

现代远程教育系列教材

www . esp . com . cn

# 经济数学

刘文龙 谭焕忠 编著



经济科学出版社

现代远程教育系列教材

# 经济数学

刘文龙 谭焕忠 编著

经济科学出版社

责任编辑：范莹

责任校对：董蔚挺

版式设计：代小卫

技术编辑：董永亭

## 经济数学

刘文龙 谭焕忠 编著

经济科学出版社出版、发行 新华书店经销

社址：北京海淀区阜成路甲 28 号 邮编：100036

总编室电话：88191217 发行部电话：88191540

网址：[www. esp. com. cn](http://www.esp.com.cn)

电子邮件：[esp@ esp. com. cn](mailto:esp@esp.com.cn)

欣舒印刷厂印刷

海跃装订厂装订

787×1092 16 开 14.25 印张 300000 字

2005 年 8 月第一版 2005 年 8 月第一次印刷

印数：0001—4500 册

ISBN 7-5058-5049-0/F·4321 定价：22.00 元

（图书出现印装问题，本社负责调换）

（版权所有 翻印必究）

**图书在版编目 (CIP) 数据**

经济数学 / 刘文龙, 谭焕忠编著. —北京: 经济科学出版社, 2005. 8

ISBN 7-5058-5049-0

I. 经... II. ①刘... ②谭... III. 经济数学-高等教育: 远距离教育-教材 IV. F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2005) 第 072813 号

# 现代远程教育系列教材

## 编审委员会

主任委员：

阙澄宇 杨 青

委 员（以姓氏笔画为序）：

|     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| 王立国 | 王来福 | 王绍媛 | 史 达 | 刘永泽 |
| 吴大军 | 李洪心 | 张军涛 | 张树军 | 於向平 |
| 林 波 | 林清高 | 武献华 | 姜文学 | 赵建国 |

# 总序

随着知识经济和信息化时代的到来，终身学习成为社会大趋势，网络教育作为现代远程教育的一种先进模式正在成为人们终身学习的首选形式。

网络教育突破了时间和空间的限制，使高等学校的优秀教育资源冲破校园围墙的限制，让更多的学习者共享，具有开放性、交互性、共享性、协作性、自主性等特点。通过构造现代远程教育的“学习环境”，提供学生自主建构知识的空间，帮助人们随时随地学习，实现学生个体与群体的融合，从而满足人们在校园外接受高等教育的愿望。

经历了近十年的光阴，现代远程教育由萌芽到蓬勃发展。迄今为止已经发展到67所远程教育试点院校，学生近百万人。各高校网络教育学院结合财经、管理学科专业适合网络教育的特点，近年来推出了远程教育高等学历课程体系，最大限度地满足学生个性化自主学习的需要和社会对财经、管理人才的需要。为了确保网络教育质量，本着“我们的产品是教育服务”的宗旨，各高等学校网络教育学院正在努力建立标准化的网络教育管理系统，为学生提供全面周到的服务，建设有中国特色的一流网络大学。

网络教育的不断发展对网络学习教材建设提出新的挑战。如何在尊重传统教育系统性的同时，在教材的内容上更能满足人们继续学习的需要，增强教材的实用性和适用性；在教材的表现形

随着知识经济和信息化时代的到来，终身学习成为社会大趋势，网络教育作为现代远程教育的一种先进模式正在成为人们终身学习的首选形式。

网络教育突破了时间和空间的限制，使高等学校的优秀教育资源冲破校园围墙的限制，让更多的学习者共享，具有开放性、交互性、共享性、协作性、自主性等特点。通过构造现代远程教育的“学习环境”，提供学生自主建构知识的空间，帮助人们随时随地学习，实现学生个体与群体的融合，从而满足人们在校园外接受高等教育的愿望。

经历了近十年的光阴，现代远程教育由萌芽到蓬勃发展。迄今为止已经发展到67所远程教育试点院校，学生近百万人。各高校网络教育学院结合财经、管理学科专业适合网络教育的特点，近年来推出了远程教育高等学历课程体系，最大限度地满足学生个性化自主学习的需要和社会对财经、管理人才的需要。为了确保网络教育质量，本着“我们的产品是教育服务”的宗旨，各高等学校网络教育学院正在努力建立标准化的网络教育管理系统，为学生提供全面周到的服务，建设有中国特色的一流网络大学。

网络教育的不断发展对网络学习教材建设提出新的挑战。如何在尊重传统教育系统性的同时，在教材的内容上更能满足人们继续学习的需要，增强教材的实用性和适用性；在教材的表现形

随着知识经济和信息化时代的到来，终身学习成为社会大趋势，网络教育作为现代远程教育的一种先进模式正在成为人们终身学习的首选形式。

网络教育突破了时间和空间的限制，使高等学校的优秀教育资源冲破校园围墙的限制，让更多的学习者共享，具有开放性、交互性、共享性、协作性、自主性等特点。通过构造现代远程教育的“学习环境”，提供学生自主建构知识的空间，帮助人们随时随地学习，实现学生个体与群体的融合，从而满足人们在校园外接受高等教育的愿望。

经历了近十年的光阴，现代远程教育由萌芽到蓬勃发展。迄今为止已经发展到67所远程教育试点院校，学生近百万人。各高校网络教育学院结合财经、管理学科专业适合网络教育的特点，近年来推出了远程教育高等学历课程体系，最大限度地满足学生个性化自主学习的需要和社会对财经、管理人才的需要。为了确保网络教育质量，本着“我们的产品是教育服务”的宗旨，各高等学校网络教育学院正在努力建立标准化的网络教育管理系统，为学生提供全面周到的服务，建设有中国特色的一流网络大学。

网络教育的不断发展对网络学习教材建设提出新的挑战。如何在尊重传统教育系统性的同时，在教材的内容上更能满足人们继续学习的需要，增强教材的实用性和适用性；在教材的表现形

随着知识经济和信息化时代的到来，终身学习成为社会大趋势，网络教育作为现代远程教育的一种先进模式正在成为人们终身学习的首选形式。

网络教育突破了时间和空间的限制，使高等学校的优秀教育资源冲破校园围墙的限制，让更多的学习者共享，具有开放性、交互性、共享性、协作性、自主性等特点。通过构造现代远程教育的“学习环境”，提供学生自主建构知识的空间，帮助人们随时随地学习，实现学生个体与群体的融合，从而满足人们在校园外接受高等教育的愿望。

经历了近十年的光阴，现代远程教育由萌芽到蓬勃发展。迄今为止已经发展到67所远程教育试点院校，学生近百万人。各高校网络教育学院结合财经、管理学科专业适合网络教育的特点，近年来推出了远程教育高等学历课程体系，最大限度地满足学生个性化自主学习的需要和社会对财经、管理人才的需要。为了确保网络教育质量，本着“我们的产品是教育服务”的宗旨，各高等学校网络教育学院正在努力建立标准化的网络教育管理系统，为学生提供全面周到的服务，建设有中国特色的一流网络大学。

网络教育的不断发展对网络学习教材建设提出新的挑战。如何在尊重传统教育系统性的同时，在教材的内容上更能满足人们继续学习的需要，增强教材的实用性和适用性；在教材的表现形

随着知识经济和信息化时代的到来，终身学习成为社会大趋势，网络教育作为现代远程教育的一种先进模式正在成为人们终身学习的首选形式。

网络教育突破了时间和空间的限制，使高等学校的优秀教育资源冲破校园围墙的限制，让更多的学习者共享，具有开放性、交互性、共享性、协作性、自主性等特点。通过构造现代远程教育的“学习环境”，提供学生自主建构知识的空间，帮助人们随时随地学习，实现学生个体与群体的融合，从而满足人们在校园外接受高等教育的愿望。

经历了近十年的光阴，现代远程教育由萌芽到蓬勃发展。迄今为止已经发展到67所远程教育试点院校，学生近百万人。各高校网络教育学院结合财经、管理学科专业适合网络教育的特点，近年来推出了远程教育高等学历课程体系，最大限度地满足学生个性化自主学习的需要和社会对财经、管理人才的需要。为了确保网络教育质量，本着“我们的产品是教育服务”的宗旨，各高等学校网络教育学院正在努力建立标准化的网络教育管理系统，为学生提供全面周到的服务，建设有中国特色的一流网络大学。

网络教育的不断发展对网络学习教材建设提出新的挑战。如何在尊重传统教育系统性的同时，在教材的内容上更能满足人们继续学习的需要，增强教材的实用性和适用性；在教材的表现形

随着知识经济和信息化时代的到来，终身学习成为社会大趋势，网络教育作为现代远程教育的一种先进模式正在成为人们终身学习的首选形式。

网络教育突破了时间和空间的限制，使高等学校的优秀教育资源冲破校园围墙的限制，让更多的学习者共享，具有开放性、交互性、共享性、协作性、自主性等特点。通过构造现代远程教育的“学习环境”，提供学生自主建构知识的空间，帮助人们随时随地学习，实现学生个体与群体的融合，从而满足人们在校园外接受高等教育的愿望。

经历了近十年的光阴，现代远程教育由萌芽到蓬勃发展。迄今为止已经发展到67所远程教育试点院校，学生近百万人。各高校网络教育学院结合财经、管理学科专业适合网络教育的特点，近年来推出了远程教育高等学历课程体系，最大限度地满足学生个性化自主学习的需要和社会对财经、管理人才的需要。为了确保网络教育质量，本着“我们的产品是教育服务”的宗旨，各高等学校网络教育学院正在努力建立标准化的网络教育管理系统，为学生提供全面周到的服务，建设有中国特色的一流网络大学。

网络教育的不断发展对网络学习教材建设提出新的挑战。如何在尊重传统教育系统性的同时，在教材的内容上更能满足人们继续学习的需要，增强教材的实用性和适用性；在教材的表现形

式上更直观,更易理解,更便于自学,是我们正在努力解决的一个重大课题。为此,我们结合网络教学和课件的特点,组织具有丰富教学经验的老师编写了这套现代远程教育系列教材,尽力做到知识点明确,突出重点要点,使之便于学生自学。同时,在教材内容上也更强调实用性和适用性。意在使这套教材既适用于现代远程教育学习者使用,同时也适合财经管理在校修学的学生和在职人员学习和自学。

教材的改革是教育理念转变的结果,而教育理念的转变是一个长期而艰巨的过程。它不仅需要教师的努力,更需要广大学生和读者的积极参与。我们热切地希望读者对这套教材提出自己的意见和建议,使这套教材不断得以完善。

这套丛书的编写得到了经济科学出版社的大力支持,对此套丛书的选题策划到整体设计都提出了中肯的、有建设性的建议,为其能够及时的出版与广大读者见面付出了大量的、艰辛的努力,在此表示衷心的感谢。

现代远程教育系列教材编委会

杨青

2003年9月

# 前 言

---

随着我国社会主义经济建设的迅猛发展和经济体制改革的深入，经济数学方法的研究和应用日益受到广大经济理论教学、研究人员和实际工作者的重视。

为了提高现代远程高等学历教育的教学质量，遵循网络教育应用型人才的培养目标，针对从业人员继续教育的特点，在多年使用学校自编教材的基础上，我们编写了经济数学基础教材《经济数学》。作为经济管理类网络教育的教材，我们既着眼于对经济活动作定量分析所必需的数学知识，又兼顾到学生进行后继课程和进一步学习的需要，力求在理论上简明，在叙述上通俗易懂，每章都配备了一定数量的习题，供读者练习。

本书由刘文龙、谭焕忠主编，谭焕忠编写第一、二章，刘文龙编写其他各章及附录，最后由刘文龙总纂定稿。

在编写和出版过程中，得到了东北财经大学网络教育学院领导、老师以及经济科学出版社领导和同志们的大力支持，在此深表谢意。

限于我们的水平和经验，编写中错误在所难免，恳请读者批评指正。

编 者

2005 年 3 月

# 目 录

---

|                       |    |
|-----------------------|----|
| 第一章 函数、极限与连续 .....    | 1  |
| § 1.1 函数 .....        | 1  |
| 1.1.1 常量与变量 .....     | 1  |
| 1.1.2 函数概念 .....      | 2  |
| 1.1.3 函数的几个简单性质 ..... | 5  |
| 1.1.4 反函数 .....       | 7  |
| 1.1.5 基本初等函数 .....    | 8  |
| 1.1.6 初等函数 .....      | 11 |
| 1.1.7 分段函数 .....      | 12 |
| 1.1.8 经济函数 .....      | 14 |
| § 1.2 极限 .....        | 15 |
| 1.2.1 数列的极限 .....     | 15 |
| 1.2.2 函数的极限 .....     | 18 |
| 1.2.3 无穷小量和无穷大量 ..... | 20 |
| 1.2.4 极限运算法则 .....    | 21 |
| 1.2.5 两个重要极限 .....    | 24 |
| 1.2.6 无穷小量的比较 .....   | 28 |
| § 1.3 函数的连续性 .....    | 30 |
| 1.3.1 函数连续性的定义 .....  | 30 |
| 1.3.2 函数的间断点 .....    | 31 |
| 1.3.3 初等函数的连续性 .....  | 33 |

|                         |    |
|-------------------------|----|
| 1.3.4 闭区间上连续函数的性质 ..... | 34 |
| 本章小结 .....              | 36 |
| 习题一 .....               | 38 |

## 第二章 导数与微分 .....

|                         |    |
|-------------------------|----|
| § 2.1 导数的定义 .....       | 43 |
| 2.1.1 两个实例 .....        | 43 |
| 2.1.2 导数的概念 .....       | 44 |
| 2.1.3 导数的几何意义 .....     | 46 |
| 2.1.4 可导与连续的关系 .....    | 47 |
| § 2.2 函数的求导法则 .....     | 48 |
| 2.2.1 几个基本初等函数的导数 ..... | 48 |
| 2.2.2 导数运算法则 .....      | 49 |
| 2.2.3 反函数的导数 .....      | 52 |
| 2.2.4 复合函数和隐函数的导数 ..... | 54 |
| 2.2.5 高阶导数 .....        | 56 |
| § 2.3 函数的微分 .....       | 58 |
| 2.3.1 微分的概念 .....       | 58 |
| 2.3.2 微分形式的不变性 .....    | 60 |
| 本章小结 .....              | 60 |
| 习题二 .....               | 63 |

## 第三章 中值定理与导数的应用 .....

|                                          |    |
|------------------------------------------|----|
| § 3.1 中值定理 .....                         | 66 |
| 3.1.1 罗尔定理 .....                         | 66 |
| 3.1.2 拉格朗日中值定理 .....                     | 68 |
| § 3.2 罗必塔法则 .....                        | 70 |
| 3.2.1 $\frac{0}{0}$ 型不定式 .....           | 71 |
| 3.2.2 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式 ..... | 72 |
| 3.2.3 其他形式的不定式 .....                     | 74 |

|                         |         |
|-------------------------|---------|
| § 3.3 导数的应用 .....       | 75      |
| 3.3.1 函数的单调性 .....      | 75      |
| 3.3.2 函数的极值 .....       | 76      |
| 3.3.3 函数图形的凹凸与拐点 .....  | 81      |
| 3.3.4 曲线的渐近线 .....      | 83      |
| 3.3.5 函数的作图 .....       | 83      |
| § 3.4 边际分析与弹性分析 .....   | 85      |
| 3.4.1 边际分析 .....        | 85      |
| 3.4.2 弹性分析 .....        | 86      |
| 本章小结 .....              | 90      |
| 习题三 .....               | 91      |
| <br>第四章 不定积分 .....      | <br>94  |
| § 4.1 原函数与不定积分 .....    | 94      |
| 4.1.1 原函数与不定积分的概念 ..... | 94      |
| 4.1.2 不定积分的性质 .....     | 96      |
| 4.1.3 基本积分公式 .....      | 97      |
| § 4.2 不定积分的计算 .....     | 98      |
| 4.2.1 直接积分法 .....       | 98      |
| 4.2.2 换元积分法 .....       | 101     |
| 4.2.3 分部积分法 .....       | 109     |
| § 4.3 积分表的使用 .....      | 111     |
| 本章小结 .....              | 114     |
| 习题四 .....               | 115     |
| <br>第五章 定积分 .....       | <br>119 |
| § 5.1 定积分的基本概念 .....    | 119     |
| 5.1.1 曲边梯形的面积 .....     | 119     |
| 5.1.2 定积分的定义 .....      | 122     |
| 5.1.3 定积分的几何意义 .....    | 123     |
| 5.1.4 定积分的基本性质 .....    | 124     |
| § 5.2 定积分的计算 .....      | 126     |

|                             |     |
|-----------------------------|-----|
| 5.2.1 定积分与不定积分的关系 .....     | 126 |
| 5.2.2 定积分的换元积分法及分部积分法 ..... | 132 |
| § 5.3 定积分的应用 .....          | 135 |
| 5.3.1 平面图形的面积 .....         | 135 |
| 5.3.2 旋转体的体积 .....          | 137 |
| 5.3.3 经济应用问题举例 .....        | 140 |
| 本章小结 .....                  | 142 |
| 习题五 .....                   | 143 |

## 第六章 多元函数 .....

|                           |     |
|---------------------------|-----|
| § 6.1 二元函数的定义、极限与连续 ..... | 146 |
| 6.1.1 空间直角坐标系 .....       | 146 |
| 6.1.2 二元函数的概念 .....       | 147 |
| 6.1.3 二元函数的极限与连续 .....    | 149 |
| § 6.2 二元函数的微分学 .....      | 150 |
| 6.2.1 偏导数 .....           | 150 |
| 6.2.2 全微分 .....           | 152 |
| 6.2.3 复合函数的微分法 .....      | 153 |
| 6.2.4 隐函数的微分法 .....       | 155 |
| 6.2.5 二元函数的极值与最值 .....    | 157 |
| 6.2.6 最小二乘法 .....         | 159 |
| § 6.3 二重积分 .....          | 162 |
| 6.3.1 二重积分的概念 .....       | 162 |
| 6.3.2 二重积分的性质 .....       | 164 |
| 6.3.3 二重积分的计算 .....       | 165 |
| 本章小结 .....                | 173 |
| 习题六 .....                 | 175 |

## 第七章 微分方程 .....

|                       |     |
|-----------------------|-----|
| § 7.1 微分方程的基本概念 ..... | 180 |
| § 7.2 可分离变量法 .....    | 181 |
| § 7.3 齐次方程 .....      | 182 |

|                         |     |
|-------------------------|-----|
| § 7.4 一阶线性微分方程 .....    | 184 |
| 7.4.1 一阶线性齐次微分方程 .....  | 184 |
| 7.4.2 一阶线性非齐次微分方程 ..... | 185 |
| 本章小结 .....              | 187 |
| 习题七 .....               | 188 |
| 附录 I 不定积分表 .....        | 190 |
| 附录 II 习题答案 .....        | 199 |

# 第一章 函数、极限与连续

数学是研究现实世界的空间形式和数量关系的科学。在各门类科学中，数学占有极为重要的地位。马克思认为：“一种科学只有成功地运用了数学以后才算达到了完善的地步。”

初等数学是常量的数学，高等数学是变量的数学，而微积分是高等数学的基础。微积分研究的主要对象是函数（特别是连续函数），研究的主要工具是极限。

函数是微积分学的极为重要的基本概念，也是分析经济变量的重要工具。本章着重讨论函数、反函数和初等函数的概念及其性质。

极限是深入研究函数和解决各种问题的基本思想方法及重要工具，我们将主要讨论极限的概念、性质、运算法则及极限存在的准则，并用极限讨论函数的连续性。

## § 1.1 函数

### 1.1.1 常量与变量

我们在观察某种自然现象或社会现象中，会遇到很多量，如长度、面积、时间、速度、价格、成本等等，这些量一般可以分成两种：一种是在某种现象或某个过程中保持不变的量，称为常量；另一种是在某种现象或某个过程中不断变化的量，即可以取不同数值的量，称为变量。

如在经济学中，某种商品销售额是  $R$ ，销售量为  $X$ ，单价为  $P$ ，则

$$R = PX$$

随着销售量  $X$  的变化，销售额  $R$  也变化，故  $X$  和  $R$  是变量，而单价  $P$  在某个过程中可以看作保持不变的量，即为常量。值得注意的是，常量与变量不是永远一成不变的。如单价  $P$  在某个过程中可以看作是常量，但随着生产的发展和供求关系的变化，单价  $P$  也要作相应的调整。

在微积分中，为了研究问题方便起见，有时把常量看成是取同一个值的变量。常

量一般用字母  $a$ 、 $b$ 、 $c$  等来表示；而变量则用字母  $x$ 、 $y$ 、 $z$  等来表示。

## 1.1.2 函数概念

### 1. 函数定义。

在同一个自然现象或社会问题中，常常会有几个变量同时存在，这些变量之间往往不是独立的，而是存在着确定的依赖关系。

**例1** 最简单的生产总费用  $C$  表示为

$$C = ax + b$$

其中  $C$  为生产总费用； $x$  为产品数量； $a$  为单位产品的可变成本，包括生产该产品的原料消耗，工资开支等； $b$  为固定生产费用（即固定成本），包括厂房和设备折旧、调整和安装机器设备及掌握新技术的费用等。该式表明生产产品数量  $x$  变化时，生产总费用  $C$  也随着变化，当  $x$  取定某一个数值  $x_0$  时， $C$  就有一个确定的值  $C_0$  与之对应。

**例2** 为了掌握某企业一年的生产情况，通常根据每月生产的原始记录，用光滑曲线表示一年来生产量变化的情况（如图 1-1），横坐标轴表示时间  $t$ ，纵坐标轴表示生产量  $Q$ ，对于每一个时间  $t$  的值，都可以在曲线上找到  $Q$  的一个值与之对应，如  $t=7$  时，由  $t=7$  作横坐标轴的垂线交曲线于  $A$  点， $A$  点的纵坐标  $Q=15.2$ ，这条曲线称为生产曲线，反映了生产量  $Q$  和时间  $t$  之间的对应关系。

**例3** 某城市一年里各月毛线的零售量如表 1-1 所示。

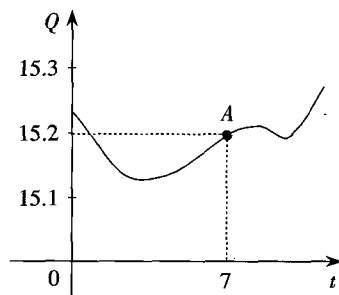


图 1-1

表 1-1

单位：百公斤

| 月份 $t$  | 1  | 2  | 3  | 4  | 5 | 6 | 7 | 8 | 9  | 10 | 11 | 12 |
|---------|----|----|----|----|---|---|---|---|----|----|----|----|
| 零售量 $S$ | 41 | 42 | 23 | 23 | 5 | 3 | 3 | 8 | 47 | 81 | 72 | 62 |

它表示了某城市一年里毛线零售量  $S$  随月份  $t$  变化的情形。对每个月份  $t=t_0$ ，都有惟一确定的零售量  $S=S_0$  与之对应。

以上三个实例反映变量之间是相互联系的，并遵循着一定的规律变化。这种变化规律就由变量在变化过程中的数值对应关系反映出来。我们把这种变量之间确定的对应关系叫做函数关系。

**定义 1.1** 在某个变化过程中有两个变量  $x$  和  $y$ ，如果对于  $x$  的变化范围内的每一个值，通过某种确定的对应法则  $f$ ， $y$  总有一个惟一确定的值与之对应，则称  $y$  是

定义在这个变化范围上的  $x$  的函数，简称  $y$  是  $x$  的函数 ( $y$  又称为因变量)，记为：

$$y=f(x)$$

而  $y$  对  $x$  的对应法则“ $f$ ”称为函数关系。 $x$  称为自变量， $x$  的变化范围称为函数的定义域。

我们用符号  $f(a)$  表示  $x=a$  时函数  $f(x)$  的值，叫做当  $x=a$  时的函数值，有时也用记号  $y|_{x=a}$  来表示。函数值的全体称为函数  $f(x)$  的值域。记号  $y=f(x)$  中，“ $f$ ”只表示  $y$  与  $x$  的对应法则，不能看作“ $f$ ”乘  $x$ 。表示函数常用的记号有  $y=f(x)$ ， $y=F(x)$ ， $y=\varphi(x)$ ， $y=g(x)$  等。

如果我们仔细分析一下，可以看到，上述函数定义涉及函数的三个基本要素，即自变量  $x$  的取值范围——定义域；函数值的范围——值域；变量  $y$  与  $x$  的对应法则——“ $f$ ”。应该特别着重指出的是，函数概念的核心是一个对应法则，只有根据这个法则，才能对于每一个  $x$  值有惟一确定的  $y$  值与之对应。

下面我们借助于直观的图示来加深对函数关系  $f$  的理解 (见图 1-2)。

现将函数关系  $f$  比作一部数值变换器，把定义域中的每一个值  $x$ ，输入到数值变换器中，通过  $f$  的“作用”，输出出来的就是值域中的函数值  $y$ 。

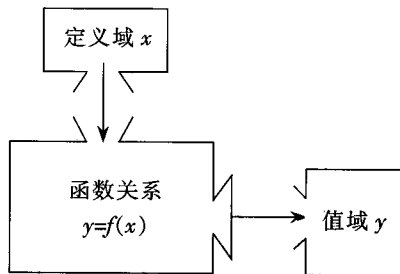


图 1-2

如自由落体中， $S(t) = \frac{1}{2}gt^2$ ，当  $t = 1.5$  时，

对应的函数值就是

$$S(1.5) = \frac{1}{2} \times 9.8 \times 1.5^2 = 11.025$$

有时也记为

$$S|_{t=1.5} = 11.025$$

又如函数  $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ ，则有

$$f(0) = 3 \times 0^2 - 2 \times 0 + 1 = 1$$

$$f(x_0) = 3x_0^2 - 2x_0 + 1$$

$$f(a+b) = 3(a+b)^2 - 2(a+b) + 1$$

$$= 3a^2 + 3b^2 + 6ab - 2a - 2b + 1$$

可见，求  $x=a$  时的函数值，只要把函数关系中的自变量  $x$  用  $a$  代替就行了。

3. 求函数的定义域。

函数的定义域指函数关系的适用范围。也就是说，只有当自变量在定义域中取值时，因变量才有确定的对应值，这时，我们就说函数是有定义的。

为了简便起见,我们常用“区间”来表示函数的定义域。两个实数间的全体实数叫做区间,这两个实数叫区间的端点。设  $a$ 、 $b$  为两实数,且  $a < b$ , 满足  $a \leq x \leq b$  的全体实数  $x$  叫做以  $a$ 、 $b$  为端点的闭区间,记作  $[a, b]$ ; 满足  $a < x < b$  的全体实数  $x$  叫做以  $a$ 、 $b$  为端点的开区间,记作  $(a, b)$ ; 满足  $a \leq x < b$  或  $a < x \leq b$  的全体实数  $x$  叫半开区间,记作  $[a, b)$  或  $(a, b]$ , 此外还有无穷区间  $(-\infty, a)$ ,  $(-\infty, +\infty)$ ,  $[a, +\infty)$ ,  $(a, +\infty)$  等。

**例 4** 求函数  $f(x) = \frac{2}{x-3}$  的定义域。

解: 因为仅当分式的分母  $x-3=0$  时, 即当  $x=3$  时, 函数  $f(x)$  无意义, 所以函数  $f(x)$  的定义域是  $(-\infty, 3)$ 、 $(3, +\infty)$ , 这里  $(-\infty, 3)$  表示小于 3 的所有实数, 即  $-\infty < x < 3$ , 同理,  $(3, +\infty)$  表示  $3 < x < +\infty$ 。

**例 5** 求函数  $f(x) = \sqrt{4x+1}$  的定义域。

解: 因为要使偶次根式有意义, 必须

$$4x+1 \geq 0, \text{ 即 } x \geq -\frac{1}{4}$$

所以函数  $f(x)$  的定义域是,  $-\frac{1}{4} \leq x < +\infty$ , 或  $[-\frac{1}{4}, +\infty)$ 。

**例 6** 求函数  $f(x) = \lg(2x-3)$  的定义域。

解: 因为要使对数式有意义, 必须

$$2x-3 > 0, \text{ 即 } x > \frac{3}{2}$$

所以函数  $f(x)$  的定义域是  $\frac{3}{2} < x < +\infty$  或  $(\frac{3}{2}, +\infty)$ 。

**例 7** 求函数  $f(x) = \sqrt{1-x} + \lg(1+x) + 2$  的定义域。

解: 因为使  $\sqrt{1-x}$  有意义的实数是  $-\infty < x \leq 1$ , 而使  $\lg(1+x)$  有意义的实数是  $-1 < x < +\infty$ , 所以函数  $f(x) = \sqrt{1-x} + \lg(1+x) + 2$  的定义域是  $-1 < x \leq 1$  或  $(-1, 1]$

**例 8** 某工厂生产某产品, 每日最多生产 100 吨, 固定成本为 130 元, 每生产 1 吨, 成本为 6 元, 则每日生产的总成本  $C$  是日产量  $x$  的函数

$$C = f(x) = 130 + 6x$$

总成本  $C$  的定义域是  $0 \leq x \leq 100$  或  $[0, 100]$ , 这是由具体问题确定的。

函数的定义域可用不同方式表示: 不等式、区间和集合。

★ 在求函数定义域时, 必须掌握以下几点:

- (1) 在实际问题中, 必须考虑变量的实际意义。
- (2) 在函数的数学表达式的研究中, 必须考虑计算是否可行。