{B}{2}\Big/\frac{a}{4\sin B\cdot\cos B}=4\sin^2\frac{B}{2}\cdot\cos B$$

$$=2\cos B(1-\cos B)=-2\cos^2 B+2\cos B.$$

易知，当$B=\frac{\pi}{3}$时$\frac{r}{R}$有最大值.

【解法二】 $\because\ \frac{r}{R}=\frac{2R\sin A\sin B\sin C}{p}$

$$=\frac{2\sin A\sin B\sin C}{\sin A+\sin B+\sin C}$$

$$=\frac{2\left(2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\right)\left(2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\right)\left(2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\right)}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

$$=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=2\sin\frac{A}{2}(1-\cos B)$$

$$=2\sin\frac{A}{2}\left(1-\sin\frac{A}{2}\right).$$

又 $\sin\frac{A}{2}>0,\quad 1-\sin\frac{A}{2}>0,\quad \sin\frac{A}{2}+\left(1-\sin\frac{A}{2}\right)=1.$

$\therefore$当$\sin\frac{A}{2}=1-\sin\frac{A}{2}$ 或$A=\frac{\pi}{3}$时，$\frac{r}{R}$有最大值.

但要获得新颖的解法，还需要解脱用三角函数表示$\frac{r}{R}$的

常规方法的束缚，把思维活动转到导求不借助三角函数而直接讨论$\frac{r}{R}$上来。由信息1°联想到与OI^2相关的欧拉定理，就有

【解法三】 $\because\ OI^2=R^2-2Rr$，

$$\therefore\ 2\left(\frac{r}{R}\right)=1-\frac{OI^2}{R^2}.$$

又 $\because\ \frac{OI^2}{R^2}\geqslant 0$， $\therefore$当$OI=0$，即$\triangle ABC$为正三角形时，$\frac{r}{R}$最大。

由此可见，研讨一个问题的多种解法，有利于分析和综合能力的培养，也有利于思维的广阔性、灵活性、敏锐性、创造性等素质的提高。伟大科学家爱因斯坦说："学校的目标应是培养独立思考和独立工作的人"。一个人从学校毕业，无论升学、就业或从事科学研究，必然要面临新任务或新问题，这时就必须具备从实际中提炼数学问题、解决数学问题的能力和具有创造性思维的能力。当今，知识更新日新月异，科学技术发展迅猛异常，这种数学能力的培养和思维素质的提高，具有更为重要的意义。

三、一题多解有利于激发求知欲和培养刻苦钻研精神

心理学研究表明，学生的学习兴趣、学习态度和学习积极性对提高学习效果有重要影响。孔子说："不愤不启，不悱

不发，举一隅不以三隅反，则不复也”。愤是“心求通而未得之意”，悱是“口欲言而未能之貌”。孔子说的“愤”和“悱”，就是指教学中教师要激发学生的旺盛求知欲，以提高他们的学习兴趣。提倡一题多解，即得到一种解法还不满足，还要思考第二种、第三种……，获得常规的解法后，要探索独特的、新颖的解法。这样，学生永远不满足于自己的学习现状，他们完全“愤”了起来，“悱”了起来，旺盛的求知欲得到了极大的激发。一旦他们找到了问题的最优解，他们从数学中得到的乐趣便是回味无穷的，就会大大提高学生学习的兴趣。此外，通过一题多解实践，学生必然认识到：知识愈多、愈深、愈广、愈融会贯通，解题方法就愈多、愈灵活、解题规律就掌握得愈好。没有扎实的基础知识，要想灵活解题、多法解题是断然不可能的。“万丈高楼平地起”，“千里之行始于足下”。学习数学只有脚踏实地，循序渐进，刻苦钻研，才能成功。因此，提倡一题多解，有利于激发学生的求知欲和养成刻苦钻研的良好学风。

近几年来，由于受片面追求升学率的影响，中学数学教学中出现了“题海战术”的教学方法，这种方法以高考为目标，以大量求解各种类型题为中心组织教学，全然不注意教学中理论联系实际、循序渐进和启发式等原则的贯彻，不注意基础知识的加强和分析问题、解决问题能力的培养，更不注意创造性思维能力的培养。这种教学方法，妨碍了青少年一代的智力发展和能力增强，也摧残了他们的身体健康。

思维科学中，有人把人类思维实践由低到高地划分为原始思维—圆点型思维—直线型思维—平面型思维—立体型思维等五个阶段。原始型思维是直观、具体、形象的感性认识活动，有着简单的综合和归纳，他们用手势、声音来比拟和

形容对某事物的见闻，或表达感情。圆点型思维是一种封闭性的思维，具有排新性。直线型思维是有纵而没有横的思维，习惯性强，缺乏创造性和弹性。平面型思维比直线型思维前进了一步，但它不能多层次、整体地认识事物，因而在认识事物的深度和广度上有局限性。立体型思维表现出上下左右、纵横交错的立体结构，具有多路性、多维性、多层次性和活跃性、锐性、创造性等特点。显然，“题海战术”的教学方法是不能培养立体型思维人材的。为了培养开拓型人材，就必须废除“题海战术”的教学方法，实行“启发式”教学、“发现法”教学，大力提倡对问题多种不同解法的探索和发现，重视解法的优与劣、常规与独特之间的比较，积极引导学生从一题多解中学习数学知识、数学方法和思维方法。这样，学生的知识基础、思维素质定会有较大的提高。

第二章 一题多解过程中的思维活动

一题多解要求人们尽可能多地找出问题的不同解法及其最优解法，因此需要人们不受常规解题方法的束缚，通过逻辑思维、形象思维、灵感思维的作用，迸发出创造性来实现。因此，一题多解的过程是一种创造性思维的过程。在这一思维过程中，人们按怎样的思维方式进行思考呢？

本章旨在通过对辐射思考、辐集思考、相似思考、正向和反向思考、分合思考等几种思维形式的具体讨论，展示一题多解过程中思维活动的一些基本形式，为探索一个问题的多种解法，从思维活动上提供一些理论依据。

一、辐射思考

一题多解中思维的最基本的活动形式是辐射思考。

辐射思考，美国心理学家吉尔福特称之为"分歧思考"，这种思考"是从所给的信息中产生信息，其着重点是从同一的来源中产生各式各样为数众多的输出，很可能会发生转移

作用。”

例如，将数$\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$拿到几个高中学生中，他们会辐射出各种各样的想法：

1°它是$\sin\frac{\pi}{8} \Big/ \cos\frac{\pi}{8}$；

2°它是$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)$或$\dfrac{\sin\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}}$；

3°它是$\operatorname{tg}\frac{1}{3}\left(\frac{3}{8}\pi\right)$或$\operatorname{tg}\frac{1}{5}\left(\frac{5}{8}\pi\right)$，……，

4°它是$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{8}\right)$或$\dfrac{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}$，……；

5°它是方程$\frac{2x}{1-x^2}=1$的正根；

6°在直角边为单位长的等腰直角三角形ABC中（$\angle C=90°$），若延长CB至D，使$BD=BA$，并连结AD，得$Rt\triangle ADC$（图2-1），这时它是$\angle ADC$的正切，等等。

又如，公式$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，用辐射式思考思维，得到：

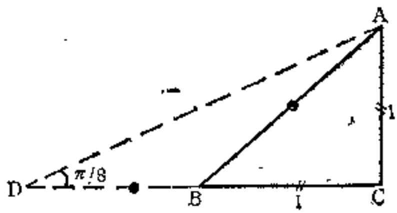

图 2-7

1°在证明或化简时，$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$与1可以互相替换；

2°可以把它作为已知一个角的余弦（或正弦）去计算这个角的正弦（或余弦）的依

据；

3°可以用来说明任一角的正弦或余弦总不大于1；

4°可以用来说明"如果两个数的平方和等于1，那么其中的一个数等于一个角的正弦，而第二个数等于这个角的余弦."等等.

由于这种思维是朝着不同方向进行的，所以运用这种思维方法思考，探索到问题多种解法的可能性就大.美国当代著名数学家马丁·加德纳说："你考虑的可能性(不管它多么异乎寻常)越多，也就越容易找到真正的诀窍，这是所有具备创新能力的数学家的奥秘之一."

如求$\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$的值，按上面的辐射思考，对2°、4°、5°、6°都有比较简捷的解法.

【解法一】 $$\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}=\operatorname{tg}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$=\sqrt{2}-1.$$

【解法二、三】 令$x=\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$，

$$\frac{2x}{1-x^2}=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1.$$

∴ $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$是方程

$$x^2+2x-1=0$$

的正根.