大学数学系列丛书

微积分（下）

calculus

北京交通大学数学系微积分组　编著

（修订本）

清华大学出版社
http://www.tup.tsinghua.edu.cn
北京交通大学出版社
http://press.bjtu.edu.cn

大学数学系列丛书

微　积　分（下）

（修订本）

北京交通大学数学系微积分组　编著

清华大学出版社
北京交通大学出版社
·北京·

内容简介

本书共分5章，主要内容包括：多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、微分方程。此外，本书后附有各节习题的参考答案。

本书可作为高等院校理工科专业和经济管理类专业微积分课程的教材，也可供各类成人教育和自学考试人员使用。

图书在版编目（CIP）数据

微积分．下/北京交通大学数学系微积分组编著．—修订本．—北京：清华大学出版社；北京交通大学出版社，2008.3

（大学数学系列丛书）

ISBN 978－7－81082－240－4

Ⅰ．微…　Ⅱ．北…　Ⅲ．微积分-高等学校-教材　Ⅳ．O172

中国版本图书馆CIP数据核字（2008）第003221号

责任编辑：黎　丹

出版发行：清华大学出版社　　邮编：100084　　电话：010－62776969

北京交通大学出版社　　邮编：100044　　电话：010－51686414

印 刷 者：北京市梦宇印务有限公司

经　　销：全国新华书店

开　　本：185×230　　印张：23　　字数：516千字

版　　次：2004年2月第1版　　2008年3月第1次修订　　2008年3月第5次印刷

书　　号：ISBN 978－7－81082－240－4/O・12

印　　数：14 001～19 000册　　定价：32.00元

本书如有质量问题，请向北京交通大学出版社质监组反映。对您的意见和批评，我们表示欢迎和感谢。

投诉电话：010－51686043，51686008；传真：010－62225406；E-mail：press@bjtu.edu.cn。

“大学数学系列丛书”
编写委员会成员名单

总　序

随着人类进入 21 世纪，科学技术的发展日益迅猛。在当今这个信息时代中，各种竞争的关键就是科学技术的竞争，科学技术的竞争突出地体现在人才的竞争上，而人才的竞争其实就是教育的竞争。当前的知识经济时代，将对人类知识和科学技术的发展、经济增长因素和方式乃至社会生活，引发新的、深刻的变化。在知识经济时代，国家的竞争能力和综合国力的强弱，不仅取决于其拥有的自然资源，更重要的是取决于科学技术和知识更新的发展水平，尤其是知识创新与技术创新的能力。知识经济的第一资源是智力资源，拥有智力资源的是人才，人才来自教育。要提高民族的创新能力，归根到底要提高全体民众的教育水平，培养大批具有创新意识、创新精神和创新能力的人才。

在我国的高等教育中，数学教育可以说起着举足轻重的作用。许多专家指出，数学教育在人类的精神营养中，确实有“精神钙质”的作用，因为数学对一个人的思想方法、知识结构与创造能力的形成起着不可缺少的作用。很难想像，一个数学知识贫乏的人，会在科学上有所建树。因此，全面提高我国理工科大学中非数学专业大学生的数学水平，将关系到我国各行各业中高级专门人才的素质和能力，关系到我国未来科学技术的发展水平和在世界上的竞争力，是国家百年树人基业中的重要一环。

正是基于以上的考虑，我们借鉴了我国近几年高等学校教学改革，特别是数学教学改革的经验，借鉴近几年我校数学教学改革的一些实践与做法，组织一批在大学数学公共课教学中有丰富教学经验的教师，在精心筹划、多方面研讨的基础上，编写了这一套“大学数学系列丛书”。

本系列教材在大学数学的三门重要的基础课教材——《微积分》、《线性代数与解析几何》、《概率论与数理统计》上下了很大工夫。我们不仅按照教学的基本要求仔细编写了各章的内容，而且在各章中也融入了当前教学改革的一些经验；同时注意编写了与主教材配套的辅导教材，这样可以帮助学生更好地理解主教材中的内容和学习方法。在辅导教材的编写上，我们注重对主教材内容知识的扩展，同时也帮助学生掌握好各门课程的学习方法。但是，我们反对将主教材中的习题在辅导教材中简单地给出题解的做法。我们认为，这种做法

是对大学生的学习积极性和创造性的扼杀。另外，为了适应目前大学数学教学改革的需要，我们编写了《数学实验基础》和《数学建模基础》两本教材。我们认为，数学实验、数学建模与传统大学数学教学内容相结合，将会极大地丰富数学教学内容，增强大学生学习数学、应用数学的兴趣与积极性，为他们在将来的工作中想到数学、运用数学解决实际问题打下一个良好的基础。同时，数学实验课与数学建模课的开设，将会给传统的数学教学方法带来更有意义的改革。另外，为了配合我校的“高等数学方法 ”选修课及参加北京市大学生（非数学专业）数学竞赛培训的需要，我们还编写了《高等数学方法导引》教材，使大学生中有数学天赋的同学能更进一步地掌握高等数学的解题方法。

本系列教材在编写过程中，得到了北京交通大学教务处的大力支持，在教材的出版中，得到了北京交通大学出版社的热情帮助，在此，本系列丛书的全体编委向他们表示衷心的感谢。

本系列教材适用于高等院校的理工科专业和经济管理类专业的数学教学，也可以作为相关专业学生的自学教材和培训教材。

本系列教材的编写是大学数学基础课教学中的一种探索，其中一些做法，欢迎各方读者在对教材的使用与阅读中评头论足，不吝赐教，我们将在今后的修改中使其更加完善。

“大学数学系列丛书”编写委员会

2008 年 3 月

修订本前言

高等教育的本质在于素质教育，2007年教育部的2号文件“关于进一步深化本科教学改革全面提高教学质量的若干意见”再一次提出深化教育、教学改革、全面加强大学生素质和能力培养的本科教学宗旨。微积分教学改革实际上是大学教育改革的重要一环，因为微积分课程是最重要的数学类基础课，也是新生入学后最先学习的数学课程，这门课程学习的效果直接影响着大学生后续课程的学习。

微积分教材是微积分课程教学的重要依托，它应该怎样编写才能有利于教师教学，并使学生易于接受一直是广大教育工作者研究探索的课题。我们认为，没有改革就没有发展，即使是非常成熟的基础课也是如此，因为我们面对的学生对象发生了变化，这些学生思考问题的方式和行为取向与以往是不同的。编写适合当今大学生特点的微积分教材不但非常必要，而且也是一件非常有意义的事情，本书就是我们对微积分教材编写的一个探索。

在保证微积分教学知识点和要求的前提下，本书采用一种新型的编写模式。本书各章节知识点编排方法和风格的差异是我们有意所为，目的是找出最适合学生接受的模式。书中的每章都配有自测题，以帮助学生自已检查本章内容的掌握情况。本书由北京交通大学10名教师共同编写，这些教师都有多年讲授微积分课程的丰富经验并一直关注于微积分教学改革。王兵团、刘迎东、汪成咏对本书作了最后的定稿。本书编写人员如下。

第7章　郝荣霞7.1～7.5节，王秋媛7.6～7.8节

第8章　吴灵敏8.1、8.2、8.5节，邓小琴8.3、8.4节

第9章　钟波9.1～9.3节，王兵团9.4～9.6节

第10章　缪克英、程飞

第11章　郑改华11.1～11.3节，武清11.4～11.6节，黎传琦11.7节

本教材的编写是我们数学探索式教学的一种尝试，也是北京交通大学数学基地和微积分课程建设的一项工作。本次修订中，北京交通大学数学系讲授过微积分课程的广大教师积极参与，并提出了宝贵意见和建议，在此表示感谢。

编　者

2008 年 3 月

目 录

DI QI ZHANG

第7章

多元函数的微分学

在《微积分》上册的学习中，我们研究的函数都只含有一个自变量，即为一元函数微积分．但许多实际问题往往不是由一个因素决定，而是由多种因素决定，反映在数学上，就是一个变量依赖于多个变量的多元函数问题，所以在《微积分》下册中主要研究多元函数微积分．本章主要讨论多元函数的微分法及其应用，讨论中主要以二元函数为例，从二元函数到多元函数可以类推．

学习这一章的内容，不仅要掌握多元函数的极限、连续、偏导数、全微分及方向导数等概念，弄清楚多元函数的微分学和一元函数微分学的联系和区别，还要掌握如何求偏导数、方向导数及微分法在几何和极值上的应用．

关键词： 多元函数（function of many variables）、偏导数（partial derivative）、全微分（total differentiation）

7.1　多元函数的基本概念

1. 几种特殊的点集

讨论多元函数时，需要用到类似于一元函数的邻域和区间等概念，故首先介绍平面上的邻域和区域等概念并加以推广

1）邻域

设 $P_0(x_0, y_0)$ 是平面上的一个点，δ 是任意给定的一个正整数．到点 $P_0(x_0, y_0)$ 的距离小于 δ 的点 $P(x,y)$ 的全体称为以 P_0 为中心、以 δ 为半径的邻域，简称 P_0 的 δ 邻域，记作 $U(P_0, \delta)$，即

$$U(P_0,\delta)=\{P \,\Big|\, |PP_0|<\delta\}=\{(x,y)\mid\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}$$

以 P_0 为中心、δ 为半径的去心邻域，记作 $U^{\circ}(P_0,\delta)$，是指

$$\{P \,\Big|\, 0<|PP_0|<\delta\}=\{(x,y)\mid 0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}=U(P_0,\delta)\setminus P_0$$

如果不强调半径 δ 时，$U(P_0,\delta)$ 可简写成 $U(P_0)$，$U^{\circ}(P_0,\delta)$ 可简写成 $U^{\circ}(P_0)$．

2）区域

设 E 是平面上的一个点集，P 是平面上的一个点．如果存在 P 的一个邻域 $U(P)$，使得 $U(P)\subset E$，则称 P 为 E 的一个**内点**；如果存在 P 的一个邻域 $U(P)$，使得 $U(P)\cap E=\varnothing$，则称 P 为 E 的一个**外点**；如果在 P 的任一邻域内，既有属于 E 的点，也有不属于 E 的点，则称 P 为 E 的**边界点**；E 的边界点的全体称为 E 的**边界**；如果 E 的任一点都是内点，则称 E 是**开集**；如果在 P 的任一去心邻域内，总有属于 E 的点，则称 P 为 E 的一个**聚点**.

如果 E 中任意两个点都可用折线连接起来，且该折线上的点都属于 E，则称 E 是**连通的**．连通的开集称为**区域**或**开区域**；开区域连同其边界称为**闭区域**. 例如，$E_1=\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2<3\}$ 是开区域；两个圆周的并 $\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}\cup\{(x,y)\mid x^2+y^2=3\}$ 是 E_1 的边界.

设 E 是平面上的点集，$O(0,0)$ 是原点. 如果存在正整数 $\delta_0>0$，使得 $E\subseteq U(O,\delta_0)$，则称 E 是**有界集**，否则称 E 是**无界集**. 例如，上例的 E_1 是有界的开区域，而 $E_2=\{(x,y)\mid x-y\geqslant 0\}$ 是无界的闭区域．

上面介绍的都是二维空间，即平面上的一些点集，这些概念都可以推广到 n 维空间上．

3）n 维空间上的特殊点集

形如 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的 n 个实数的一个排序称为一个有序 n 元数组，有序 n 元数组的全体称为 n 维空间，记作 $\mathbf{R}^n$ ，即 $\mathbf{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \cdots, n\}$. 每个有序 n 元数组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 称为 $\mathbf{R}^n$ 中的一个点，其中 x_i 称为点$(x_1, \cdots, x_n)$的第 i 个坐标 .

n 维空间中点 $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 和点 $Q(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 的距离定义为

$$|PQ| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2}$$

当 $n=2$，3 时，就分别是平面、空间内两点间的距离 .

2. 多元函数的概念

在解决实际问题中，总是会遇到一个变量与多个变量之间的依赖关系. 下面先讨论一个变量依赖于两个变量的情形 .

1）二元函数的定义

【例 7-1】 长方形的面积 S 依赖于长方形的长 x 和宽 y，即 $S = xy$ ，其中 x，y 为取值于集合 $\{(x,y) \mid x > 0, y > 0\}$ 的实数对.

【例 7-2】 一定质量的理想气体的压强 P 与体积 V 和绝对温度 T 之间满足下列关系 .

$$P = k\frac{T}{V}$$

其中 k 为常数，T 和 V 为 $\{(T,V) \mid T > T_0, V > 0\}$ 的实数对，其中 T_0 为常数.

以上两个实例虽然具体内容不同，但具有公共特征，即问题中的一个变量的取值依赖于另两个相互独立的变量，且它的值由这两个变量的取值确定.

抛开上述两例中各变量的实际意义，抽出其共性，即得出如下二元函数的定义.

定义 7-1 设 D 是在 xOy 平面上的一个非空点集，如果有一个对应法则 f ，使得对每一个点 $P(x,y) \in D$ ，按照法则 f ，总有一个实数 z 与之对应，则称 f 为定义在D 上的二元函数，记作 $z = f(x,y)$（或 $z = f(P)$ ）. 其中 x,y 称为自变量，z 称为因变量，习惯上称 z 是 x,y 的二元函数，D 称为函数的定义域，数集 $\{z \mid z = f(x,y), (x,y) \in D\}$ 称为此函数的值域 .

函数 $z = f(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的函数值为 $f(x_0, y_0)$. $f(x_0, y_0)$ 既可看成是将 (x_0, y_0) 代入函数 $z = f(x,y)$ 的值，也可看成是对应点 (x_0, y_0) 的值 .

【例 7-3】 求函数 $f(x,y) = \dfrac{\ln(x+y)}{2x^2}$ 在点 $P_0(3, -2)$ 处的值.

解 即求当 $x = 3, y = -2$ 时的 $f(x,y)$ 的值 .

$$f(3, -2) = \frac{\ln(3-2)}{2 \times 3^2} = 0$$

由二元函数 $z=f(x,y)$ 的定义知，对任一 $P(x,y)\in D$，有对应的 z 值和它对应，这样对应空间的一个点 (x,y,z)．当 $P(x,y)$ 取遍 D 中所有的值时，这些空间点 (x,y,z) 的轨迹就称为二元函数 $z=f(x,y)$ 的图形．通常，二元函数的图形是空间上的一张曲面．当 $P(x,y)$ 在 D 上变动时，对应点 $M(x,y,z)$ 就在这张曲面上变动(如图 7－1)．例如，$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 表示的是以原点为球心、半径为 1 的上半球面.

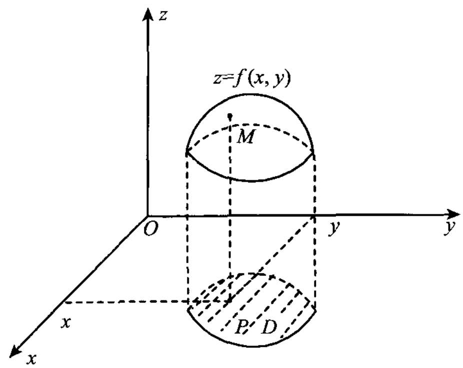

图 7－1

2）多元函数的定义

在学习了二元函数的概念后，很容易把二元函数的概念推广到三元及三元以上的函数．只要把二元函数定义中的 D 换成 n 维空间的点集即可得到 n 元函数的定义．

定义 7－2　设 D 是 n 维空间上的一个非空点集，如果有一个对应法则 f，使得对每一个点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D$，按照法则 f，总有一个实数 u 与之对应，则称 f 为定义在 D 上的 n 元函数，记作 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$（或 $u=f(P)$）.

多元函数的定义域及值域可以类似地定义．

二元及二元以上的函数统称为多元函数.

注意：多元函数定义域的确定与一元函数类似，就是找使函数有意义的自变量的取值范围；对于由实际问题得到的多元函数，其定义域要符合实际问题的具体意义．二元函数的定义域通常为平面点集，三元函数的定义域是三维空间的一个点集．例如，$u=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}$ 的定义域是闭区域 $\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant R^2\}$．

【例 7－4】　试确定下列函数的定义域，并画出其在平面中所表示的区域.

(1) $z=\dfrac{y^3}{x}$　　(2) $f(x,y)=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$　　(3) $f(x,y)=\ln(x+y-1)$

解　(1) 要使函数有意义，则 $x\neq 0$，故函数的定义域为 $D=\{(x,y)\mid x\neq 0\}$，它是整个 xOy 平面去掉 y 轴的两个无界开区域（如图 7－2 中的阴影部分），开区域的边界用虚线表示.

(2) 要使函数有意义，则 $R^2-x^2-y^2\geqslant 0$，故函数的定义域为 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2\}$，它表示的是 xOy 平面上的圆 $x^2+y^2=R^2$ 所围成的有界闭区域（如图 7－3 中的阴影部分），闭区域的边界用实线表示.

(3) x,y 应满足 $x+y>1$，故函数的定义域为 $D=\{(x,y)\mid x+y>1\}$，它表示的是直线 $y=1-x$ 右侧的平面区域，为无界开区域(如图 7－4 中的阴影部分).

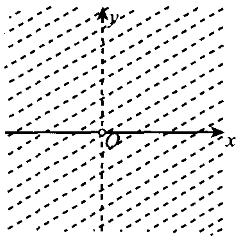

图 7-2

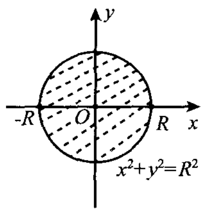

图 7-3

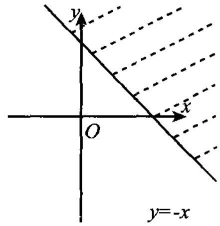

图 7-4

3. 多元函数的极限与连续性

1）多元函数的极限

这里先讨论二元函数的极限．

定义 7-3 设二元函数 $f(x,y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 的一个非空子集 D 内有定义，$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点，A 是一个常数．如果对于任意给定的正数 ε，总存在正数 δ，使得对于满足不等式

$$0<|PP_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

的所有点 $P(x,y)\in D$，都有 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$ 成立，则称常数 A 是函数 $f(x,y)$ 当 $P\to P_0$ 时的极限，也称常数 A 是函数 $f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时的极限，记作

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A \text{ 或 } \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$$

二元函数的极限也称二重极限．虽然二重极限的定义和一元函数的极限定义有许多相似之处，但也有重要的区别．例如，一元函数 $x\to x_0$ 的路径只能在 x 轴上，一般有两种方式 $x\to x_0^-$ 和 $x\to x_0^+$；而 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 有无穷多种方式，既可以沿直线也可以沿曲线．只有沿任意方式 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时，极限都存在且相等，才称此二重极限存在．

注意： 一般证明二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 不存在，常用以下 3 种方法．

① 取和常数 k 有关的方式使 $(x,y)\to(x_0,y_0)$，如果极限与 k 有关，它随着 k 的不同而变化，则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 不存在．

② 选两种特殊的方式使 $(x,y)\to(x_0,y_0)$，如果得到的极限不同，则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 不存在．

③ 举出当 $P(x,y)$ 趋近于点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某一种特殊方式下极限不存在，则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 不存在．