应用数学 电类

YINGYONGSHUXUE

YINGYONGSHUXUE

主　审　岳忠玉

总主编　胡红亮

主　编　赵芳玲

西北大学出版社

应用数学 电类

YINGYONGSHUXUE

主　审　岳忠玉
总主编　胡红亮
主　编　赵芳玲

西北大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

应用数学:电类/胡红亮,赵芳玲主编.—西安:西北大学出版社,2008.2

ISBN 978-7-5604-2416-3

Ⅰ.应… Ⅱ.①胡… ②赵… Ⅲ.应用数学—高等学校:技术学校—教材 Ⅳ.029

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 010997 号

书　　名:应用数学(电类)
总 主 编:胡红亮
主　　编:赵芳玲
出版发行:西北大学出版社
通信地址:西安市太白北路 229 号　邮编:710069　电话:029—88303313
经　　销:新华书店经销
印　　刷:陕西信亚印务有限公司
开　　本:787mm×1092mm　1/16
印　　张:12.75
字　　数:295 千字
版　　次:2008 年 2 月第 1 版　2008 年 2 月第 1 次印刷
书　　号:ISBN 978-7-5604-2416-3
定　　价:20.00 元

前　言

这套《应用数学》教材是为适应高职高专教育培养高技能型人才的需要，更好地为专业教学和学习服务，在多年教学实践的基础上所形成的。

1985 年，西安航空技术高等专科学校被原国家教育委员会批准和另外两所学校进行“四五套办”教学模式的试点，最早开始了高职高专教育的改革和建设工作。从那时起，数学课程组就围绕数学课程在高职高专教育中的地位和作用、数学课程的内容体系等问题充分调研，多次与专业教师讨论，在教学实践的基础上逐步构建起适应高职高专教育需要的数学课程内容体系，这套教材就是数学课程改革成果的结晶，可以说这套教材不是“编”出来的，而是在长期教学过程中“教”出来、“改”出来的。

这套《应用数学》教材力求贯彻“以应用为目的，以必需和够用为度”的原则，在编写过程中遵循以下要求：

1. 不拘泥于数学科学自身的系统性和逻辑性；
2. 对基础理论不追求严格的论证和推导，只作简要的说明；
3. 不追求过分复杂的计算和变换。

这套教材由胡红亮副教授任总主编，承担了全套教材的编写大纲和框架安排的工作，岳忠玉副教授担任全套书的主审工作。

本教材由赵芳玲副教授担任主编，承担了本教材内容的校对、统稿和定稿工作。本教材共有六章，主要内容包括：线性代数初步（林希）、复变函数初步（赵芳玲）、傅立叶变换初步（韩慧蓉）、拉普拉斯变换（赵芳玲）、概率论初步（胡红亮）和数理统计初步（李小光）等。

限于编者的水平，书中难免存在缺欠和不足，诚挚希望读者批评指正，从而使编者更明确了解教材及教学中的短长，并加以改进。

编者

2008 年元月

目　录

第一章　线性代数初步

线性代数是数学的一个重要分支,行列式和矩阵来源于对线性方程组解的研究,它们既是线性代数的研究对象,又是解决线性代数问题的有力工具.本章将介绍有关行列式和矩阵的一些基础知识,同时利用它们讨论一般线性方程组的解法.

§1.1　n 阶行列式的概念

1.1.1　二、三阶行列式

设二元线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1}$$

利用消元法可得,当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时,方程组(1) 的解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

为了便于记忆和讨论上述解,我们引入二阶行列式的概念.

定义 1　规定

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

我们称左端为**二阶行列式**,称右端为二阶行列式的展开式. $a_{ij}(i = 1,2;j = 1,2)$ 称为行列式的**元素**,横排称为**行**,纵排称为**列**,行列式从左上到右下的元素的连线叫**主对角线**,从右上到左下的元素的连线叫**次对角线**.

可以看出,二阶行列式的值等于主对角线上两数之积减去次对角线上两数之积.

这样二元线性方程组(1) 的解可表示为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

于是,当方程组(1) 的**系数行列式** $D \neq 0$ 时,它的解可表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}$$

类似地,对于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{2}$$

引入三阶行列式的概念以便于表示它的解.

定义 2 规定

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \tag{3}$$

我们称左端为**三阶行列式**,称右端为**三阶行列式按第一行的展开式**. $a_{ij}(i=1,2,3;j=1,2,3)$ 称为三阶行列式的**元素**,展开式中的三个二阶行列式称为元素 a_{11},a_{12},a_{13} 的余子式,分别记为 M_{11},M_{12},M_{13}. 即

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

可以看出,在三阶行列式 D 中划去 $a_{1j}(j=1,2,3)$ 所在的行和列上的所有元素而得到的二阶行列式就是元素 a_{1j} 的**余子式** M_{1j}. 称 $(-1)^{1+j}M_{1j}$ 为元素 a_{1j} 的**代数余子式**,记做 A_{1j},于是(3) 式可表示为

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

将(3) 式右端的三个二阶行列式展开,得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

其右端称为**三阶行列式的展开式**,它是由不同行不同列的三个元素相乘而得到的六项的代数和,并且主对角线和与主对角线平行的三个元素之积取正号,次对角线和与次对角线平行的三个元素之积取负号. 这种展开法称为**对角线展开法**. 对角线展开法只适用于二、三阶行列式的计算.

例 1 计算下列行列式:

$$(1) D = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 7 & 0 & 5 \end{vmatrix}; \qquad (2) D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

解 按对角线展开法

(1) $D = 3\times4\times5 + 7\times(-1)\times6 + 2\times0\times1 - 7\times4\times1 - 2\times(-1)\times5 - 0\times6\times3 = 0$;

(2) $D = a_{11}a_{22}a_{33} + 0\cdot a_{21}a_{32} + 0\cdot0\cdot a_{31} - 0\cdot a_{22}a_{31} - a_{21}\cdot0\cdot a_{33} - a_{11}a_{32}\cdot0$
$= a_{11}a_{22}a_{33}$.

主对角线一侧的元素全为零的行列式称为**三角形行列式**,又分为上三角形行列式和下三角形行列式. 例 1(2) 是下三角形行列式,由对角线展开法可知,三角形行列式的值等于主对角线上元素之积.

1.1.2 n 阶行列式

前面我们用二阶行列式给出了三阶行列式的定义,对一般 n 阶行列式有如下递推式定义:

定义 3 设 $(n-1)$ 阶行列式已经定义,则 n 阶行列式是由 n^2 个数构成,并规定

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} \tag{4}$$

我们称左端为 n **阶行列式**,称右端为 n **阶行列式按第一行的展开式**. $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 称为 n 阶行列式的**元素**. 在 n 阶行列式中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列上的所有元素后得到的 $(n-1)$ 阶行列式,称为元素 a_{ij} 的余子式,记作 M_{ij},把 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为元素 a_{ij} 的**代数余子式**,记作 A_{ij}.

例 2 利用定义求下列行列式的值:

$$(1) D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{vmatrix}; \qquad (2) D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 (1)

$$D = 2 \times \begin{vmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \times \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \times (-4) \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + 2 \times 2 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= -8 - 18 = 26$$

(2) 根据行列式的递推定义得

$$D = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}.$$

习题 1—1

用递推定义求下列行列式的值:

1. $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}$; 2. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$; 3. $\begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix}$;

4. $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$; 5. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; 6. $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$;

7. $\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ c & 0 & b \\ 0 & c & a \end{vmatrix}$；

8. $\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & 0 \end{vmatrix}$；

9. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$；

10. $\begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ 0 & b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$；

11. $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & a_{15} \\ 0 & a_{22} & 0 & a_{24} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & 0 \\ 0 & a_{42} & 0 & a_{44} & 0 \\ a_{51} & 0 & 0 & 0 & a_{55} \end{vmatrix}$；

12. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2(n-1)} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{(n-1)2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

§ 1.2　n 阶行列式的性质

为了简化 n 阶行列式的计算，下面我们不加证明地引入 n 阶行列式的性质.

将一个行列式 D 的行与列依次互换所得到的行列式称为行列式 D 的**转置行列式**，记作 D^T，即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

显然 $(D^T)^T = D$.

性质 1　行列式 D 与它的转置行列式 D^T 的值相等.

由性质 1 可知，行列式对行成立的性质，对列也一定成立．由此性质 1 和上一节的例 2(2) 可以得到：n 阶上三角形行列式的值等于它的主对角线元素的乘积. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{12}\cdots a_{nn}$$

性质 2　对调行列式的任意两行(或两列)，行列式的值变号. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 3 行列式某一行(列)元素的公因子可以提到行列式的外面.

推论 1 如果行列式的某一行(列)元素都是零,则行列式的值为零.

性质 4 如果行列式的两行(列)对应元素相同,则行列式的值为零.

推论 2 如果行列式的两行(列)对应成比例,则行列式的值为零.

推论 3 行列式某一行(列)的各元素与另一行(列)对应元素的代数余子式的乘积之和恒为零.即

$$a_{j1}A_{i1} + a_{j2}A_{i2} + \cdots + a_{jn}A_{in} = 0 \quad (i \neq j)$$

性质 5 如果行列式的某一行(列)的每个元素都是二项式,则行列式等于把这些二项式各取一项作相应的行(列),而其余的行(列)不变所成的两个行列式的和.即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 6 把行列式某一行(列)的元素同乘以常数 k 后,加到另一行(列)的对应元素上,行列式的值不变.即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1}+ka_{s1} & a_{r2}+ka_{s2} & \cdots & a_{rn}+ka_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 6 可由性质 5 和推论 2 得到.

由行列式的定义我们知道,n 阶行列式可按第一行展开计算,又因为行列式可以两行(列)对调,因此 n 阶行列式可按任意一行(列)展开计算,这就是下面的性质 7.

性质 7 (拉普拉斯定理)行列式 D 等于它的任意一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和.即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj} \quad (j = 1,2,\cdots,n)$$

通常把性质 7 叫做行列式 D 按第 i 行(或 j 列)的展开式(也称为拉普拉斯展开式),综合性质 7 和推论 3 可以得到:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \begin{cases} D, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}; \qquad \sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = \begin{cases} D, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}.$$

符号说明:在以后的计算中,为简明起见,用方括号内数字表示行(列)的位置;用符号 $\leftrightarrow$ 表示行(列)对调. 例如[1]$\leftrightarrow$[3] 表示第 1 行(列)与第三行(列)对调;[1]·10 表示对第一行(列)乘以 10. 并把行性质变换写在等号的上方,列性质变换写在等号下方.

三角形行列式的值等于主对角线元素之积. 应用行列式的性质,若能把行列式化为三角形行列式,可使计算简便. 这种计算方法称为“化三角形法”.

例 1 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

解 化为上三角形行列式

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} \xlongequal[]{\substack{[2]+[1] \\ [3]+[1]\cdot(-1) \\ [4]+[1]}} \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{[2]\leftrightarrow[3]} \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal[]{\substack{[3]+[2]\cdot 4 \\ [4]+[2]\cdot 4}} \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{vmatrix} = -11.$$

例 2 计算 n 阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.

解 这个行列式的特点是各列元素之和都为 $n-1$,为了简化先将第 $2,3,\cdots,n$ 行都加到第一行,再提公因子,即

$$D = \begin{vmatrix} n-1 & n-1 & n-1 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (n-1)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

第一行乘以 -1 分别加到其余各行,化为上三角形行列式,即

$$D=(n-1)\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&-1&0&\cdots&0\\0&0&-1&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&-1\end{vmatrix}=(-1)^{n-1}(n-1).$$

一般地,化上三角形行列式的步骤如下:

(1) 把 a_{11} 变换为 1 或 -1(尽量避免出现分数).

(2) 把 a_{11} 下方的第一列元素全部变换为零.

(3) 依次类似地把主对角线 $a_{ii}(i=2,\cdots,n)$ 所在列下方的元素全部变换为零($a_{ii}(i=1,2,\cdots,n-1)$ 不能为零.若出现零,可以通过变换使得主对角线上的元素不为零).

在利用行列式的性质计算或证明时,也可以使某行(列)的元素尽量含零多些,再利用性质 7 展开以降低阶数,使运算简化,这是计算行列式的另一方法. 这种计算方法称为“降阶法”.

例 3 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&2&0&1\\1&3&5&0\\0&1&5&6\\1&3&3&4\end{vmatrix}.$$

解

$$D=\begin{vmatrix}1&2&0&1\\1&3&5&0\\0&1&5&6\\1&3&3&4\end{vmatrix}\xlongequal[{[4]+[1](-1)}]{[2]+[1](-1)}\begin{vmatrix}1&2&0&1\\0&1&5&-1\\0&1&5&6\\0&1&3&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&5&-1\\1&5&6\\1&3&3\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{[2]+[1](-1)}\begin{vmatrix}1&5&-1\\0&0&7\\1&3&3\end{vmatrix}=(-1)^{2+3}\times7\begin{vmatrix}1&5\\1&3\end{vmatrix}=-7\times(3-5)=14.$$

例 4 计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}a&b&0&\cdots&0&0\\0&a&b&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&a&b\\b&0&0&\cdots&0&a\end{vmatrix}.$$

解 按第一列展开,得

$$D=a\begin{vmatrix}a&b&\cdots&0&0\\0&a&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&a&b\\0&0&\cdots&0&a\end{vmatrix}+(-1)^{n+1}b\begin{vmatrix}b&0&\cdots&0&0\\a&b&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&a&0\\0&0&\cdots&a&b\end{vmatrix}$$

$$= a^n + (-1)^{n+1} b^n.$$

习题1—2

1. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$；　(4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$；

(5) $\begin{vmatrix} b & a & a & a \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ a & a & a & b \end{vmatrix}$；　(6) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 3 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 5 \end{vmatrix}$；

(7) $\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ a & b & a & b \\ a & a & b & a \\ b & b & b & a \end{vmatrix}$；　(8) $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$；

(9) $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix}$；　(10) $\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$.

2. 证明：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2-bc \\ 1 & b & b^2-ca \\ 1 & c & c^2-ab \end{vmatrix} = 0$；　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$；

(3) $\begin{vmatrix} \lambda+2 & 14 & 2 \\ -2 & \lambda-8 & -2 \\ -2 & -8 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-2)(\lambda-6)$；

(4) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ c_{11} & c_{12} & b_{11} & b_{12} \\ c_{21} & c_{22} & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$；

(5) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix} = a^4$;

(6) $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix} = 4(a-c)(c-b)(b-a)$;

(7) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\beta & \sin\beta \\ 0 & 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix} = 1$.

§1.3 克莱姆法则

运用行列式的性质,我们给出 n 元线性方程组的解的行列式表示法.

定理(克莱姆法则) 如果 n 元非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1}$$

的系数行列式 $D \neq 0$. 即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

那么方程组(1) 有且只有唯一解

$$x_j = \frac{D_j}{D}(j = 1,2,\cdots,n)$$

其中 $D_j(j = 1,2,\cdots,n)$ 是把 D 中第 j 列的元素换成相应的常数项所得到的行列式,即

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(j-1)} & b_1 & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(j-1)} & b_2 & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(j-1)} & b_n & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明 用 D 中第 j 列的各元素的代数余子式 $A_{1j},A_{2j},\cdots,A_{nj}(j = 1,2,\cdots,n)$ 依次乘方程组(1) 的第一、第二 、…、第 n 个方程,再将等式两端分别相加,整理,有

$$(a_{11}A_{1j} + a_{21}A_{2j} + \cdots + a_{n1}A_{nj})x_1 + \cdots + (a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj})x_j + \cdots + (a_{1n}A_{1j} + a_{2n}A_{2j} + \cdots + a_{nn}A_{nj})x_n = b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \cdots + b_nA_{nj}$$

即

$$0\cdot x_1+\cdots+D\cdot x_j+\cdots+0\cdot x_n=D_j$$

所以

$$x_j=\frac{D_j}{D}\quad(1,2,\cdots,n)$$

例 1 解方程组

$$\begin{cases}x_1-x_2+2x_4=-5\\3x_1+2x_2-x_3-2x_4=6\\4x_1+3x_2-x_3-x_4=0\\2x_1-x_3=0\end{cases}$$

解 因为

$$D=\begin{vmatrix}1&-1&0&2\\3&2&-1&-2\\4&3&-1&-1\\2&0&-1&0\end{vmatrix}\xlongequal[{[1]+[3]\cdot 2}]{}\begin{vmatrix}1&-1&0&2\\1&2&-1&-2\\2&3&-1&-1\\0&0&-1&0\end{vmatrix}$$

$$=(-1)\times(-1)^{4+3}\begin{vmatrix}1&-1&2\\1&2&-2\\2&3&-1\end{vmatrix}\xlongequal{\substack{[2]+[1]\cdot(-1)\\ [3]+[1]\cdot(-2)}}\begin{vmatrix}1&-1&2\\0&3&-4\\0&5&-5\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}3&-4\\5&-5\end{vmatrix}=5\neq 0$$

$$D_1=\begin{vmatrix}1&-5&0&2\\3&6&-1&-2\\4&0&-1&-1\\2&0&-1&0\end{vmatrix}=(-1)\times(-1)^{4+3}\begin{vmatrix}-5&-1&2\\6&2&-2\\0&3&-1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[{[2]+[3]\cdot 3}]{}\begin{vmatrix}-5&5&2\\6&-4&-2\\0&0&-1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-5&5\\6&-4\end{vmatrix}=10$$

经过计算还可得到

$$D_2=\begin{vmatrix}1&-5&0&2\\3&6&-1&-2\\4&0&-1&-1\\2&0&-1&0\end{vmatrix}=-15,\quad D_3=\begin{vmatrix}1&-1&-5&2\\3&2&6&-2\\4&3&0&-1\\2&0&0&0\end{vmatrix}=20,$$

$$D_4=\begin{vmatrix}1&-1&0&-5\\3&2&-1&6\\4&3&-1&0\\2&0&-1&0\end{vmatrix}=-25.$$

所以方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=2,x_2=\frac{D_2}{D}=-3,x_3=\frac{D_3}{D}=4,x_4=\frac{D_4}{D}=-5.$$

若线性方程组(1) 的常数项都为零时,即

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \tag{2}$$

称为**齐次线性方程组**.

这时 $D_j = 0,(j = 1,2,\cdots,n)$ 由克莱姆法则可知当系数行列式 $D \neq 0$ 时,齐次线性方程组(1) 有唯一解

$$X_j = 0 \qquad (j = 1,2,\cdots,n)$$

全部都是零的解称为**零解**. 于是有

推论 齐次线性方程组(2) 总有解,且

若 $D \neq 0$,则方程组有唯一零解;若 $D = 0$,方程组有非零解.

例 2 若齐次线性方程组 $\begin{cases} mx_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + mx_2 = 0 \end{cases}$ 有非零解,试求 m 的值.

解 系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 1 = 0$$

即 $m = \pm 1$ 时,该方程组有非零解.

这里应当注意到,克莱姆法则只适用于 n 元线性方程组的系数行列式 $D \neq 0$ 的情形,当 $D = 0$ 时(以后我们会讨论到),方程组有两种可能,或者各方程间存在矛盾,无解,例如 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 = 3 \end{cases}$;或者有方程重合,即至少有一个方程不是独立的,有无数组解,例如 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 = 4 \end{cases}$.

使用克莱姆法则解线性方程组有其局限性,今后我们将介绍矩阵并以其作为工具来求解一般线性方程组.

习题 1－3

1. 解下列线性方程组:

$$(1)\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_4 = 1 \end{cases};$$

$$(2)\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - xc3 - 2x_4 = -4 \\ 2x_1 - 3x_2 - xc3 - x_4 = -6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4 \end{cases};$$