风险管理与保险系列教材

风险论

张连增　编

中国财政经济出版社

风险管理与保险系列教材

风　　险　　论

张连增　编

中国财政经济出版社

图书在版编目(CIP)数据

风险论/张连增编．—北京：中国财政经济出版社，2004.7
ISBN 7－5005－7443－6

Ⅰ．风…　Ⅱ．张…　Ⅲ．保险业－风险管理　Ⅳ．F840.32

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 065646 号

中国财政经济出版社 出版
URL：http：//www.cfeph.com.cn
E－mail：cfeph @ drc.gov.cn

社址：北京海淀区阜成路甲 28 号　邮政编码：100036
发行处电话：88190406　财经书店电话：64033436
北京财经印刷厂印刷　各地新华书店经销
880×1230 毫米　32 开　7.625 印张　193 000 字
2004 年 9 月第 1 版　2004 年 9 月北京第 1 次印刷
印数：1—1 500　定价：20.00 元
ISBN 7－5005－7443－6/F·6509
（图书出现印装问题，本社负责调换）

编写说明

南开大学保险专业于1984年设立，是我国恢复保险教育后在高等院校中首批设立的保险专业之一，并已建立以精算学科为特色的多层次的保险人才培养体系。近二十多年来，保险专业始终坚持开放式的、与国内外有关单位广泛协作和联合办学的指导思想，形成独具特色的学科建设和人才培养的办学模式，在教学、科研和学科建设等方面取得了长足的发展，已成为我国高等院校中一个多方向、多层次、结构合理、国内外相结合的办学特色。“南开保险”在我国保险教育界和实务界、以至国外保险界都享有一定的盛誉。

教材是教育的基础。加强教材建设应当是院校学科发展始终不渝的任务。多年来，南开大学保险系在教材建设上也取得一些成果，曾出版过多本保险专业教材，其中有的保险专业教材在国内教育界具有重要的影响。此次，我们之所以又推出这一套新的南开大学保险、精算教材，其主要原因是：一是随着我国及国际保险业的发展，保险的基本理论也在不断创新和发展，从而需要将有些相对成熟的发展成果吸收到教材中作为基本理论或基本方法；二是随着保险教育的发展，保险专业研究生教育已成为保险人才教育和培养的突出问题。多年来，国内保险教育主要是本科生教育为主，已出版的保险专业系列或非系列的教材也多数是以本科生为主要对象，相对而言，适用于保险专业研究生学习用的教材却显得匮乏。随着各校研究生教育的发展，这种状况和矛盾显得日益严重和突出。所

以，出版一套具有新意的，并适合保险专业研究生或高年级本科生教学用的教材显然是必要的。对于该套教材建设的总体指导思想是成熟并完成一本，就出一本。教材建设同样应是“有所为，有所不为”。

从总体上看，我们设想的该套教材的基本特点应是内容和安排较新，其适用对象不仅包括高等院校的保险专业的研究生，而且包括高年级的保险本科生。此外，也适用保险公司的高级管理人员的业务培训。参加编写该套教材的作者主要是南开大学保险系的教师，他们多年从事保险教学，不仅具有扎实的保险学、精算学的理论功底，而且具有丰富的教学经验。当然，作为具有创新意义的教材，其不足或错误在所难免。望读者批评、指正。

该套教材的出版得到了中国财政经济出版社的大力支持，也得到了台湾富邦保险公司的支持，在此一并表示感谢！

南开大学风险管理与保险学系

2004年8月1日

前言

引用 H. Gerber 的话，对于大多数人来说，那些影响我们个人命运的诸事件间的关系有很大的偶然性，而且仅能运用概率论的术语来描述。在随机性的观点中，风险是一个关键的概念。简言之，风险来自随机性。我们这里所谈的风险论有一个狭义的定义，它是精算学的一个分支，侧重于非寿险精算部分。

风险论的发展已有很长的历史，在西方发达国家它是伴随着保险业发展而发展的。举例来讲，现在人们普遍认可，Lundberg 于 1903 年发表的论文是破产理论的开创性文献，而创刊于 1914 年的国际精算期刊 *Scandinavian Actuarial Journal*，它一直把风险论作为核心专题。风险论作为精算学的理论基础之一，其研究成果从某些方面推动了精算学的发展。尽管风险论的发展已经有这么悠久的历史，但对那些在保险业中从事日常事务的人们来说也许并不了解，或仅仅是隐约地意识到，他们目前运用的正是很多年以前就已经发展起来的风险论的原理。

可以说，在关于风险论的专著中，1979 年出版的 Hans Gerber 的专著是一本经典之作。稍后，Harry Panjer 于 1981 年发表了关于复合变量概率分布递归算法的论文。在风险论发展的历史上，这是一个重要突破。由于理论上的新突破，在 Gerber 专著中的一些内容起初涉及比较复杂的数学处理，现在得到了非常简炼的处理。

精算学是一门发展的科学，风险论的发展也不是孤立的，它伴随着保险业新问题的产生而发展，同时也充分反映新发展起来的数学分支的最新成果，如随机过程、计算数学等。当前，两个重要的因素对风险论乃至精算学的发展产生了深远的影响。首先，随着计算技术的发展和高效率数学软件的出现，使一度十分重要的计算问题在许多场合都变得微不足道。其次，以概率论为工具的新的处理方式已在国际精算教育界得到了普遍认可，而且概率论和随机过程的基本知识在国内大学也已得到了很大的普及。本书即是遵循这些观点来写作的。

本书共分八章，除第一章对其后各章要用到的概率论知识作了简要的介绍外，其余各章之间是相对独立的。

在寿险中，索赔概率可以通过生命表来比较准确地估计出来。而在大多数短期非寿险业务中，索赔概率一般都难以预测。另外，短期保险的索赔额取决于损失程度，事先不能确定，由此带来了额外的随机性。在第二章和第三章中，我们将考察如何把索赔次数与单个索赔额结合起来，进而得到累积索赔额变量的概率分布。这些是聚合风险模型和个体风险模型的内容。经验费率法是对某些受索赔历史记录影响的保单进行费率厘定的一种方法。在第四章中，我们将介绍可信度理论以及如何把可信度理论应用于经验费率法。第五章是效用理论。我们将对效用理论在保险中的应用作简要介绍。保险作为一种决策行为，引入效用的概念后，可以帮助我们深入理解保费的确定、再保险方式的选择等一些问题。第六章是保费确定原则。我们要对各种保费确定原则作一介绍，并讨论它们所满足的

性质，这对选择适当的保费确定原则有指导作用。第七章是未决赔款准备金的各种估计方法。我们要对非寿险中如何确定适当的准备金的各种方法作一介绍。第八章是破产理论。我们要考虑非寿险公司中的盈余随机过程。经典问题是考虑盈余出现赤字的概率，即破产概率。另外我们还要考虑破产概率的近似方法，并对有限时间内破产概率的结论作一简单介绍。

需要强调的是，风险论的内容是很丰富的，一些较新的内容，如破产理论中近年来已经有很大发展的离散风险过程、一般类型的更新风险过程等均未能反映在本书中。另外风险的度量也是近年来国际精算研究的热点问题，在本书中也没有讨论。其次，本书的内容在处理上没有用到太深的数学知识，尤其是仍未涉及到随机过程中的鞅论等。希望以后能另以专著来对这些内容系统地加以总结。

本书适用于保险精算人员以及大专院校金融保险专业、统计专业、应用数学专业的教师、研究生、本科生。各章后面给出了少量精选的参考文献和习题，可供进一步研究之用。本书部分内容可作为国内已出版的风险论的中译本的补充。

本书的写作源于很多偶然。2002 年，我访问墨尔本大学精算研究中心，进修风险论。其间，非常感谢该中心主任 David Dickson 教授的指导，并安排我为 Honors 学生讲授风险论部分内容，这些内容是本书后四章的基础。此前，国内虽有两本风险论的中译本，但内容不是很新。临近访问结束，我设想为国内读者写一本风险论的书，向读者介绍一些国际精算教育的新进展。回国后，我决定把以前的笔记加以补充、整理成书。

本书是集体智慧的结晶。共有五位研究生参加，最后由我校阅全部书稿。整理成书的过程也是一个学习的过程和进一步加深理解的过程。我在此向这些研究生表示衷心的感谢。这些研究生及分工如下：刘立婷，第五、六章；肖长春，第七章；王映强，第二章；王刚，第三章；吴洪，第四章。

我借此机会要感谢我的妻子陈博颐女士对我的大力支持，同时我的儿子也为我在写作过程中带来了许多欢乐，谨以此书献给他们。

本书的出版得到了台湾富邦保险公司的资助，也承蒙中国财政经济出版社提供了很大的帮助，在此表示热忱的谢意。感谢南开大学风险管理与保险学系主任江生忠教授为该书的出版所做出的努力。可以说，没有他们的热情帮助，该书的出版是不可能的。

由于作者水平有限，编写时间又较匆促，一定还存在不少缺点和错误，殷切期待读者给予批评指正。

张连增

2003年12月于南开大学

目录

第 1 章

非寿险数学中的概率分布

1.1 变量与分布的概念

1.1.1 概率分布函数

我们以机动车保险来说明非寿险数学的一些特点。在未来一段给定的时间内，机动车可能会发生多次索赔事件，而且索赔时间事先不确定，每次索赔额的大小也不一定相同。对有些索赔，保险人的理赔工作只需较短时间就结束，而对另外一些，理赔工作却需要较长一段时间才能结束。当我们进一步考虑未来一段时间的总索赔额时，很自然地需要对总索赔事件次数与每次索赔额大小这些不确定变量有一些模型假设。我们以概率论中的随机变量与分布函数的概念来描述这些模型。

随机变量有离散与连续之分，它们都可用分布函数的概念来描述。离散随机变量取值于一列数值，如 $\{0, 1, 2\cdots\}$。设 X 是离散随机变量，其分布函数为 $P(X \leqslant r)$，概率函数为 $P(X = r)$，其中 r 属于 X 的范围。常见的离散分布的例子有：Poisson 分布，二项分布，负二项分布等。

连续随机变量取值于某给定区间任意值，如（0，∞）。设 X 是连续随机变量，其分布函数为 F（x）＝P（X≤x），概率密度函数为 $f(x) = \frac{d}{dx}F(x)$，

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\{F(x+\Delta x) - F(x)\}$$

常见的连续分布的例子有：Gamma 分布，对数正态分布，正态分布等。

还有一种分布称为混合分布，其分布函数既有离散部分，又有连续部分。例如下面的例子。

【例 1-1】 设机动车损失变量 X 有连续分布 F（x），而机动车保险保单是超额损失保险类型的，即当损失小于某给定的免赔额 d 时，投保人承担所有的损失，保险人的理赔只有当损失额超过 d 时才发生。设投保人承担的损失变量为 Y，

$$Y = \begin{cases} X, & X < d \\ d, & X \geq d \end{cases}$$

那么当 d 较小时，随机变量 Y 的分布就是一个混合分布。这时因为

$$P(Y \leq x) = \begin{cases} F(x), & x < d \\ 1, & x \geq d \end{cases}$$

即 Y 在区间（0，d）有连续分布，而在 d 点有非负概率。

1.1.2 矩生成函数

研究分布函数的一个工具是矩生成函数（对取整数值的离散分布也可采用概率生成函数这一工具）。矩生成函数和分布函数是一一对应的。

（1）离散分布。对离散变量 X，矩生成函数的定义为

$$M_X(t) = Ee^{tX} = \sum_x e^{tx} P(X = x)$$

例如，设 $P(X=x)=pq^{x-1}$，$p+q=1$，$0<p<1$，$x=1,2\cdots$可以验证当 t 适当小时，即当 $qe^t<1$ 时，该分布的矩生成函数为

$$M_X(t)=\frac{pe^t}{1-qe^t}$$

对取整数值的离散分布 X，概率生成函数的定义为

$$P_X(s)=Es^X=\sum_x s^x P(X=x)$$

以上面的例子来说明。当 $|s|<1$ 时，相应的概率生成函数为

$$P_X(s)=\frac{ps}{1-qs}$$

需要指出的是，对取整数值的离散分布而言，其概率生成函数至少当 $|s|<1$ 时存在。但有些离散分布的矩生成函数当 $t>0$ 时不存在。本质上它与分布的尾概率衰减速度有关系。例如下面的例子。

【例 1－2】 设 X 的概率分布为 $P(X=2^n)=2^{-n}$，$n=1,2\cdots$显然 $E(X)=\infty$。该分布的矩生成函数当 $t>0$ 时不存在。这是因为当 $t>0$ 时，

$$M_X(t)=\sum_x e^{tx}P(X=x)>\sum_x(1+tx)P(X=x)$$
$$=1+tE(X)=\infty$$

以下公式是生成函数的简单应用。首先我们有

$$\left.\frac{d^n}{ds^n}P_X(s)\right|_{s=0}=n!\ P(X=n)$$

其次当矩生成函数存在时，

$$\left.\frac{d^n}{dt^n}M_X(t)\right|_{t=0}=E(X^n)$$

(2) 连续分布。设连续变量 X 有概率密度函数 $f(x)$，矩生成函数的定义为

$$M_X(t)=Ee^{tX}=\int_x e^{tx}f(x)dx$$

例如，设 $X\sim U(0,10)$，即 X 服从区间 (0，10) 上的均匀分布，

那么该分布的矩生成函数为

$$M_X(t) = \frac{e^{10t} - 1}{10t}$$

类似于离散分布，有些连续分布的矩生成函数当 $t > 0$ 时并不存在。

(3) 混合分布。我们以前面的例 1－1 为例。$Y = \min(X, d)$，此时 Y 的矩生成函数可计算如下：

$$M_Y(t) = Ee^{tY} = \int_0^{\infty} e^{t\min(x,d)} f(x)dx = \int_0^d e^{tx} f(x)dx + \int_d^{\infty} e^{td} f(x)dx$$

$$= \int_0^d e^{tx} f(x)dx + e^{td}[1 - F(d)]$$

由 Y 的矩生成函数，可计算 Y 的各阶矩，例如：

$$E(Y) = \frac{d}{dt} M_Y(t) \Big|_{t=0} = \int_0^d x f(x)dx + d[1 - F(d)]$$

1.2 一些重要的分布

在本节中我们要对非寿险数学中一些重要的分布加以简单介绍。对每种分布我们介绍概率函数（或概率密度函数）以及等价的矩生成函数。

1.2.1 连续分布

(1) Gamma 分布。变量 X 的概率密度函数为

$$f(x) = \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x},\ x > 0,\ \alpha > 0,\ \lambda > 0$$

其中 α，λ 是两个参数，α 是密度函数形状参数，λ 是标度参数。该分布的矩生成函数为

$$M_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^{\alpha},\ t < \lambda$$

由此即得 X 的各阶矩

$$E(X^n)=\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(\alpha)\lambda^n}$$

特别地，当 α 是整数时，我们有

$$F(x)=\int_0^x f(y)dy=1-\sum_{j=0}^{\alpha-1}e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^j}{j!}$$

当 $\alpha=1$ 时，X 服从指数分布，

$$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$$

X 服从 Gamma 分布以下简单记为 X ~ Gamma (α,λ)。

(2) Pareto 分布。变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda+x)^{\alpha+1}},\quad x>0,\ \alpha>0,\ \lambda>0$$

其中 α，λ 是两个参数。相应的分布函数为

$$F(x)=\int_0^x f(y)dy=1-\left(\frac{\lambda}{\lambda+x}\right)^\alpha$$

该分布的矩生成函数不存在。X 的各阶矩是否存在取决于参数值。如下所示，当 $\alpha>1$ 时，E(X) 才存在，

$$\begin{aligned}E(X)&=\int_0^\infty xf(x)dx\int_0^\infty xf(x)dx=\int_0^\infty(\lambda+x-\lambda)f(x)dx\\&=\int_0^\infty\frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda+x)^\alpha}dx-\lambda\int_0^\infty\frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda+x)^{\alpha+1}}dx\\&=\frac{\alpha\lambda}{\alpha-1}\int_0^\infty\frac{(\alpha-1)\lambda^{\alpha-1}}{(\lambda+x)^\alpha}dx-\lambda=\frac{\lambda}{\alpha-1}\end{aligned}$$

同样可以验证，当 $\alpha>2$ 时，$E(X^2)$ 才存在，而且

$$E(X^2)=\frac{2\lambda^2}{(\alpha-1)(\alpha-2)}$$

X 服从 Pareto 分布，以下简单记为 X ~ Pareto (α,λ)。

(3) 对数正态分布。变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}\exp\left[-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right],\quad x>0,\ -\infty<\mu<\infty,\ \sigma>0$$