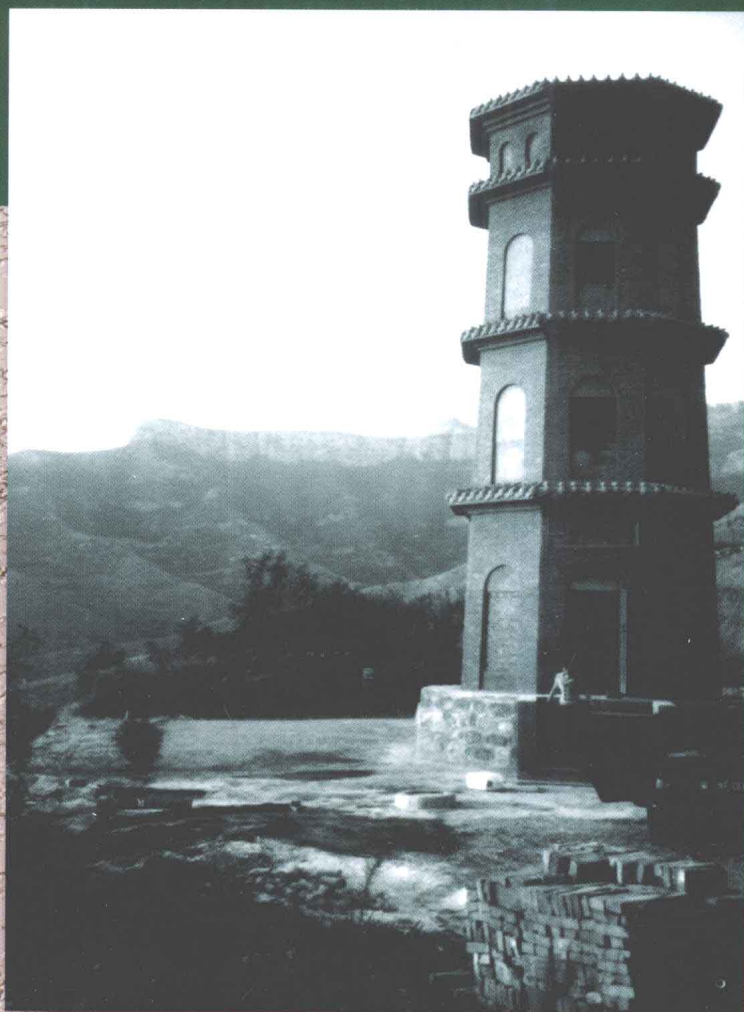


地层绝对应力测量 与钻孔应变测量

骆鸣津 池顺良 马鸿钧 著



地震出版社

地层绝对应力测量与 钻孔应变测量

骆鸣津 池顺良 马鸿钧 著

地震出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

地层绝对应力测量与钻孔应变测量/骆鸣津, 池顺良, 马鸿钧著.

—北京: 地震出版社, 2008. 4

ISBN 978-7-5028-3275-9

I. 地… II. ①骆…②池…③马… III. ①地层—绝对测量—应力测定②钻孔—应变测量
IV. P53 P634. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2007) 第 200351 号

地震版 XT200600160

内 容 提 要

地球绝对应力的测量与研究是地球科学、工程建设和防震减灾等的基础, 具有现实和深远意义。本书论述了在钻轧应变测量的基础上, 用全新的方法测量地层绝对应力: ①在井下仪器探头内充入气体或液体, 密封、形成弹性体, 并测量对探头筒壁施加的压力值, 或用顶杆作为弹性体, 对探头筒壁施加顶力, 测量顶力的大小; ②对筒壁施加压力或顶力和不施加压力或不施加顶力, 测量两种情况的钻孔应变固体潮的振幅比, 进而求外内应力的比值; ③将外内应力的比值乘以测量出的对筒壁施加的压力或顶力值, 即可求得地层应力。本方法具有精度高和能长期重复观测等优点。本书可作为地学、工程学研究者、或有关专业院校师生参考的基础读物。

地层绝对应力测量与钻孔应变测量

骆鸣津 池顺良 马鸿钧 著

责任编辑: 陈晏群

责任校对: 郭京平

出版发行: 地震出版社

北京民族学院南路 9 号

邮编: 100081

发行部: 68423031 68467993

传真: 88421706

门市部: 68467991

传真: 68467991

总编室: 68462709 68423029

传真: 68467972

E-mail: seis@ht.rol.cn.net

经销: 全国各地新华书店

印刷: 北京地大彩印厂

版 (印) 次: 2008 年 4 月第 1 版 2008 年 4 月第 1 次印刷

开本: 787×1092 1/16

字数: 400 千字

印张: 15.75

印数: 0001~1300

书号: ISBN 978-7-5028-3275-9/P·1355 (3967)

定价: 40.00 元

版权所有 翻印必究

(图书出现印装问题, 本社负责调换)

前 言

地球演化运动的各种学说都与地层应力有关，尤其是板块学说与地层的水平应力有关，测定地层的绝对应力就成为检验方法之一。当人们测出地层的绝对应力，又测出地层的等效弹性常数时，就可计算出地层的绝对应变也可用来检验。地震是岩石层受力破裂的结果，测出地层绝对应力和地层等效弹性常数就可能成为预报地震的主要物理通道。地层的岩性、弹性常数、绝对应力、绝对应变也是工程设计与监测的基础，对经济建设和防震减灾发挥重要作用。

由弹性力学得知，空孔受力后孔径变化有放大作用。测定地层绝对应力就是利用这一弹性力学原理，在空钻孔内（或在仪器探头筒内）填入弹性体（如气体、液体、顶杆等），对孔壁或筒壁加力（在孔壁或筒壁所加的应力称为内应力），并测出对孔壁或筒壁加力的大小。在同样的变化地应力作用下，不同孔壁应力或不同筒壁应力的钻孔，有不同的孔径变化。当弹性介质（地层、耦合介质、仪器钢筒、加力弹性体等）稳定不变时，地层（外）应力与孔壁或筒壁（内）所加应力的比值也稳定不变，不管地层应力是大是小，变大变小，是地层原有的绝对应力，还是地层潮汐应力，外内应力的比值都相同。如果能找到一种方法求出外内应力的比值，就能由测出的内应力来计算出外应力，当测出的内应力（对孔壁或探头筒壁施加的应力）是可靠的、绝对的，则计算出的外应力，即地层应力也是可靠的、绝对的。

地层中的绝对应力变化是非常缓慢的，而且与各种环境因素引起的漂移分不开。在地层中是有应力变化的，这就是潮汐应力的周期变化，用它可以求得外内应力的比值。在空钻孔（或仪器探头筒）内填入加力弹性体，称为实孔。测量出实孔的钻孔应变固体潮，它是潮汐外应力和潮汐内应力的函数，或者说潮汐外应力和潮汐外内应力比值的函数。当潮汐内应力为零时，称为空孔，测出空孔的钻孔应变固体潮，它是潮汐外应力的函数。再利用观测出的空孔和实孔的钻孔应变固体潮振幅比值，求出外内潮汐应力的比值。就可用以求定地层绝对应力。

本书第8章、第9章阐述地层中的钻孔应变测量，由池顺良撰写，其中8.8节马鸿钧参加撰写。这两章概述了应变测量的发展和现状，列出了YRY-4分量钻孔应变仪的主要技术指标，钻孔应变仪探头中径向位移传感器的布置方式，仪器的检查、安装及定向，仪器输出信息的采集记录，中国数字地震台网YRY-

4 分量钻孔应变仪观测记录资料及分析等。观测资料表明YRY-4分量钻孔应变仪已能做到漂移较小，环境因素干扰减小，基本能够满足面应变的检测，为研究构造运动打开了大门。

本书讨论了地层绝对应力测量仪两种弹性体对探头内壁加力的方式。其一是气体弹性体（或液体弹性体），在探头内充入气体（或液体）、密封作为气体弹性体（或液体弹性体），测出气压（或液压）数值。用这一方式测定地层水平平均绝对应力。其二是用顶杆为弹性体对孔壁加力，并测出顶力的数值，用这一方式测定水平绝对主应力的方向和大小。这种用钻孔应变固体潮求定地层绝对应力的方法，与应力解除法和水压致裂法相比，具有精度高和不破损原地层介质并能长期重复观测等方面的优点。

用空孔和实孔钻孔的应变固体潮振幅比来求定潮汐外内应力比值的优点是，它不受格值不准和其他环境因素引起的漂移等方面的影响。本书以固体潮理论值为工具，将不同时刻的固体潮振幅观测值换算成同一时刻固体潮振幅。

用空孔与实孔钻孔应变观测值中非潮汐部分之差，求取内应力系数，用空孔钻孔应变固体潮观测值与潮汐理论值求出面应力系数和差应力系数的初值。再用空孔与实孔钻孔应变固体潮观测值之差，进一步求出面应力系数、差应力系数和地层的潮汐应力。

如果为非中心耦合或耦合介质为非均匀、非各向同性等，则求出面应力系数和差应力系数与方向有关。本书中用近似椭圆的数学模型来拟合。

地层弹性常数也是地球科学研究和工程建设的基本参数。求定地层弹性常数可用两种办法：一种是直接用钻孔的岩芯测定弹性常数方法；另一种为本书论述的方法，即利用YRY型钻孔应变仪测量出固体潮频段资料和该仪器观测出的地震波频段的资料共同解出。

地层绝对应力中，自重应力是其中主要部分。因此必须计算出自重应力作用下的钻孔应变，必须计算出周围地形起伏负荷作用下的钻孔应变，才能知道地层的构造应力及其他非地层自重的应力。

地震预报若要成功，应要开拓创新，本书提出测量地层应力新的思路，是一种创新的探索。更为重要的是做到求真务实，要把提高观测资料的可信度放在战略高度。我国地震预报已实践了40年，至今台站前兆仪器还是单套仪器观测，无法评定观测值的信噪比和可信度以至判断真伪。地震前兆是时间序列的小概率事件，时过境迁、不再重现。无信噪比的观测资料是无用的，若不改进，地震工作者的奋斗就将付诸东流。

本书作者自1991年首次发表测定地层绝对应力的文章以来，鲜有反馈。现早已退休，年愈古稀，即使还有宏愿，也只能任风漂去。郭世琪先生得知此事，多方鼓励，表示愿意负责筹划，资助出版文集。为此，我们将发表的文章及最

新研究成果重新整理，使之成系统，终于成书并能够奉献给对此感兴趣的读者。在此要衷心感谢资助本书出版和以前与作者共同工作过的同志，他们是：杨毅、郭世琪、顾梦林、李安印、姚文斌、睢建设、陈宪忠、卢国合、李兰生等。也要感谢家人骆兰梅、骆有琦的支持与帮助。

骆鸣津

2007年9月13日

目 录

第一章 弹性力学基本公式及理论	1
1. 1 笛卡尔坐标表示的弹性力学基本公式	1
1. 2 球坐标表示的弹性力学基本方程	8
1. 3 圆柱坐标表示的弹性力学基本公式	14
第二章 引潮力位及其计算	24
2. 1 引潮力位的定义	24
2. 2 引潮力位计算的整体公式	27
2. 3 用潮汐波求和的形式来计算引潮力位	31
2. 4 刚体地球上引潮力的重力分量	33
2. 5 刚体地球上引潮力引起的垂线偏差	34
第三章 引潮力引起弹性地球的重力地倾斜应变应力	39
3. 1 引潮力位与位移的关系	39
3. 2 重力	40
3. 3 地倾斜	42
3. 4 弹性地球的应变固体潮	43
3. 5 弹性地球上的应力固体潮	51
3. 6 求定模型地球的勒夫数	51
第四章 钻孔应变及其固体潮	53
4. 1 地层应力的圆柱坐标表示及边界条件	53
4. 2 地层中平均水平径向应力作用下, 钻孔应变的数学模型及其解	54
4. 3 地层水平偏应力作用下钻孔应变的数学模型及其解	58
4. 4 水平主应力和钻孔内壁施以均匀径向应力共同作用下的钻孔应变	63
4. 5 钻孔应变固体潮	64
第五章 孔壁和筒壁不同应力分布的钻孔应变	66
5. 1 圆孔内壁加力的数学模型	66
5. 2 仪器探头埋封情况下的钻孔应变	70
5. 3 空钻孔情况下的钻孔应变	74
5. 4 多层介质的钻孔应变	75
5. 5 非中心耦合和非均匀各向同性	78

5. 6	顶头加力下的钻孔应变	79
5. 7	空钻孔应变与地层应力应变的关系	80
第六章	用加气压或加液压办法测定地层水平平均绝对应力	84
6. 1	改变对钻孔孔壁施加气体压力的大小, 来测定地层水平平均绝对应力	84
6. 2	在耦合探头内部加气体压力的办法测定地层水平平均绝对应力	88
6. 3	用液体作为弹性体对筒壁加力以求定地层水平平均绝对应力	91
第七章	用顶头加力方法测定地层绝对应力	94
7. 1	顶头对孔壁加力测定地层平均绝对应力	94
7. 2	顶头对孔壁加力测定地层主应力之差 $P_1 - P_3$ 和主应力的方位角 ψ	100
7. 3	用顶头对耦合探头内壁加顶力的方法测定地层水平平均绝对应力	105
7. 4	用顶头对耦合探头内壁加顶力的方法测定地层主应力之差及主应力方向	110
7. 5	三分量应变探头用顶头加力的方法测定地层水平绝对应力	113
7. 6	绝对应力测量仪设想	120
第八章	钻孔应变仪测量地层的应变应力	121
8. 1	钻孔应变测量的历史回顾	121
8. 2	用 GPS、位移地震仪、钻孔应变仪实现“地动位移”全频段监测	125
8. 3	钻孔应变仪探头工作状态的力学分析	125
8. 4	用钻孔应变仪接收地震波	126
8. 5	高精度钻孔应变观测中的干扰因素	128
8. 6	钻孔应变观测的环境要求	129
8. 7	钻孔应变仪对钻孔的要求	130
8. 8	振弦式钻孔应变仪	131
第九章	YRY-4 分量型钻孔应变仪	136
9. 1	YRY-4 分量钻孔应变仪的主要技术指标	136
9. 2	YRY-4 型分量钻孔应变仪的应变固体潮和应变地震波记录	137
9. 3	YRY-4 分量钻孔应变仪探头中径向位移传感器的布置方式	138
9. 4	YRY-4 分量钻孔应变仪的基本结构	140
9. 5	YRY-4 分量钻孔应变仪的地面记录设备	142
9. 6	仪器的安装	143
9. 7	仪器探头的定向	144
9. 8	中国数字地震台网部分 YRY-4 分量钻孔应变仪记录资料	145
9. 9	对记录数据的初步分析	157
9. 10	用钻孔应变仪观测地层中高频信息的设想	163
第十章	地面负荷及地球自重对应力应变的影响	170
10. 1	地面负荷对应力应变的影响	170

10. 2	地层自重的应力应变及引起的钻孔应变	177
第十一章 综合应用钻孔应变固体潮和应变地震波资料求定地层弹性常数 and 地震参数		
		180
11. 1	用平衡方程圆孔问题的解近似代替波动方程的解	180
11. 2	纵波入射的钻孔应变	182
11. 3	横波入射的钻孔应变	184
11. 4	面波入射的钻孔应变	186
11. 5	顶头加力情况下地震波入射的钻孔应变	187
11. 6	用摆式地震仪记录到的地面位移求定钻孔应变耦合的应力系数	188
11. 7	求定地层的弹性常数	190
11. 8	用钻孔应变地震波观测值计算地震参数	191
第十二章 用承压井水位固体潮求定地层应力及含水层参数		
		192
12. 1	承压井水位固体潮的水流扩散方程	192
12. 2	边界条件	195
12. 3	扩散方程的解	198
12. 4	气压对水位固体潮的影响	202
12. 5	调和分析及含水层参数的确定	204
第十三章 资料分析		
		209
13. 1	固体潮观测资料的拟合分析的方法	209
13. 2	固体潮观测资料的滤波分析方法	213
13. 3	系数矩阵为观测值时的回归分析 (一)	222
13. 4	系数矩阵为观测值时的回归分析 (二)	228
13. 5	要保证观测资料质量	230
第十四章 起潮力作为地球演化的一种动力		
		233
14. 1	莫霍面是化学界面	233
14. 2	起潮力引起的弹性位能级及其转换	234
14. 3	内波形成的力学机制	237

第一章 弹性力学基本公式及理论

地层的绝对应力测量是以弹性力学和固体潮理论为基础的,尤其是球坐标和圆柱坐标表示的弹性力学公式应用得最多,而一般的弹性力学书中大都没有编入,因此本章将弹性力学基本公式汇集列出。

1.1 笛卡尔坐标表示的弹性力学基本公式

1.1.1 体力 and 面力

体力是作用在物体质点上的力,例如地球的引力,自转的离心力,天体(月球、太阳等)的引力,地球公转(地球绕地球与天体公共质心旋转)时的惯性离心力等。

面力是作用在物体某一方向截面上的力。除以截面面积,称为应力。作用力与截面法线方向重合时,称法向应力,也称正应力。作用力与截面的法线方向垂直时,称切向应力。取包围质点的六面体三个法线为坐标轴 x_1, x_2, x_3 , 则应力可用二阶张量 σ_{ij} 来表示, i, j 为 1, 2, 3 三个数之一。

应力分量

x_1 轴 x_2 轴 x_3 轴

垂直于 x_1 轴的面上

垂直于 x_2 轴的面上

垂直于 x_3 轴的面上

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \sigma_{ij}$$

(1-1)

一般用 x, y, z 表示 x_1, x_2, x_3 。
在封闭体中动量矩总和为零,据此可以得到应力张量的对称性,即

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij} &= \sigma_{ji} \\ \sigma_{12} &= \sigma_{21} \\ \sigma_{13} &= \sigma_{31} \\ \sigma_{23} &= \sigma_{32} \end{aligned} \right\}$$

(1-2)

1.1.2 平衡方程和运动方程

包围质点 M 的六个面上与坐标轴 x_1, x_2, x_3 相平行和垂直,将六个面上某一方向的力加起

来的总力与该方向体力的总力平衡。以 x_1 方向为例, $\sigma_{11}(x_1, x_2, x_3)$ 与 $\sigma_{11}(x_1 + dx_1, x_2, x_3) = \sigma_{11}(x_1, x_2, x_3) + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1$ 方向相反, $\sigma_{21}(x_1, x_2, x_3)$ 与 $\sigma_{21}(x_1, x_2 + dx_2, x_3) = \sigma_{21} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} dx_2$ 方向相反, $\sigma_{31}(x_1, x_2, x_3)$ 与 $\sigma_{31}(x_1, x_2, x_3 + dx_3) = \sigma_{31} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} dx_3$ 方向相反。面应力乘以应力所在面积, 体力乘以所包围质点的质量, 用 f_1, f_2, f_3 表示在 x_1, x_2, x_3 方向单位质量的体力, ρ 为密度, 将六个面上 x_1 方向的力加起来与 x_1 方向的总体力 $\rho f_1, dx_1, dx_2, dx_3$ 平衡,

$$\rho f_1 dx_1 dx_2 dx_3 + \left(\sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1 - \sigma_{11} \right) dx_2 dx_3 + \left(\sigma_{21} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} dx_2 - \sigma_{21} \right) dx_1 dx_3 + \left(\sigma_{31} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} dx_3 - \sigma_{31} \right) dx_2 dx_1 = 0$$

$$\text{得: } \left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + \rho f_1 &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + \rho f_2 &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \rho f_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-3)$$

$$\text{或写成: } \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i = 0 \quad (1-4)$$

式中 σ_{ij}, f_i 是空间坐标的函数。(1-3)和(1-4)式是平衡方程。 f_i 为零时为齐次平衡方程。

如果介质处于非平衡状态, 即某一方向所有面力、体力加起来不等于零, 根据牛顿第二定律, 物体受力后就要产生加速度运动,

$$\rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (1-5)$$

式中, u_i 为 i 方向的质点移位; σ_{ij}, f_i, u_i 为 x_1, x_2, x_3 和 t 的函数。式(1-5)即为运动方程; 介质为弹性体, 受力后产生弹性形变, 形成弹性波, 逐渐往外传播, 质点弹性位移运动与弹性波传播方向一致的称纵波, 与传播方向垂直的称横波。

1.1.3 坐标轴旋转时应力张量各分量之间的变换公式

笛卡尔坐标系中 $x_i(x_1, x_2, x_3)$ 点与 $x'_k(x'_1, x'_2, x'_3)$ 点重合, 两者的坐标轴旋转角度为 (X_i, X'_k) , 这些角度的方向余弦用 α_{ki} 表示:

$$\alpha_{ki} = \cos(X'_k, X_i) \quad (1-6)$$

α_{ki} 用表 1-1 来表示。

表 1-1 坐标旋转角的方向余弦 α_{ki}

	X_1 轴	X_2 轴	X_3 轴
X'_1 轴	l_1	m_1	n_1
X'_2 轴	l_2	m_2	n_2
X'_3 轴	l_3	m_3	n_3

将用坐标 $X_i(x_1, x_2, x_3)$ 表示的应力张量的分量 σ_{ji} , 用旋转后坐标 $X'_k(x'_1, x'_2, x'_3)$ 来表示:

$$\sigma'_{lk} = \alpha_{lj} \alpha_{ki} \sigma_{ji} \quad (1-7)$$

分项写出:

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_{11} &= \sigma_{11} l_1^2 + \sigma_{22} m_1^2 + \sigma_{33} n_1^2 + 2\sigma_{12} l_1 m_1 + 2\sigma_{23} m_1 n_1 + 2\sigma_{31} l_1 n_1 \\ \sigma'_{22} &= \sigma_{11} l_2^2 + \sigma_{22} m_2^2 + \sigma_{33} n_2^2 + 2\sigma_{12} l_2 m_2 + 2\sigma_{23} m_2 n_2 + 2\sigma_{31} l_2 n_2 \\ \sigma'_{33} &= \sigma_{11} l_3^2 + \sigma_{22} m_3^2 + \sigma_{33} n_3^2 + 2\sigma_{12} l_3 m_3 + 2\sigma_{23} m_3 n_3 + 2\sigma_{31} l_3 n_3 \\ \sigma'_{12} &= \sigma_{11} l_1 l_2 + \sigma_{22} m_1 m_2 + \sigma_{33} n_1 n_2 + \sigma_{12} (l_1 m_2 + l_2 m_1) + \\ &\quad \sigma_{23} (m_1 n_2 + m_2 n_1) + \sigma_{31} (l_1 n_2 + l_2 n_1) \\ \sigma'_{23} &= \sigma_{11} l_2 l_3 + \sigma_{22} m_2 m_3 + \sigma_{33} n_2 n_3 + \sigma_{12} (l_2 m_3 + l_3 m_2) + \\ &\quad \sigma_{23} (m_2 n_3 + m_3 n_2) + \sigma_{31} (l_2 n_3 + l_3 n_2) \\ \sigma'_{31} &= \sigma_{11} l_1 l_3 + \sigma_{22} m_1 m_3 + \sigma_{33} n_1 n_3 + \sigma_{12} (l_3 m_1 + l_1 m_3) + \\ &\quad \sigma_{23} (m_1 n_3 + m_3 n_1) + \sigma_{31} (l_1 n_3 + l_3 n_1) \end{aligned} \right\} \quad (1-8)$$

1.1.4 位移与应变

设空间笛卡尔坐标系中有一弹性物体, 在外力作用下发生位置变化和形状变化, 物体中 A 点的位移用 $u_r(r)$ 来表示, r 为 A 点到原点的距离, $u_r(r)$ 是 r 的连续函数, 也即是 x_1, x_2, x_3 的连续函数, 是矢量, 一阶张量。在 A 点附近有一 B 点, 在外力作用下其位移为 $u(r+dr)$, 表示为:

$$u_i(x_j + dx_j) = u_i(x_j) + \frac{\partial u_i(x_j)}{\partial x_j} dx_j \quad (1-9)$$

$$u_i(x_j + dx_j) = u_i(x_j) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i(x_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j(x_i)}{\partial x_i} \right) dx_j + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i(x_j)}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j(x_i)}{\partial x_i} \right) dx_j \quad (1-10)$$

用 e_{ji} 表示应变张量, 用 ω_{ji} 表示旋转张量, 则

$$e_{ji} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i(x_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j(x_i)}{\partial x_i} \right] = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{pmatrix} \quad (1-11)$$

$$\omega_{ji} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i(x_j)}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j(x_i)}{\partial x_i} \right] = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1-12)$$

$\frac{\partial u_i(x_j)}{\partial x_j}, \frac{\partial u_j(x_i)}{\partial x_i}$ 为一阶张量 $u_i(x_j), u_j(x_i)$ 对 x_j, x_i 求导, e_{ji}, ω_{ji} 应为二阶张量, 将 e_{ji}, ω_{ji} 逐项写出:

$$\left. \begin{aligned} e_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, & e_{12} &= e_{21} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \\ e_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, & e_{23} &= e_{32} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) \\ e_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, & e_{31} &= e_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1-13)$$

$$\left. \begin{aligned} \omega_{11} &= 0, & \omega_1 &= -\omega_{32} = \omega_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) \\ \omega_{22} &= 0, & \omega_2 &= -\omega_{13} = \omega_{31} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ \omega_{33} &= 0, & \omega_3 &= -\omega_{21} = \omega_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1-14)$$

式(1-13)即应变与位移关系, 式(1-10)可写成:

$$u_i(x_j + dx_j) = u_i(x_j) + e_{ji} dx_j + \omega_{ji} dx_j \quad (1-15)$$

式中, $u_i(x_j)$ 为物体整体平移; $\omega_{ji} dx_j$ 为物体旋转形成的位移; $e_{ji} dx_j$ 为物体受力后产生弹性变形形成的位移。

1.1.5 坐标轴旋转时应变张量各分量之间的变换公式

笛拉尔坐标 $X_i(x_1, x_2, x_3)$ 表示的应变 e_{ij} 与 $X'_k(x'_1, x'_2, x'_3)$ 表示的应变 e'_{ke} 的变换公式:

$$e'_{kl} = \alpha_{ki} \alpha_{lj} e_{ij} \quad (1-16)$$

两坐标轴旋转夹角的方向余弦用式(1-6)表示, 式(1-16)逐项写出, $e'_{ij} = e'_{x'_i x'_j}, e_{ij} = e_{x_i x_j}$ 。

$$\left. \begin{aligned} e'_{11} &= l_1^2 e_{11} + m_1^2 e_{22} + n_1^2 e_{33} + l_1 m_1 e_{12} + m_1 n_1 e_{23} + n_1 l_1 e_{31} \\ e'_{22} &= l_2^2 e_{11} + m_2^2 e_{22} + n_2^2 e_{33} + l_2 m_2 e_{12} + m_2 n_2 e_{23} + n_2 l_2 e_{31} \\ e'_{33} &= l_3^2 e_{11} + m_3^2 e_{22} + n_3^2 e_{33} + l_3 m_3 e_{12} + m_3 n_3 e_{23} + n_3 l_3 e_{31} \end{aligned} \right\} \quad (1-17)$$

$$\left. \begin{aligned} e'_{12} &= l_1 l_2 e_{11} + m_1 m_2 e_{22} + n_1 n_2 e_{33} + (l_1 m_2 + l_2 m_1) e_{12} \\ &\quad + (m_1 n_2 + m_2 n_1) e_{23} + (n_1 l_2 + n_2 l_1) e_{31} \\ e'_{23} &= l_2 l_3 e_{11} + m_2 m_3 e_{22} + n_2 n_3 e_{33} + (l_2 m_3 + l_3 m_2) e_{12} \\ &\quad + (m_2 n_3 + m_3 n_2) e_{23} + (n_2 l_3 + n_3 l_2) e_{31} \\ e'_{31} &= l_1 l_3 e_{11} + m_1 m_3 e_{22} + n_1 n_3 e_{33} + (l_1 m_3 + l_3 m_1) e_{12} \\ &\quad + (m_1 n_3 + m_3 n_1) e_{23} + (n_1 l_3 + n_3 l_1) e_{31} \end{aligned} \right\} \quad (1-17)$$

1.1.6 应变的协调方程(王龙甫,1984)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_1^2} &= 2 \frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 e_{33}}{\partial x_2^2} &= 2 \frac{\partial^2 e_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 e_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_3^2} &= 2 \frac{\partial^2 e_{31}}{\partial x_3 \partial x_1} \\ 2 \frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} &= 2 \frac{\partial}{\partial x_1} \left(-\frac{\partial e_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial e_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial e_{12}}{\partial x_3} \right) \\ 2 \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_3 \partial x_1} &= 2 \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial e_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial e_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial e_{12}}{\partial x_3} \right) \\ 2 \frac{\partial^2 e_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} &= 2 \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial e_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial e_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial e_{12}}{\partial x_3} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1-18)$$

1.1.7 均匀各向同性介质中弹性常数之间的关系

弹性常数 $E, \nu, \mu, \lambda, \kappa$ 中仅有两个线性独立, 它们之间关系如表 1-2。

表 1-2 弹性常数之间的关系

	E	ν	μ	λ	κ
E, ν			$\frac{E}{2(1+\nu)}$	$\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	$\frac{E}{3(1-2\nu)}$
E, μ		$\frac{E}{2\mu} - 1$		$\frac{\mu(E-2\mu)}{3\mu-E}$	$\frac{\mu E}{3(3\mu-E)}$
E, κ		$\frac{3\kappa-E}{6\kappa}$	$\frac{3\kappa E}{9\kappa-E}$	$\frac{3\kappa(3\kappa-E)}{9\kappa-E}$	
ν, μ	$2\mu(1+\nu)$			$\frac{2\mu\nu}{1-2\nu}$	$\frac{2\mu(1+\nu)}{3(1-2\nu)}$

续表

	E	ν	μ	λ	κ
ν, λ	$\frac{\lambda(1+\nu)(1-2\nu)}{\nu}$		$\frac{\lambda(1-2\nu)}{2\nu}$		$\frac{\lambda(1+\nu)}{3\nu}$
ν, κ	$3\kappa(1-2\nu)$		$\frac{3\kappa(1-2\nu)}{2(1+\nu)}$	$\frac{3\kappa\nu}{1+\nu}$	
μ, λ	$\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$	$\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$			$\lambda + \frac{2}{3}\mu$
μ, κ	$\frac{9\kappa\mu}{3\kappa+\mu}$	$\frac{3\kappa-2\mu}{2(3\kappa+\mu)}$		$\kappa - \frac{2}{3}\mu$	
λ, κ	$\frac{9\kappa(\kappa-\lambda)}{3\kappa-\lambda}$	$\frac{\lambda}{3\kappa-\lambda}$	$\frac{3}{2}(\kappa-\lambda)$		

弹性常数的意义为：

$$\left. \begin{aligned}
 &\text{①杨式模量 } E \quad E = \frac{\sigma_{11}}{e_{11}} \\
 &\text{②泊松比 } \nu \quad \nu = -\frac{e_{22}}{e_{11}} \text{ (当 } \sigma_{11} \neq 0, \sigma_{22} = \sigma_{33} = 0 \text{ 时)} \\
 &\text{③剪切模量 } \mu \quad \mu = \frac{\sigma_{12}}{2e_{12}} \\
 &\text{④拉梅常数 } \lambda \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \\
 &\text{⑤压缩模量 } \kappa \quad \kappa = -\frac{p}{\theta} = \frac{\Theta}{3\theta}
 \end{aligned} \right\} \quad (1-19)$$

p 为均匀压缩时的压力 $p = \frac{1}{3}\Theta$

$$\Theta = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \quad \theta = e_{11} + e_{22} + e_{33}$$

1.1.8 均匀各向同性介质中应力与应变的关系

$$\begin{aligned}
 e_{ji} &= -\frac{\nu}{E}\Theta\delta_{ji} + \frac{1+\nu}{E}\sigma_{11} \\
 &= -\frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})\delta_{ji} + \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ji}
 \end{aligned} \quad (1-20)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{ji} &= \lambda \theta \delta_{ji} + 2\mu e_{ji} \\ &= \lambda(e_{11} + e_{22} + e_{33})\delta_{ji} + 2\mu e_{ji}\end{aligned}\quad (1-21)$$

式中 $\delta_{ji} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$

1.1.9 以位移表示的平衡方程齐次解

以位移表示的平衡方程(运动方程)(王龙甫, 1984)

$$\left. \begin{aligned}(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + \mu \nabla^2 u_1 + X_1 &= 0 \quad \left(= \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \right) \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x_2} + \mu \nabla^2 u_2 + X_2 &= 0 \quad \left(= \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \right) \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x_3} + \mu \nabla^2 u_3 + X_3 &= 0 \quad \left(= \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \right)\end{aligned}\right\} \quad (1-22)$$

如果方程不等于零而是等于括号内之值时, 则由平衡方程变成运动方程。方程中 X_1, X_2, X_3 等于零时为齐次方程, 式中 ∇^2 为拉普拉斯算子。

$$\begin{aligned}\nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \\ \nabla^2 u_i &= \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_3^2}\end{aligned}\quad (1-23)$$

齐次平衡方程的解(王龙甫, 1984)

$$\left. \begin{aligned}u_1(x_1, x_2, x_3) &= \xi(x_1, x_2, x_3) - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial}{\partial x_1} \omega(x_1, x_2, x_3) \\ u_2(x_1, x_2, x_3) &= \eta(x_1, x_2, x_3) - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial}{\partial x_2} \omega(x_1, x_2, x_3) \\ u_3(x_1, x_2, x_3) &= \zeta(x_1, x_2, x_3) - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial}{\partial x_3} \omega(x_1, x_2, x_3) \\ \omega(x_1, x_2, x_3) &= \omega_0(x_1, x_2, x_3) + \frac{1}{2}(\xi x_1 + \eta x_2 + \zeta x_3)\end{aligned}\right\} \quad (1-24)$$

式中 $\xi, \eta, \zeta, \omega_0$ 应满足调和方程, 即应满足普拉斯方程。

$$\nabla^2 \xi = \nabla^2 \eta = \nabla^2 \zeta = \nabla^2 \omega_0 = 0 \quad (1-25)$$

1.1.10 拉普拉斯方程

如 $V(x_1, x_2, x_3)$ 满足拉普拉斯方程, 称 $V(x_1, x_2, x_3)$ 为调和函数。

$$\nabla^2 V(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} V(x_1, x_2, x_3) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} V(x_1, x_2, x_3) + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} V(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad (1-26)$$

1.2 球坐标表示的弹性力学基本方程

1.2.1 球坐标系与笛卡尔坐标系位移的关系

许多数学物理著作(如梁昆森, 1978)用球坐标表示。以 z 轴(x_3 轴)为极轴, 被研究点(x, y, z)到原点的距离为 r , r 与极轴的夹角为 θ , $\theta = 90^\circ - \varphi$, 经过研究点的子午面与起始子午面的夹角为 L 。

$$\left. \begin{aligned} x &= x_1 = r \sin \theta \cos L \\ y &= x_2 = r \sin \theta \sin L \\ z &= x_3 = r \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (1-27)$$

$$\left. \begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \\ \operatorname{tg} \theta &= \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \\ \operatorname{tg} L &= \frac{y}{x} \end{aligned} \right\} \quad (1-28)$$

对式(1-27), (1-28)微分, 并令

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z) &= dx & u_y(x, y, z) &= dy & u_z(x, y, z) &= dz \\ u_r(r, \theta, L) &= dr & u_\theta(r, \theta, L) &= r d\theta & u_L(r, \theta, L) &= r \sin \theta dL \end{aligned}$$

则有

$$\left. \begin{aligned} u_x &= u_r \sin \theta \cos L + u_\theta \cos \theta \cos L - u_L \sin L \\ u_y &= u_r \sin \theta \sin L + u_\theta \cos \theta \sin L + u_L \cos L \\ u_z &= u_r \cos \theta - u_\theta \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (1-29)$$

$$\left. \begin{aligned} u_r &= u_x \sin \theta \cos L + u_y \sin \theta \sin L + u_z \cos \theta \\ u_\theta &= u_x \cos \theta \cos L + u_y \cos \theta \sin L - u_z \sin \theta \\ u_L &= -u_x \sin L + u_y \cos L \end{aligned} \right\} \quad (1-30)$$