

**Numerical Method
of Geomechanics**

岩土数值分析

卢廷浩 主编



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

TU4/78

2008

岩土数值分析

卢廷浩 主编



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书作为有关专业研究生的岩土数值分析教材,适合于水利水电工程、土木工程、交通工程、矿山工程、港口与航道工程、城乡规划与市政工程、能源、国防等多种行业相关专业的研究生使用,也可供相关专业教师、博士生和工程技术人员阅读参考。

全书共分6章,包括:绪论,滑移线理论与特征线方法,岩土工程有限元法,岩土工程离散单元法,DDA方法及其在岩土工程中的应用,岩土工程参数反分析方法。每章内容相对独立,自成体系并结合工程应用。各院校可根据相关专业的要求,有侧重地选择部分内容进行教学。

图书在版编目(CIP)数据

岩土数值分析 / 卢廷浩主编. —北京:中国水利水电出版社, 2008

ISBN 978 - 7 - 5084 - 5310 - 1

I. 岩… II. 卢… III. 岩土工程—数值计算—研究生—教材 IV. TU4

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第018218号

书 名	岩土数值分析
作 者	卢廷浩 主编
出版 发行	中国水利水电出版社(北京市三里河路6号 100044) 网址: www.waterpub.com.cn E-mail: sales@waterpub.com.cn 电话: (010) 63202266 (总机)、68331835 (营销中心)
经 售	北京科水图书销售中心(零售) 电话: (010) 88383994、63202643 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排 版	中国水利水电出版社微机排版中心
印 刷	北京市兴怀印刷厂
规 格	787mm×1092mm 16开本 9.5印张 225千字
版 次	2008年3月第1版 2008年3月第1次印刷
印 数	0001—2000册
定 价	22.00元

凡购买我社图书,如有缺页、倒页、脱页的,本社营销中心负责调换

版权所有·侵权必究

前 言

岩土工程学科在水利水电、土木、矿山、能源、交通、港口与航道、城乡建设、国防等多种行业都有广泛的涉及，学科的发展与应用对满意地完成各种工程建设有十分重要的意义。岩土工程问题具有多样性和复杂性，一般很难求得严密的解析解，因而岩土工程数值方法应运而生。数值分析结果对于指导工程规划、设计、施工提供了强有力的支撑。现代计算机和计算技术的快速发展为岩土工程数值分析方法开拓了更为广阔的发展空间和应用前景。

岩土数值分析已作为许多院校岩土工程专业或相关专业研究生的必修课程，是研究生所应具备的知识体系的重要部分。尽管各校的学科发展侧重点或者服务的工程对象有所不同，教学内容的不尽相同，但一些基本方法的讲授大体是一致的，并随着时代的发展而有所更新，近年来也有一些相应教材问世。河海大学岩土工程研究所总结近 30 年的教学、讲义使用经验和科研新成果，分析学科发展趋势，组织编写了这本《岩土数值分析》教材。

本教材的基本特点是：(1) 尽可能反映最新研究成果和学科发展趋势，既有新发展起来的数值方法，也有相对“古老”一些的数值方法，各章自成体系；(2) 注重水利水电特色的同时又兼顾其他行业的广泛适用性；(3) 符合循序渐进的认知思路，深入浅出，理论介绍和实际应用并重。

本书的编写人员有：卢廷浩（第一、第二章），朱俊高（第三章），刘军（第四章），孙少锐（第五章），郭海庆（第六章）。由卢廷浩教授担任主编，负责全书的统校工作。

本书是河海大学岩石工程研究所全体教师智慧的结晶，是校各级领导强有力支持和全体编写人员齐心协力工作的结果在本书付梓之际，我们还要衷心感谢中国水利水电出版社所给予的帮助和精诚合作。

本书适合用作有关专业研究生的岩土数值分析教材，也可供相关或相近专业教师、博士生和工程技术人员参考。

限于编者水平，敬请使用和阅读本书的老师及同学们指正。

编 者

2008 年 1 月

于南京

目 录

前言

第一章 绪论	1
第一节 岩土工程问题的基本特点	1
第二节 岩土工程数值分析发展的必然性	2
第三节 岩土工程数值分析方法的类型简介	3
第四节 学习与应用岩土数值分析方法应注意的问题	5
参考文献	6
第二章 滑移线理论与特征线方法	7
第一节 滑移线概念	7
第二节 应力平衡方程的特征线方程及差分解法	9
第三节 边值问题处理	13
第四节 条形基础地基极限承载力解答	16
第五节 土坡稳定问题解答	21
第六节 极限平衡理论的轴对称解答	24
第七节 小结与讨论	25
参考文献	26
第三章 岩土工程有限元法	27
第一节 有限元及其在岩土工程中的应用简介	27
第二节 非线性有限元的求解方法	30
第三节 有限元分析中常见问题的处理	38
第四节 土石坝应力变形的有限元计算	44
第五节 接触面的有限元模拟	48
第六节 基坑开挖的有限元计算	53
第七节 土体固结的有限元计算	55
第八节 小结与讨论	59
参考文献	59
第四章 岩土工程离散单元法	60
第一节 概述	60
第二节 颗粒离散元法的基本原理	62

第三节	块体元离散元法的基本原理	71
第四节	离散元法在岩土工程中的应用	79
第五节	离散元的发展趋势	83
第六节	小结与讨论	84
参考文献		84
第五章	DDA 方法及其在岩土工程中的应用	87
第一节	概述	87
第二节	块体的位移和变形	88
第三节	单一块体的应力、应变及荷载分析	93
第四节	块体系统运动学	98
第五节	单纯形积分	113
第六节	DDA 分析的几个实例	115
第七节	小结与讨论	116
参考文献		118
第六章	岩土工程参数反分析方法	119
第一节	概述	119
第二节	反分析基本理论	122
第三节	物理力学参数反演分析	132
第四节	渗透参数反分析	137
第五节	小结与讨论	145
参考文献		146

第一章 绪 论

第一节 岩土工程问题的基本特点

一般认为岩土工程学科是以工程地质学、土力学、岩体力学及基础工程学为理论基础的技术学科。岩土材料是一种地质体，是自然产物。在漫长的历史进程中，人类的生产生活所经历的工程建筑史是不停地与岩土体打交道的过程。人们以岩土体作为建筑物地基和将岩土作为建筑材料使用，岩土体也是某些类型建筑物的环境。岩土工程问题是多种多样的，因此也势必造成其多样性、复杂性。

一、工程类型的多样性

多种行业涉及到岩土工程学科的内容，水利水电、交通、矿山、能源、港口与航道、城乡建设、国防等相关专业都广泛应用岩土工程学科，其涉及的工程类型多种多样。这些行业可能会在各种地基上建造工程，且可能遇到各种类型的地基或地质环境。针对不同工程和不同地质条件又会选择不同型式的基础或结构型式，还会开挖隧道、开挖深基坑和建设地下工程，以及筑坝、筑路，河岸与边坡治理等，不胜枚举。

对于不同地基或地质环境和不同的工程类型，设计施工时在了解岩土体的基本性质和工程使用要求的基础上，原则上都必须同时考虑到：稳定或平衡问题；应力变形与固结问题；地下水与渗流问题；水与土（岩）相互作用问题；土（岩）与结构相互作用问题；土（岩）的动力特性问题等。尽管不同地基或不同地质环境，不同的工程类型各有特点，它们的关键技术问题的侧重点可能不同。

二、材料性质的复杂性

岩土体材料是一种地质体，是自然产物。它既可能以松散堆积物的土体形式存在，也可能以相对完整的岩体存在。而岩体一般存在各种裂隙，不同地质成因的岩块之间的裂隙面交错，往往比较复杂。当岩体很“破碎”时，有时很难区分其是属于岩体还是土体，这需要工程师根据地质体性质和经验作出判断和给予恰当描述。岩土体往往是非均匀介质，有时还呈现空间不连续性以及几何形状的任意性；岩土材料一般不是线性材料，其应力应变关系远比单纯的线弹性关系复杂，同时往往表现为强烈地区域性特征；岩土材料变形与强度还可能随时间变化，即流变性质；岩土材料一般是三相体，处于饱和或非饱和时又往往表现出性质的差异，尤其对于某些特殊土更是如此。为了如实地表达不同区域的岩土工程问题必须进行必要的勘察、试验，使用一些能够描述各种岩土体材料基本性质的非线性或弹塑性本构模型。当前，岩土体本构模型的建立和应用已经成为近代岩土工程的重要研究领域。

三、荷载条件的复杂性

不同的使用目的，人们创造出多种多样的建筑物。不同的工程因其型式，使用要求不同，或者施工方式不同等，其荷载条件不同且复杂多样，包括静力和动力荷载。例如，房屋建筑对地基的作用，以建筑物荷载、风荷载为主；基坑开挖、隧洞开挖主要是应力解除；土石坝施工是逐级加载以自重为主，而土石坝运行期则是水压力和渗流为主；地震、爆炸则是突加动力荷载等。

四、初始条件与边界条件的复杂性

工程地质和水文地质条件不同，周边环境不同，造成各种问题的初始条件和边界条件不同，有时甚至比较模糊。典型的例子是土体的初始应力或初始变形往往很难准确确定。边界条件的确定有时也难以完全符合实际，这就要求设计计算者进行适当的简化或近似处理。求解工程问题和进行数值模拟时应综合考虑各方面因素，要比较确切反映各种复杂的初始条件与边界条件。

五、相互作用问题

相互作用课题其实应包括两种类型：一是土（岩）水相互作用；二是土（岩）与结构或颗粒（岩块）间相互作用。岩土体中水的存在和流动对其性质将产生影响，有时这种影响是巨大的，不可忽视的。水的存在除了产生浮力、水压力等静水力学特征外，当发生渗流时将对岩土体产生超静孔隙水应力和渗流力。对于细粒土，含水率的变化会使土的物理力学性质发生变化，对于某些特殊土的影响则更为显著。对于粗粒土，适当的洒水可以增加土的压实性，土石坝初次浸水，会使其产生湿化变形。岩体中水的存在和渗流现象，除了影响应力变形外还可能发生缓慢而持续的化学作用，如此又进一步影响岩体的渗流和应力变形。

除了少数堤坝类的“土工建筑物”外，一般都存在结构物，分析时将岩土体与结构物视为一整体，即岩土体与结构处于一个共同作用系统。由于岩土体尤其是土体与结构的性质有很大不同，它们在共同作用的过程中相互间力图彼此变形协调，其间发生力的相互传递并最终达到变形协调，因此势必存在岩土体与结构的相互作用问题。例如，地基、基础、上部结构相互作用；土石坝防渗墙与地基及坝体的相互作用；桩、挡土墙、锚杆、加筋材料等与土的相互作用。裂隙岩体的岩块间的相互接触，在受力过程中发生相互作用等。

第二节 岩土工程数值分析发展的必然性

如前所述，岩土体作为一种地质体，其天然状态、性质使得材料的应力应变关系很复杂，其上的建筑物的荷载条件以及边界条件与初始条件等也往往比较复杂。

为尽可能求得问题的“精确”解答，人们的追求与选择大致有如下三个梯次，退而择之。

(1) 理所当然期盼建立严格的控制物理方程（微分方程或微分方程组），根据初始条件和边界条件求得问题的严密理论下的解析解，但因为问题的复杂性，如愿的结果极少。

某些问题定性解答尚且难以把握,较为精确的定量解答就更不易获得。

(2) 为了获得较为精确的理论解,人们不得不做一些必要的简化假设,从而建立控制物理方程,希望得到某种近似程度的“严密”解析解,其中一些解答与实际情况能够较好地近似,例如 Terzaghi 一维固结解答;有一些解答则部分符合实际,例如 Winkler 弹性地基上的梁和板解答,较为适用于极软弱黏土地基,而相当多的情况可能与实际有很大的不同。虽然有些问题具有相当的复杂性,但确当的简化假设也能够获得较为符合实际的解析表达式,例如 Biot 三维固结方程,但也只有少数特殊情况才能求得解析解。

(3) 既然严密解答难以获得,那么寻求解答的途径只有依据于在一些必要的简化假设的基础上得到的控制物理方程(微分方程或微分方程组),寻求数值解。如前所述,由于岩土工程问题的复杂性,很多情况不能得到控制微分方程的解析解答,因此人们不得不转而寻求数值解。希望获得比较符合实际的近似数值解的愿望就成为必然,也就注定了岩土工程数值分析的地位,这是一个从定性到定量的过程。幸运的是,数学和力学理论的发展、计算技术和计算机的快速发展为解决复杂岩土工程问题提供了有效的数值分析方法和手段。近年来许多数值方法应运而生并日趋完善,并得到广泛应用从而解决了大量的工程问题。数值分析方法为进一步发展岩土工程学科提供了更广阔的空间,也为学者和工程师们拓宽了施展才华的舞台。

第三节 岩土工程数值分析方法的类型简介

数值分析方法是随着计算机技术发展而形成的一种计算分析方法,已有多种岩土工程数值分析方法。20 世纪 50 年代初发展起来的用于极限状态分析的滑移线理论与特征线方法(Characteristics Line Method, CLM),20 世纪 60 年代后逐步发展的数值分析方法主要有:有限元法(Finite Element Method,简称 FEM),有限差分法(Finite Different Method,简称 FDM),边界元法(Boundary Element Method,简称 BEM),离散元法(Discrete/Distinct Element Method,简称 DEM),非连续变形分析法(Discontinuous Deformation Analysis,简称 DDA),流形元法(Numerical Manifold Method,简称 NMM)等。此外,随着人们对提高数值计算精度的期望以及现场测试水平和计算技术的提高,岩土参数反演分析法(Inverse Analysis Method, IAM)或反分析法(Back Analysis Method, BAM)也同时得到了充分重视和发展。有理由相信,不但现有的方法将会进一步完善,而且还有可能产生各种新的数值方法,例如复合问题多变量的耦合方法。

各种数值方法都要遵循控制物理方程(微分方程或微分方程组),同时将计算域进行离散化的求解方法。期望研究生在学习与运用这些数值方法的基础上,能够有所完善与发展。从教学角度考虑,要求学生既掌握一些常用的数值方法,也了解一些新的数值方法,还要注意每种数值方法的适用范围。本教材只介绍其中几种:滑移线理论与特征线方法(CLM);有限单元法(FEM)(包括土体应力变形、固结有限元);离散单元法(DEM);非连续变形分析法(DDA);岩土数值反分析法(BAM)。以下概述本书几种常用方法。

土力学中的滑移线理论是从经典塑性力学的基础上发展起来的。假定土体为理想刚塑性体,强度包线为直线且服从正交流动规则的标准库仑材料。滑移线理论是基于平面应变

状态的土体内当达到“无限”塑性流动时，塑性区内的应力和应变速度的偏微分方程是双曲线这一事实，应用特征线理论求解平面应变问题极限解的一种方法，称为滑移线法。20世纪20年代，人们在研究金属塑性变形过程时发现光滑试样表面出现“滑移带”现象，随之滑移线理论被提出，并逐步形成的一种图形绘制与数值计算相结合的求解平面塑性流动问题的理论方法。滑移线的物理概念是：在塑性变形区内，剪切应力等于抗剪强度的屈服轨迹线。达到塑性流动的区域，滑移线处处密集，称为滑移线场。滑移线理论的概念应用于土力学起于20世纪50年代，并成功应用于研究土体稳定问题，例如地基承载力、土坡稳定、土压力等。

有限单元法的理论基础是依据于最小势能原理。有限单元法将计算的连续体对象离散化，成为由若干较小的单元组成的连续体，称为有限元。被离散的相邻单元彼此连接，保持原先的连续性质，单元边线的交点称为节点，一般情况以节点位移为未知量。有限单元法的特点是把有限个单元逐个地分析处理，每个单元满足其平衡方程、本构方程和几何方程，形成单元的几何矩阵、应力矩阵和刚度矩阵。然后根据位移模式、单元边线和节点处位移协调条件组合成整体刚度矩阵。再考虑到边界条件、荷载条件等进行求解。求得节点位移后，逐个单元的计算单元应变、应力，这样就最终得到整个计算对象的位移场、应变场和应力场。有限元将计算对象视为连续体，该连续体可以是岩土材料，也可以是某些结构材料，以位移作为它们的未知量；此外，流体（例如水）流过岩土体，可将流体视为连续体，而以流体势（例如总水头）作为未知量。有限单元法中的所谓“连续体”概念，是指进行单元离散化时，不允许任何相邻单元重叠或出现“无单元空隙”，即必须保证相邻单元彼此连接，存在单元编号，并具有确定的物理力学性质的模型参数。如若是“不连续”岩体，每个岩块之间本来就存在节理、裂隙等，即便如此，当应用有限单元法时，这些节理、裂隙必须作为某类单元，即计算对象仍然是连续体。该类单元（例如接触面单元、节理单元等）的设置或处理可参阅有关文献。

离散单元法用于非连续性岩体有其独特优势。岩体中每个岩块之间存在节理、裂隙等，使得整个岩体成为不完全连续体。离散单元法的基本原理是基于牛顿第二定律。离散单元法假设被节理裂隙切割的岩块是刚体，岩石块体按照整个岩体的节理裂隙互相镶嵌排列，在空间每个岩块有自己的位置并处于平衡状态。当外力或位移约束条件发生变化，块体在自重和外力作用下将产生位移（移动和转动），则块体的空间位置就发生变化，又导致相邻块体受力和位置的变化，甚至块体互相重叠。随着外力或约束条件的变化或时间的延续，有更多的块体发生位置的变化和互相重叠，从而模拟各个块体的移动和转动，可直至岩体破坏。离散元法在边坡、危岩和矿井稳定等岩石力学问题中得到了广泛应用。此外，颗粒离散元还被广泛地应用于研究复杂物理场作用下粉体的动力学行为和多相混合材料介质或具有复杂结构材料的力学特性。它涉及到粉末加工、研磨技术、混合搅拌等工业加工领域和粮食等颗粒离散体的仓储和运输等实际生产领域。

非连续变形分析法（DDA）的主要优势是适合于求解具有节理的非连续性岩体的非连续大变形问题，它是在不连续体位移分析法的基础上推广而来的一种正分析方法，它可以从块体结构的几何参数、力学参数、外荷载约束情况计算出块体的位移、变形、应力、应变以及块体间分离情况。非连续变形分析法视岩块为简单变形体，既有刚体运动还有常

应变, 无需保持节点处力的平衡与变形协调, 可以在一定的约束下只单独满足每个块体的平衡并有自己的位移和变形。DDA 法可求得块体系统最终达到平衡时的应力场及位移场等情况以及运动过程中各块体的相对位置及接触关系; 可以模拟出岩石块体之间在界面上的运动, 包括移动、转动、张开、闭合等全部过程, 据此可以判定出岩体的破坏程度、破坏范围, 从而对岩体的整体和局部的稳定性作出正确的评价。DDA 法在隧洞和矿井稳定等岩石力学问题中已得到广泛应用。

非连续变形分析法与有限元和离散元有明显的异同点, 在学习相关章节时须给予注意。

近年来, 计算技术、测试技术都有了快速的发展。发展完善数值分析方法的同时, 运用多种手段提高计算精度自然成为工程技术人员的追求。运用比较符合工程实际的计算模型和参数是取得数值分析合理结果的重要影响因素之一。取得计算参数的方法有三种途径: 一是室内模拟试验, 建立相应的模型并确定参数; 二是原位试验或现场观测, 建立相应的模型并确定相关参数; 三是应用易于得到的现场观测数据例如位移, 选用适当的模型通过数值分析方法反演该模型参数, 称为反演分析或反分析法。有多种反分析方法, 例如逆反分析、正反分析、随机反分析、模糊反分析等。近年来人工神经网络算法、遗传算法等也相继应用于参数反分析法研究。

岩土工程问题本身是一个高度复杂的不确定和不确定系统, 其物性参数、本构模型、计算边界条件等通常无法准确确定。而从量测信息(位移、应力、温度等)出发, 用反分析的方法来确定各类计算模型参数的反分析方法得到了迅速的发展, 目前已成为解决复杂岩土力学问题的重要方法, 在岩石坝基、高速公路路基、基坑、高边坡、地下洞室围岩和支护等诸多领域都有广泛应用。

反分析法越是广泛应用和发展, 就越要强调试验研究(包括现场观测)的作用和地位。试验结果一方面能够提供数值分析所需要的参数或部分参数, 另一方面又能够检验和评价各种解答的可行性、精度。试验是进一步完善理论的重要依据, 能够推动理论的发展和研究的深入。试验研究地位不可替代, 特别是对于某些重要工程和特别工程环境。

第四节 学习与应用岩土数值分析方法应注意的问题

岩土工程数值分析更讲究应用, 要求学生能够掌握每种方法的基本理论, 弄清其来龙去脉的主线条, 每种方法都有其特点和适用范围, 会熟练应用其中一两种方法, 能够熟练使用相关软件或自编程序, 当然加强实践和总结体会(哪怕是间接的)必不可少。

针对某具体工程问题, 能否得到计算结果取决于计算方法的选择和方法的正确实施, 包括程序的正确实现; 而能否得到合理或较合理的有用结果则取决于计算模型及其参数, 以及边界条件、初始条件、相互作用、耦合问题等的正确模拟, 这常常是问题的核心。所谓正确模拟, 首先必须定性正确, 其次才能谈得上量化比较准确。因此, 学习和应用数值分析方法时必须把握好如下几个方面的关键问题:

- (1) 弄清每种方法的数学力学原理, 掌握基本假定和适用范围。
- (2) 弄清每种方法对岩土体材料模型及其参数的要求。

(3) 弄清每种方法对岩土体材料与结构的相互作用模型及其参数的要求, 包括岩石块体之间的关联和相互作用模型与参数。

(4) 分析初始条件、边界条件和荷载特征等, 确定模拟思路。

(5) 分析岩土体是否存在渗流和与水的相互作用或其他耦合问题。

(6) 对于反演分析, 要研究和分析已知数据, 明确待求未知量, 选择恰当方法。

运用任一种数值分析方法, 都必须先分析拟解决问题的关键所在, 具体应用某岩土数值分析方法时应注意并理清如下几个主要环节:

(1) 研究分析对象, 明确计算目的和拟解决的关键问题, 选择数值方法, 确定建模方案。

(2) 确定运用的模型及其参数。

(3) 确定边界条件与初始条件。

(4) 确定模拟荷载及荷载的动态变化。

(5) 确定计算的收敛评判依据。

(6) 考察各环节简化的合理性, 考题, 否则应调整建模及有关计算模型与参数。

(7) 确定后处理方法及成果整理的内容与分析方案。

参 考 文 献

- [1] 刘汉东, 张勇, 贾金禄. 岩土工程数值计算方法 [M]. 郑州: 黄河水利出版社, 1995.
- [2] [美] C. S. 德赛, J. T. 克里斯琴, 卢世深, 潘善德, 王钟琦等译. 岩土工程数值方法 [M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1981.
- [3] 中国力学学会计算力学委员会主办. 第一届全国计算岩土力学研讨会论文集 (D). 成都: 西南交通大学出版社, 1987.
- [4] 龚晓南. 土工计算机分析 [M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2000.
- [5] 廖红建, 王铁行. 岩土工程数值分析 [M]. 北京: 机械工业出版社, 2006.
- [6] 钱家欢等. 土工原理与计算 [M]. 第1版, 下册. 北京: 水利电力出版社, 1987.
- [7] 刘凯欣, 高凌天. 离散元法研究的评述 [J]. 力学进展, 2003, 33 (25): 483-490.
- [8] Strack O D L, Cundall P A. The distinct element method as a tool for research in granular media, Part I. Report to the National Science Foundation [M]. Minnesota: University of Minnesota, 1978.
- [9] Cundall P A, Strack O D L. The distinct element method as a tool for research in granular media, Part II. Report to the National Science Foundation [M]. Minnesota: University of Minnesota, 1979.
- [10] Cundall P A, Strack O D L. A discrete numerical model for granular assemblies [J]. Geotechnique, 1979, 29 (1): 47-65.
- [11] Walton O R. Particle dynamics modeling of geological materials [J]. Lawrence Livermore National Lab, 1980, Report UCRL 52915.
- [12] 王泳嘉, 邢纪波. 离散单元法及其在岩土力学中的应用 [M]. 沈阳: 东北工学院出版社, 1991.

第二章 滑移线理论与特征线方法

第一节 滑 移 线 概 念

一、概述

对于土体, 滑移线理论、极限分析理论与力的极限平衡理论同属极限状态理论的范畴, 都是求土体达到极限状态时解答的理论方法。这些理论方法都是假定分析对象服从材料的某破坏准则, 求解时不考虑材料到达极限状态的过程, 即不考虑材料的具体应力应变关系, 从而求得土体达到极限状态时的解答, 但他们各自求解问题的视角和方法不同。

对于土体, 力的极限平衡理论假定材料为理想刚塑性体, 依据于经典静力学中刚体平衡理论推求极限状态解答, 简称为极限平衡法。该方法最为人们所熟悉, 其突出优点是简单, 应用广泛。例如, 库仑理论计算土压力, 假定滑动面计算土坡的稳定安全系数, 假定滑动面计算地基极限承载力等。

极限分析法假定土体为弹性—理想塑性体或刚塑性体, 强度包线为直线且服从正交流动规则的标准库仑材料。当作用于土体上的荷载达到某一数值并保持不变时, 土体会发生“无限”塑性流动, 则认为土体处于极限状态, 所对应的荷载称为极限荷载。极限分析法理论是应用弹性—理想塑性体或刚塑性体的普遍定理——上限定理(求极限荷载的上限解)和下限定理(求极限荷载的下限解)求解极限荷载的一种分析方法, 称为极限分析法。

土力学中的滑移线理论是从经典塑性力学的基础上发展起来的。假定土体为理想刚塑性体, 其强度包线为直线。滑移线理论是基于平面应变状态的土体内当达到“无限”塑性流动时, 塑性区内的应力和应变速度的偏微分方程是双曲线这一事实, 应用特征线理论求解平面应变问题极限解的一种方法, 称为特征线法。20世纪20年代, 人们在研究金属塑性变形过程时发现光滑试样表面出现“滑移带”现象, 随之滑移线理论被提出, 并逐步形成的一种图形绘制与数值计算相结合的求解平面塑性流动问题的理论方法。滑移线的物理概念是: 在塑性变形区内, 剪切应力等于抗剪强度的屈服轨迹线, 达到塑性流动的区域, 滑移线处处密集, 称为滑移线场。土力学中滑移线理论研究起始于20世纪50年代初, B. B. 索柯洛夫斯基等人奠定了土体稳定理论基础并相继成功应用于各类工程问题, 例如地基承载力、土坡稳定、土压力等。

虽然滑移线理论早于目前常用有限元法、边界元法、离散元法等, 与这些数值方法相比, 滑移线法相对“古老”, 但该方法有其特点仍充满活力, 近年来一些学者又推出一些新的研究成果, 有志于从事这方面课题研究的青年可以参考有关文献。

二、平面问题基本方程

假定土体是刚塑性体, 服从 Mohr-Coulomb 屈服条件, 在荷载作用下土体塑性区域发

生塑性流动，对于平面塑性流动问题，如图 2-1 所示，平衡方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} &= \gamma \sin \alpha \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= \gamma \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad (2-1)$$

土体屈服条件为

$$\left(\frac{\sigma_z - \sigma_x}{2} \right)^2 + \tau_{xz}^2 = \left(\frac{\sigma_z + \sigma_x}{2} + c \cot \varphi \right)^2 \sin^2 \varphi \quad (2-2)$$

理论上，上述方程结合边界条件是可以求解三个应力分量 $\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz}$ 。然而由于边界条件和数学上的困难，一般很难获得解析解，但应用滑移线理论可以获得近似解。

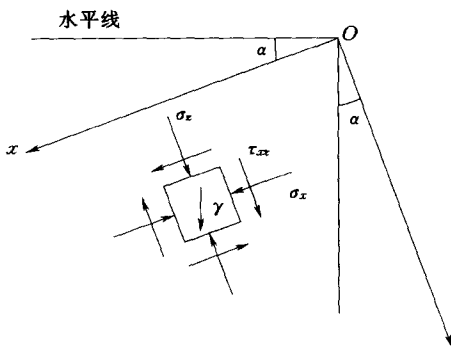


图 2-1 单元体应力

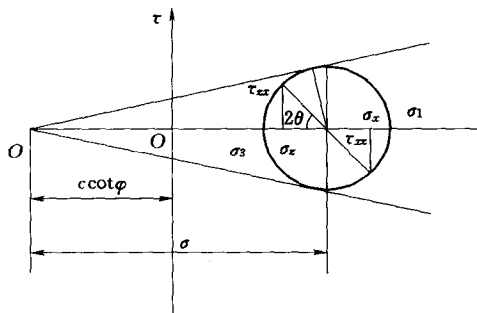


图 2-2 以 σ, θ 为自变量表达的应力分量

三、滑移线场概念

当土体达到塑性极限平衡时（达到塑性屈服），土体单元将出现一对剪破面，剪破面与大主应力 σ_1 的夹角为 $\mu = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$ 。设大主应力 σ_1 与 x 轴的夹角为 θ ，则三个应力分量 $\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz}$ 可分别表达为

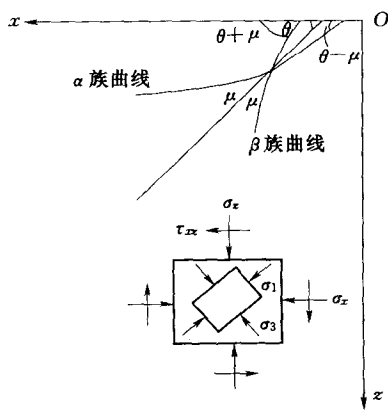


图 2-3 滑移线基本概念

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma(1 + \sin \varphi \cos 2\theta) - c \cot \varphi \\ \sigma_z &= \sigma(1 - \sin \varphi \cos 2\theta) - c \cot \varphi \\ \tau_{xz} &= \sigma \sin \varphi \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (2-3)$$

式中： $\sigma = \left(\frac{\sigma_z + \sigma_x}{2} \right) + c \cot \varphi$ 称为平均法向引用应力，见图 2-2。

式 (2-3) 是以 σ, θ 为自变量表达的极限状态时的单元体应力分量。

在平面应变问题中，平面上任一点都有两个正交主应力，将各点主应力方向连续地连接起来就是主应力迹线。当土体处于屈服状态时，每一点都存在一对剪破面，称为 α 线和 β 线，将平面上各点剪破面连续地连接起来就可以得到两族曲线，称为滑移线（或滑动线），滑移线上一点的切线就是该点的滑动面方向，参见图 2-3。

如果把大主应力 σ_1 方向的迹线作为基线, 为了叙述方便又不致混淆, 这里约定: 顺时针与基线成锐角的一族滑移线称为 α 线; 逆时针与基线成锐角的一族滑移线称为 β 线。在平面区域内, 这两族滑移线构成滑移线场。由图 2-3 可见 α 线和 β 线的微分方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{dz}{dx} \Big|_{\alpha} &= \tan(\theta - \mu) \\ \frac{dz}{dx} \Big|_{\beta} &= \tan(\theta + \mu) \end{aligned} \right\} \quad (2-4)$$

应力场不同, 主应力迹线 (基线) 将不同, 滑移线场也不同。如若能够确定滑移线场 $z = z(x)$ 的关系, 则应力场即可确定, 因此, 问题可归结为求土体处于屈服状态下的滑移线场。

第二节 应力平衡方程的特征线方程及差分解法

一、应力平衡方程的特征线方程

将式 (2-3) 代入式 (2-1) 得到极限平衡方程为

$$\left. \begin{aligned} (1 + \sin\varphi \cos 2\theta) \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \sin\varphi \sin 2\theta \frac{\partial \sigma}{\partial z} - 2\sigma \sin\varphi \left(\sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x} - \cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) &= \gamma \sin \alpha \\ \sin\varphi \sin 2\theta \frac{\partial \sigma}{\partial x} + (1 - \sin\varphi \cos 2\theta) \frac{\partial \sigma}{\partial z} + 2\sigma \sin\varphi \left(\cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x} + \sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) &= \gamma \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad (2-5)$$

这是一个以 x, z, σ, θ 为变量的空间曲面方程, 是一阶拟线形偏微分方程组。直接求解极其困难。数学上的一阶拟线形偏微分方程组一般形式为

$$\left. \begin{aligned} A_1 \frac{\partial \sigma}{\partial x} + B_1 \frac{\partial \sigma}{\partial z} + C_1 \frac{\partial \theta}{\partial x} + D_1 \frac{\partial \theta}{\partial z} &= E_1 \\ A_2 \frac{\partial \sigma}{\partial x} + B_2 \frac{\partial \sigma}{\partial z} + C_2 \frac{\partial \theta}{\partial x} + D_2 \frac{\partial \theta}{\partial z} &= E_2 \end{aligned} \right\} \quad (2-6)$$

该式是关于 $\frac{\partial \sigma}{\partial x}, \frac{\partial \sigma}{\partial z}, \frac{\partial \theta}{\partial x}, \frac{\partial \theta}{\partial z}$ 为变量, 由系数 $A_1, B_1, \dots, D_2, E_2$ 构成的代数方程组, 其中系数 $A_1, B_1, \dots, D_2, E_2$ 是 x, y, σ, θ 的函数。该方程组的系数行列式为

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ dx & dz & & \\ & & dx & dz \end{vmatrix} \quad (2-7)$$

展开行列式令 $\Delta = 0$, 有 $A \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 + B \left(\frac{dz}{dx} \right) + C = 0$ 。其中

$$\left. \begin{aligned} A &= C_1 A_2 - A_1 C_2 \\ B &= B_1 C_2 - C_1 B_2 + A_1 D_2 - A_2 D_1 \\ C &= D_1 B_2 - B_1 D_2 \end{aligned} \right\} \quad (2-8)$$

在某区域内, 如果 $B^2 - 4AC > 0$, 则方程有两个实根

$$\frac{dz}{dx} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (2-9)$$

表示一阶拟线形偏微分方程组为双曲线型的, 在该区域内有两族实的特征线; 如果 $B^2 - 4AC = 0$, 则方程有一个实根, 表示一阶拟线形偏微分方程组为抛物线形的, 只有一族特征线; 如果 $B^2 - 4AC < 0$ 则方程没有实根, 表示一阶拟线形偏微分方程组为椭圆形的, 不存在实的特征线。

数学上已经证明式 (2-5) 是双曲线型一阶拟线形偏微分方程组, 有两族实的特征线。两族特征线 α, β 的方程为

$$\frac{dz}{dx} = \tan(\theta \mp \mu)$$

将方程组 (2-5) 改写: 以 $\sin(\theta \mp \mu)$ 乘以第一个方程; 以 $-\cos(\theta \mp \mu)$ 乘以第二个方程, 然后相加, 得

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} \mp 2\sigma \tan \varphi \frac{\partial \theta}{\partial x} - \gamma \frac{\sin(\alpha \mp \varphi)}{\cos \varphi} \right] \cos(\theta \mp \mu) \\ & + \left[\frac{\partial \sigma}{\partial z} \mp 2\sigma \tan \varphi \frac{\partial \theta}{\partial z} - \gamma \frac{\cos(\alpha \mp \varphi)}{\cos \varphi} \right] \cos(\theta \mp \mu) = 0 \end{aligned} \quad (2-10)$$

式 (2-10) 是一个以 x, z, σ, θ 为变量空间曲面方程, 在 xoz 平面内一定存在某曲线 $z = z(x)$, 该曲线上 σ 和 θ 正好满足式 (2-10) 沿该线的 σ, θ 可以表达为

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \sigma(x, z) \\ \theta &= \theta(x, z) \end{aligned} \right\} \quad (2-11)$$

其全微分

$$\left. \begin{aligned} d\sigma &= \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx + \frac{\partial \sigma}{\partial z} dz \\ d\theta &= \frac{\partial \theta}{\partial x} dx + \frac{\partial \theta}{\partial z} dz \end{aligned} \right\} \quad (2-12)$$

改写上式得

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z} = \frac{d\sigma - \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx}{dz}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{d\theta - \frac{\partial \theta}{\partial x} dx}{dz}。 \text{ 将其代入式 (2-10), 整理后得到}$$

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} \mp 2\sigma \tan \varphi \frac{\partial \theta}{\partial x} - \gamma \frac{\sin(\alpha \mp \varphi)}{\cos \varphi} \right] &= \frac{\Delta \sin(\theta \mp \mu)}{\sin(\theta \mp \mu) dx - \cos(\theta \mp \mu) dz} \\ \left[\frac{\partial \sigma}{\partial z} \mp 2\sigma \tan \varphi \frac{\partial \theta}{\partial z} - \gamma \frac{\cos(\alpha \mp \varphi)}{\cos \varphi} \right] &= \frac{\Delta \cos(\theta \mp \mu)}{\sin(\theta \mp \mu) dx - \cos(\theta \mp \mu) dz} \end{aligned} \right\} \quad (2-13)$$

式中

$$\Delta = d\sigma \mp 2\sigma \tan \varphi \cdot d\theta - \frac{\gamma}{\cos \varphi} [\sin(\alpha \mp \varphi) dx + \cos(\alpha \mp \varphi) dz]$$

分析式 (2-13), 当右端项分子分母同时为 0, 左端的导数值不定, $z = z(x)$ 称为特征线。特征线 α, β 的方程组如下

$$\frac{dz}{dx} = \tan(\theta \mp \mu) \quad (2-14)$$

$$d\sigma \mp 2\sigma \tan\varphi \cdot d\theta = \frac{\gamma}{\cos\varphi} [\sin(\alpha \mp \varphi) dx + \cos(\alpha \mp \varphi) dz] \quad (2-15)$$

式 (2-14) 与式 (2-4) 同, 这说明沿滑移线的 $\sigma = \sigma(x, z)$, $\theta = \theta(x, z)$ 满足拟线形平衡微分方程组 (2-5)。式 (2-14) 和式 (2-15) 组成的方程组是曲面方程, 仍难以求得解析解, 只能沿着曲面方程的特征线才能求得解答, 因此称为特征线法。比较滑移线的定义与此处的特征线方程, 可知此处数学上的特征线就是物理概念上的滑移线。由式 (2-14) 可知, 特征线有两族, 通过任一点都存在两条特征线 (滑移线), 在被考察的极限平衡区域内布满了特征线网, 即滑移线处处密集。

顺便指出, 有时需确定塑性区的速度场, 其目的是校核应力场对某些运动形式是否合适 (运动许可), 以及校核内部塑性功率是否处处均为正值 (符合 Druker 公设)。速度特征线与应力特征线相似, 当应用正交流动规则时二者完全一致; 当不应用正交流动规则时以上各式中的 μ 改为 ν 即为速度特征线, 此处 ν 是速度特征线与主应力 σ_1 方向线的夹角, $\nu = \frac{\pi}{4} - \frac{\omega}{2}$, $0 \leq \omega \leq \varphi$ 。当求得应力特征线后, 无需专门求解即可绘出速度特征线。

这里扼要介绍应力间断线概念, 所谓应力间断线就是在该线两侧应力发生急剧变化, 从而造成间断线两侧应力发生“间断”现象。若只取式 (2-13) 的右端项分母为 0, 而分子不为 0, 则左端的导数为无穷大, 说明应力在某“应力间断线”附近发生急剧变化, 从而得应力间断线 $\frac{dz}{dx} = \tan(\theta \mp \mu)$ 。设 l 是一条应力间断线, 取跨其两侧的某一微单元, 如图 2-4 所示。间断线两侧的 I 区和 II 区的应力分量分别为 $\sigma_{n1}, \sigma_{t1}, \tau_{t1}$ 和 $\sigma_{n2}, \sigma_{t2}, \tau_{t2}$, 因为该单元满足平衡方程和屈服条件, 故两个区域内沿法向的应力应相等, 两个区域内沿切向的应力也应相等, 即有

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{n1} &= \sigma_{n2} = \sigma_n \\ \tau_{t1} &= \tau_{t2} = \tau_t \end{aligned} \right\} \quad (2-16)$$

只有两个区域内的沿间断线切线方向的正应力才可能出现间断, 即 $\sigma_{t1} \neq \sigma_{t2}$ 。证明如下:

在 $\sigma \sim \tau$ 坐标系内, 作过 (σ_n, τ_t) 的两个极限状态应力圆, 如图 2-5 所示。由图可见, $\sigma_{t1} \neq \sigma_{t2}$, σ_1 方向与间断线的法线夹角 $\psi_1 \neq \psi_2$ 。根据定义, 应力间断线不可能同时又是滑移线, 当滑移线从应力间断线一侧至另一侧时滑移线发生转折, 如图 2-6 所示。

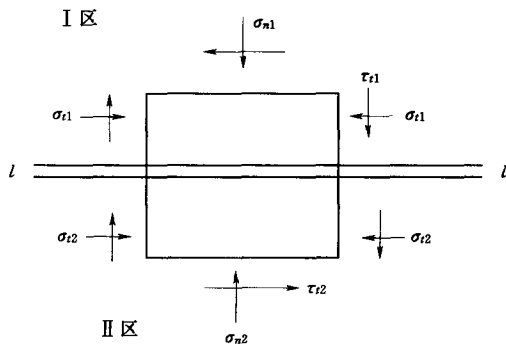


图 2-4 应力间断 $\sigma_{t1} \neq \sigma_{t2}$