# 应用模糊数学

胡继才 万福钧
吴珍权 胡新启 编著

武汉测绘科技大学出版社

# 应用模糊数学

胡继才　万福钧
吴珍权　胡新启　编著



武汉测绘科技大学出版社

(鄂)新登字 14 号

## 内容提要

本书是在《模糊数学》讲义(1991 年修订)的基础上,结合作者多年的数学实践经验并参考了国内有关著作编写而成。全书包括预备知识、模糊集合、分解定理与扩张原理、模糊数、模式识别、模糊关系与聚类分析、模糊综合评判与模糊关系方程、可能性测度与模糊积分、模糊逻辑与模糊语言、模糊规划、模糊控制共 11 章。

本书可作为大专院校信息工程、城规、计算机、土地管理、电子工程、光学仪器、测绘等专业的模糊数学教材使用,也可作为其它专业师生及有关科技工作者的学习参考书。

**图书在版编目(CIP)数据**

应用模糊数学/胡继才等编著 . —2 版 . —武汉:
武汉测绘科技大学出版社,1998.9
ISBN 7-81030-256-6

Ⅰ. 应… Ⅱ. 胡… Ⅲ. 模糊数学 Ⅳ. O159

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 21042 号

责任编辑　张立福　封面设计　日　文
武汉测绘科技大学出版社出版发行
武汉测绘科技大学出版社丹江印刷厂印刷

*

开本:850×1168　1/32　印张:11.8125　字数:291 千字
1998 年 9 月第 2 版　1998 年 9 月第 2 次印刷
印数:801～2800 册　定价:14.00 元

# 主要符号说明

$\in$　属于

$\overline{\in}$　不属于

$\subseteq$　包含

$\cup$　并

$\cap$　交

$A^c$　$A$ 的补集

$\varnothing$　空集

$U$　论域

$\mathscr{P}(U)$　$U$ 的幂集

$\mathscr{F}(U)$　$U$ 的模糊幂集

$\underset{\sim}{A}$　$U$ 的模糊子集

$\underset{\sim}{A}_\lambda$　$A$ 的 $\lambda$ 截集

$\mu_A(x)$或 $\underset{\sim}{A}(x)$　$\underset{\sim}{A}$的隶属度

$\underset{\sim}{A}\Leftrightarrow\underset{\sim}{B}$　$\underset{\sim}{A}$与 $\underset{\sim}{B}$等价

$\triangleq$　定义

$\forall$　对任意给定的

$\exists$　至少存在一个

$A\times B$　集合 $A$ 与 $B$ 的直积

$xRy$　$x$ 与 $y$ 具有 $R$ 关系

$x\overline{R}y$　$x$ 与 $y$ 没有 $R$ 关系

$\wedge$　取小运算

$\vee$　取大运算

$\dotplus$　代数和运算

$\dot{\wedge}$　代数积运算

$\oplus$　有界和运算

$\odot$　有界积运算

$\left.\begin{array}{l}\dot{*}\\ \overset{+}{*}\end{array}\right\}$　广义模糊算子

$f^*$　$f$ 的诱导映射

$\underset{\sim}{f}(x)$　模糊映射

$\left.\begin{array}{l}\underset{\sim}{+}\\ \underset{\sim}{-}\\ \underset{\sim}{\times}\\ \underset{\sim}{\div}\end{array}\right\}$　模糊运算

$\underset{\sim}{A}\otimes\underset{\sim}{B}$　模糊集 $A$ 与 $B$ 的内积

$\underset{\sim}{A}\odot\underset{\sim}{B}$　模糊集 $A$ 与 $B$ 的外积

$\overline{A}$　$\underset{\sim}{A}$的上模

$\underline{A}$　$\underset{\sim}{A}$的下模

$N(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})$　$A$ 与 $B$ 的贴近度

$d(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})$　$A$ 与 $B$ 的距离

$d(\underset{\sim}{A})$　$A$ 的模糊度

# 前　言

模糊数学中的“模糊”二字是译自英语“Fuzzy”，它除了有“模糊的”含意之外，尚有“不分明的”、“边界不清的”等意思。现在一般多译作“模糊”，也有人译作“不分明”，更有人主张音义双关地译作“乏晰”或“勿晰”，目前尚未统一。模糊数学是一门新兴的数学分支，诞生于1965年，它是数学理论和应用进一步发展的必然产物，从它的创始人——美国自动控制专家查德(L. A. Zadeh)教授的第一篇论文“模糊集合”(Fuzzy Set)开始，廿多年来模糊数学理论获得了迅速的发展，它那新颖的思想，不但已渗透到数学的各个分支，比如，现已在模糊拓扑、模糊矩阵、模糊测度、模糊群、模糊逻辑、模糊概率、模糊规划、模糊系统、模糊图论等方面做了许多工作，而且除了在科学技术和经济发展的各种应用领域中，如气象预报、医疗诊断、人工智能、模式识别、自动控制、信息处理、商品评价、体育训练外，在农业、林业、地质、地震、测绘、心理、冶金、采矿、管理科学等方面都取得了可喜的成果，显示了它巨大的生命力。

模糊数学是用数学方法研究和处理具有“模糊性”现象的数学，所谓模糊性，是指客观事物中所存在的概念外延不分明性。例如，“高个与矮个”、“美与丑”、“冷与热”等等。普通集合只能表现那些具有明确外延的概念。在普通集合中，对于我们所研究的对象，要么属于某个集合，要么不属于某个集合，两者必居其一，绝不允许模棱两可。但是客观现象大多具有“不分明性”，因此，把模糊集合的概念引用到经典数学研究领域中来，是一件十分自然的事情。模糊集合与普通集合不同，它没有明确的边界，只能说某个研究的对象属于某集合的程度，称它为隶属度。查德用隶属函数刻画模糊集合，这无疑是一个开创性的有意义的工作，模糊数学从诞生到现

在仅30多年的历史，正处在发展之中，还需继续完善，这就要求我们要密切联系实际，从实际中吸取营养，为模糊数学的发展共同努力。

本书在第一版的基础上，根据模糊数学课的教学大纲，对某些章节作了重要修改和调整，特别是为了将计算机技术引入教材，增加了所有模糊数学方法的程序设计，全书共分十一章，胡继才编写了第二章，第四章，第五章，第六章，第七章，第八章(部分)，第十章；万福钧编写了第一章，第三章，第九章；胡新启编制了全部计算方法的程序设计，编写了第八章，对全书的修改作了建设性贡献；吴珍权编写了第九章，第十一章。最后选编了一篇论文附于书后，目的在于一方面向初学者介绍撰写论文的格式和基本内容，另一方面是介绍用层次分析法确定权重排序的一个实例，以及编制具体计算程序的方法。

本书在编写、修订过程中，得到了武汉大学欧阳绵教授和裴礼文教授、武汉水利电力大学彭祖赠教授、同济医科大学李必祥教授、华中理工大学吴燮和教授、华中师范大学卢灵镒教授等的热情帮助，他们于百忙之中，全部或部分审阅了本书，并提出了许多宝贵意见，在此谨向他们表示衷心地感谢！

本书的再版，得到了武汉测绘科技大学有关领导的关心、支持，得到了武汉测绘科技大学出版社同志的大力支持和帮助，在此向他们表示诚挚的谢意。

由于我们对模糊数学的认识有一定的局限性，书中缺点、错误在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

1998年2月

# 目 录

# 第一章 预备知识

## §1.1 经典集合及其运算

### 一、集合的概念

集合是现代数学中最基本的概念之一，不能用更简单的概念来定义它，我们仅对集合概念作如下描述：

所谓集合乃是“具有某种属性的对象的全体”（简称为集）。例如全世界所有的火车、某个学校的学生、全体自然数等等都是集合。组成集合的每一个成员叫做这个集合的**元素**（简称为**元**）。同一集合中的元素都具有某种共同性质，人们就是根据这种性质，来判断某一讨论范围内的事物是否属于该集合的，而讨论的范围，也就是被讨论的全体对象叫做**论域**，又称**全集合**。

常用大写字母$A,B,C,\cdots,X,Y,Z,\cdots$等表示集合，而用小写字母$a,b,c,\cdots,x,y,z,\cdots$等表示元素。显然集合总是由一些元素构成的，而论域中某个元素是否属于某个集合，结论是很清楚的。例如，元素$a$如果它有集合$M$的特征，也就是说它是$M$的元素，记为$a\in M$（读作$a$属于$M$）；如果它没有集合$M$的特征，也就是说它不是$M$的元素，记为$a\overline{\in}M$（读作$a$不属于$M$），元素$a$与集合$M$的关系只有两种可能，要么$a\in M$，要么$a\overline{\in}M$，即“非此即彼”。

### 二、集合的表示法

集合一般有两种表示方法。

第一种是列举法。把集合的元素全部列出来，写在花括号内用

来表示集合，这种方法称为**列举法**。例如，由小于10的正整数组成的集合，可以表示为$\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$。

请注意，在集合花括号里，不考虑元素之间的顺序，只要元素完全相同，就认为是同一个集合，例如，$\{1,3,5,7\}$和$\{5,1,7,3\}$就是同一个集合。一个元素在同一个集合里不能重复出现。

当集合的元素很多，或有无限多个，不能将全部元素写在花括号中时，可以列出有代表性的几个元素，其它元素用省略号表示就行了。例如，全体自然数集$N$可以表示为$\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$。

第二种是表征法。把描述集合中元素的共同属性或表示集合中元素的规律，写在花括号内用来表示集合，这种方法称为**表征法**。例如，由全体武汉测绘科技大学的学生组成的集合，可以表示为{全体武汉测绘科技大学的学生}。

又如，由小于10的正整数组成的集合，又可表示为$\{x \mid x<10$且$x \in N\}$。

用表征法表示集合的一般形式为

$$M=\{x \mid P(x)\}$$

其中$P(x)$是$x$所满足的条件。

例如，设$M=\{x \mid x^2-1=0\}$，它是满足方程$x^2-1=0$的一切$x$组成的集合，解方程即得

$$M=\{x \mid x^2-1=0\}=\{-1,1\}$$

## 三、子集、空集和幂集

**定义1.1** 设$A,B$是论域$U$的两个集合，如果集合$A$的元素都是集合$B$的元素，则称集合$A$是集合$B$的**子集**，也称$A$含于$B$，或称$B$包含$A$，记为$A \subseteq B$或$B \supseteq A$，即

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x,\ x \in A \rightarrow x \in B$$

因为任何一个集合$A$都含于它本身之中，所以$A \subseteq A$，也就是说，任何一个集合都是它本身的子集。

记号 $A\not\subseteq B$ 表示对 $A\subseteq B$ 的否定，即表示 $A$ 不是 $B$ 的子集，读作"$A$ 不含于 $B$"或"$B$ 不包含 $A$"。

由此可见，当且仅当集合 $A$ 中至少有一个元素不属于集合 $B$ 时，记作 $A\not\subseteq B$。

**定义 1.2** 设 $A,B$ 是论域 $U$ 的两个集合，如果关系 $A\subseteq B$ 及 $B\subseteq A$ 同时成立，称集合 $A$ 与集合 $B$ **相等**，记为

$$A=B\Leftrightarrow A\subseteq B \text{ 且 } B\subseteq A$$

记号 $A\neq B$ 是对 $A=B$ 的否定，显然两个集合当且仅当它们中的一个集合至少有一个元素不属于另一个集合时，它们才不相等。

**定义 1.3** 如果 $A\subseteq B$，又能找到元素 $x\in B$，但 $x\overline{\in} A$，则称 $A$ 是 $B$ 的**真子集**，记为

$$A\subset B \text{ 或 } B\supset A$$

这时 $A$ 的所有元素都属于 $B$，但 $B$ 中至少有一个元素不属于 $A$，即

$$A\subset B\Leftrightarrow A\subseteq B \text{ 且 } \exists\, x\in B \text{ 而 } x\overline{\in} A$$

例如，$\{0,2\}\subset\{0,2,5\}$。

**定义 1.4** 不含任何元素的集合称为**空集**，记为$\varnothing$。

例如，$\{x\mid x\in R,x^2+1=0\}=\varnothing$。

注意，$\{x\mid x^2=0\}=\{0\}$不是空集，因为它是由一个元素 0 所组成的，是单元素集合。

空集是任何集合 $A$ 的子集，否则，在空集中至少有一个元素不属于 $A$；但空集不含任何元素，当然也找不到这样的元素，所以对于任何集合 $A$，有

$$\varnothing\subseteq A\subseteq U$$

**定义 1.5** 集合 $A$ 的所有子集组成的一个新集合称为**幂集**，记为 $\mathscr{P}(A)$。

例如，记 $A=\{a_1,a_2,a_3\}$，则

$\mathscr{P}(A)=\{\varnothing,\{a_1\},\{a_2\},\{a_3\},\{a_1,a_2\},\{a_1,a_3\},\{a_2,a_3\},A\}$
$\mathscr{P}(A)$的元素恰好有 $2^3$ 个，而$\{a_1\}$，$\{a_2\}$和$\{a_3\}$称为单元素集。

一般，若 $A$ 的元素有 $n$ 个，则幂集 $\mathscr{P}(A)$的元素有 $2^n$ 个。

必须注意，$\mathscr{P}(A)$的元素是集合。因此若 $a\in A$，则应有$\{a\}\in\mathscr{P}(A)$，不能写成$\{a\}\subset\mathscr{P}(A)$；而对 $A$ 来说，$\{a\}\subset A$，而不能写成$\{a\}\in A$。

### 四、并集、交集、差集和补集

**定义 1.6** 设 $A,B$ 是论域 $U$ 的两个集合，那么属于集合 $A$ 或属于集合 $B$ 的所有元素组成的集合，叫做 $A$ 与 $B$ 的**并集**（简称**并**），记为 $A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x|x\in A \text{ 或 } x\in B\}$$

例如，论域 $U=\{1,2,3,4,5,\cdots,19,20\}$，$U$ 中的子集：

$$A=\{5,10,15,20\}$$

$$B=\{7,14\}$$

则

$$A\cup B=\{5,7,10,14,15,20\}$$

**定义 1.7** 设 $A,B$ 是论域 $U$ 的两个集合，那么属于集合 $A$ 同时又属于集合 $B$ 的所有元素组成的集合，叫做 $A$ 与 $B$ 的**交集**（简称**交**），记为 $A\cap B$，即

$$A\cap B=\{x|x\in A \text{ 且 } x\in B\}$$

例如，设 $U=\{x|$某校图书馆所有的图书$\}$，$A=\{x|1990$ 年所购买的图书$\}$，$B=\{x|x$ 是数学书$\}$。则

$$A\cap B=\{x|1990\text{ 年所购买的数学书}\}$$

**定义 1.8** 设 $A,B$ 是论域 $U$ 的两个集合，那么属于集合 $A$ 但不属于集合 $B$ 的元素所组成的集合，叫做 $A$ 与 $B$ 的**差集**，记为 $A-B$，即

$$A-B=\{x|x\in A \text{ 且 } x\notin B\}$$

**定义 1.9** 由集合 $U$ 中不属于 $A$ 的元素所构成的集合称为 $A$