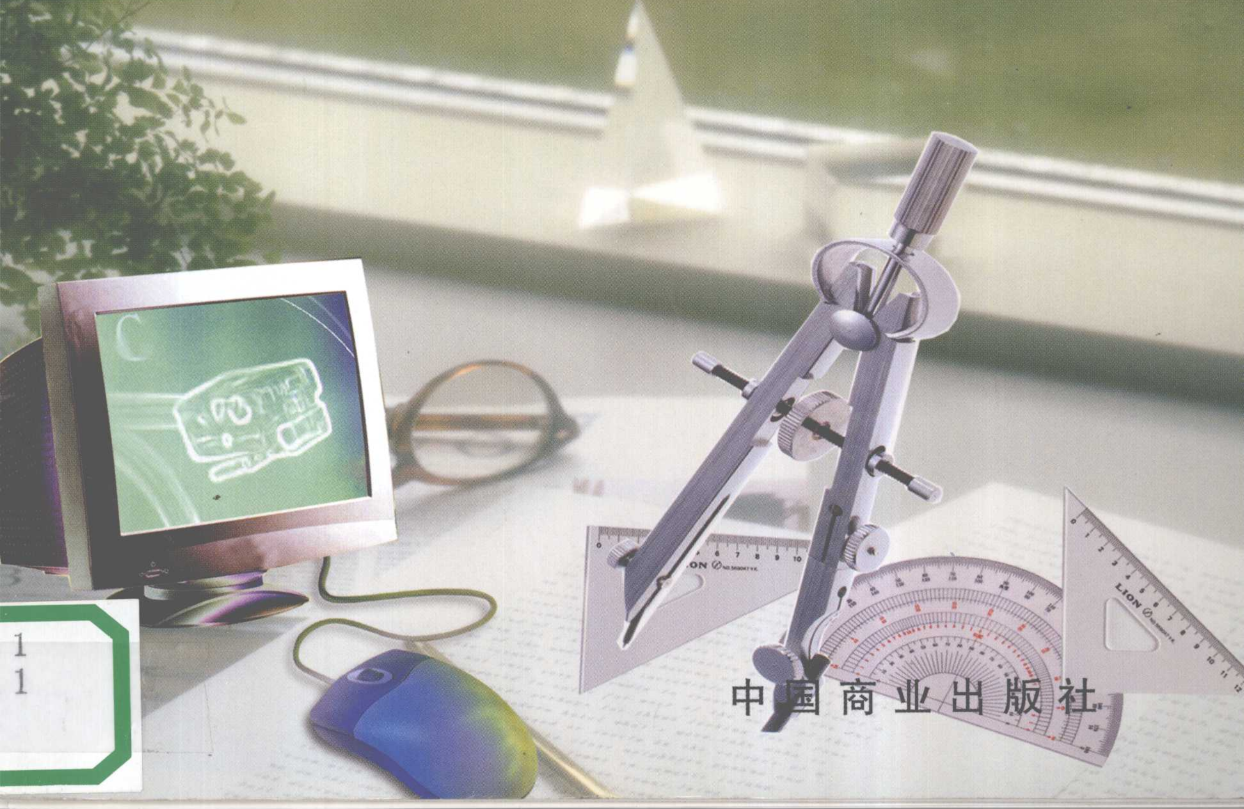
高等商科系列教材

Textbooks Series For 21st Colleges of Business

Xianxingdaishuhexianxingguihua

线性代数和线性规划

周秀珍　主编



中国商业出版社

21世纪高等商科系列教材

线性代数和线性规划

周秀珍　主　编
钱　林　副主编

中国商业出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数和线性规划/周秀珍主编. －北京:中国商业出版社,2005.6

ISBN 7－5044－5445－1

Ⅰ.线... Ⅱ.周... Ⅲ.①线性代数－高等学校－教材 ②线性规划－高等学校－教材 Ⅳ.①O151.2 ②O221.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 059991 号

责任编辑:马一波

中国商业出版社出版发行

(100053 北京广安门内报国寺 1 号)

新华书店总店北京发行所经销

国防工业出版社印刷厂印刷

*

787×960 毫米 16 开 17 印张 320 千字

2005 年 6 月第 1 版 2005 年 6 月第 1 次印刷

定价:23.00 元

* * * *

(如有印装质量问题可更换)

编审说明

为适应我国国民经济持续发展的形势，满足各部门对高素质管理人才的迫切需要，经全国高等商科学科建设指导组研究，在原“国内贸易部部编高等商科教材”的基础上，进一步进行该系列教材的系统配套建设。《线性代数和线性规划》是提高学生基本素质的公共课教材之一，现经审定，同意作为高等院校教材，也可作为成人高校、函授、自学考试以及在职培训用的教材。

在本书编写过程中，曾得到有关院校、部门以及编审者的大力支持，在此一并致以衷心感谢。

为提高本教材的质量，热诚希望各位读者提出宝贵意见，以便进一步修订和完善。

全国高等商科学科建设指导组

2005 年 6 月

前　言

线性代数是一门重要的基础课，线性规划是一门重要的应用性学科。它们在工程技术、经济管理科学等诸多领域有着广泛的应用，是财经、商业院校经济管理专业的一门重要的基础课程。

为了适应高等教育大众化的需要，根据教育部和全国高等商科学科建设指导组关于高等商科教材建设规划要求，由全国有关的商业财经院校部分长期从事经济数学教学的教师编写了这本《线性代数和线性规划》。本教材可供财经类本科学生使用，也可供同层次的成人、函授教育之用。

本教材的内容以矩阵为主线展开，突出矩阵简化，用矩阵方法研究线性方程组和经济模型；概念引入由具体到抽象、由特殊到一般，不过分追求数学概念的推理，避免繁琐的理论证明，而对有利于培养学生思维能力的定理证明或说明，表达则力求通俗易懂，尽可能让学生从已有的几何、代数知识背景中理解概念的来龙去脉，并获得解决问题的启示。在框架结构上采用“大节”、“小目”，便于教学者对教材内容灵活选用。重视例题设计、习题配置，每章设置思考题，有利学生对基础知识的理解，提高学习兴趣。每章后有大量习题，有助于学生对知识的把握和深化，有利于训练和培养学生解决问题的能力。

本书由周秀珍任主编，钱林任副主编。参加本书编写的有：钱林（第1、2、3章）、蔡苏淮（第4、5章）、姚家凤（第6、7章）、周秀珍（第8、9章）。

在本书编写过程中，参考了许多国内出版的同类教材，并得到有关院

校领导在人力和资料上的支持和帮助,在此一并表示衷心感谢。由于编者水平有限,书中的内容、体系等倘有不当之处,敬请各位专家、学者不吝赐教,欢迎广大读者批评指正。

编　者
2005年5月

目　录

上篇　线性代数

下 篇 线性规划

上篇

线性代数

- 行列式
- 矩阵
- 向量与线性方程组
- 矩阵相似对角化
- 投入产出数学模型与二次型

第 1 章 行列式

行列式是研究线性代数的一个重要工具，本书的各章都要用到行列式的概念和性质．本章主要介绍 n 阶行列式的定义、性质、计算方法以及解 n 元线性方程组的克莱姆(Cramer)法则．

§1.1 行列式的定义

行列式的概念起源于线性方程组的求解．在初等数学中，为了简化二元、三元线性方程组解的表达式，引进二阶、三阶行列式概念，为讨论 n 元线性方程组，就必须把行列式推广到 n 阶，即定义 n 阶行列式的问题．

1.1.1 二阶、三阶行列式

用消元法解二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1-1}$$

用 a_{22}乘以第一式的两边，用 $-a_{12}$乘以第二式的两边得与原方程组同解的方程组

$$\begin{cases} a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_1a_{22} \\ -a_{12}a_{21}x_1 - a_{12}a_{22}x_2 = -b_2a_{12} \end{cases}$$

再将两个方程两边相加，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

同理可得：
$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$
即当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，方程组(1－1)的解为
$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \tag{1-2}$$
观察(1－2)式，发现如果记
$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \tag{1-3}$$
则(1－2)式可以表示为
$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \tag{1-4}$$
(1－4)式作为二元一次方程组解的公式是很容易记忆的.

我们把(1－3)式中由四个数 a、b、c、d 排成的两(横)行、两(竖)列并定义为 $ad - bc$ 的式子
$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$
叫做二阶行列式.

(1－4)式简记为 $x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}$

其中，$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 为系数行列式，$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$，$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$.

例 1－1 求解二元线性方程组
$$\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ 3x + 7y = 2 \end{cases}$$

解 计算行列式
$$D = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 2\times7 - 5\times3 = -1 \neq 0$$
$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 1\times7 - 5\times2 = -3$$
$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2\times2 - 1\times3 = 1$$
由 $D \neq 0$ 知方程组有惟一解，且解为
$$x = \frac{D_1}{D} = 3, y = \frac{D_2}{D} = -1$$
对于由九个元素 $a_{ij}(i, j = 1,2,3)$ 排成三行三列的式子定义为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32} \qquad (1-5)$$

并称之为三阶行列式.

(1-3)和(1-5)式中的代数和可利用对角线法则来记忆,如图1-1所示.

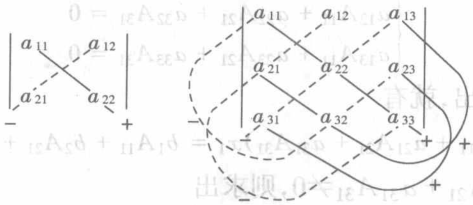


图1-1

例1-2 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

解 $D=2\times2\times2+(-1)\times0\times4+3\times(-1)\times0$
$-3\times2\times4-(-1)\times(-1)\times2-2\times0\times0=-18$

下面推导:三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \qquad (1-6)$$

在系数行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq0$ 的条件下,解的形式为

$$x_1=\frac{D_1}{D}, \quad x_2=\frac{D_2}{D}, \quad x_3=\frac{D_3}{D}$$

其中,$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$

对(1-6)式用消元法处理,并希望一次消元后只剩下一个未知数,例如 x_1,这样就可以求出解的表达式.

不妨假设存在三个数 A_{11}、A_{21}、A_{31},分别乘以(1-6)式中第一、第二、第三个方程的两边,得:

$$\begin{cases} a_{11}A_{11}x_1 + a_{12}A_{11}x_2 + a_{13}A_{11}x_3 = b_1A_{11} \\ a_{21}A_{21}x_1 + a_{22}A_{21}x_2 + a_{23}A_{21}x_3 = b_2A_{21} \\ a_{31}A_{31}x_1 + a_{32}A_{31}x_2 + a_{33}A_{31}x_3 = b_3A_{31} \end{cases} \tag{1-7}$$

将三个方程的两边相加.我们希望消去 x_2 和 x_3,那么相加后方程中 x_2 和 x_3 前面的系数应等于零.于是我们得到如下方程组:

$$\begin{cases} a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31} = 0 \\ a_{13}A_{11} + a_{23}A_{21} + a_{33}A_{31} = 0 \end{cases} \tag{1-8}$$

一旦 A_{11}、A_{21}、A_{31}求出,就有

$$(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31})x_1 = b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31}$$

若 $a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31}\neq 0$,则求出

$$x_1 = \frac{b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31}}{a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}} \tag{1-9}$$

现在的关键是由(1-8)式解出 A_{11}、A_{21}、A_{31}.

(1-8)式两边同除以 A_{11},并改写为:

$$\begin{cases} a_{22}\dfrac{A_{21}}{A_{11}} + a_{32}\dfrac{A_{31}}{A_{11}} = -a_{12} \\ a_{23}\dfrac{A_{21}}{A_{11}} + a_{33}\dfrac{A_{31}}{A_{11}} = -a_{13} \end{cases} \tag{1-10}$$

将(1-10)中$\dfrac{A_{21}}{A_{11}}$和$\dfrac{A_{31}}{A_{11}}$看成两个未知数,用行列式法求出(1-10)的解为

$$\frac{A_{21}}{A_{11}} = \frac{\begin{vmatrix} -a_{12} & a_{32} \\ -a_{13} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad \frac{A_{31}}{A_{11}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ a_{23} & -a_{13} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

容易看出:

$$\frac{A_{11}}{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}} = \frac{A_{21}}{\begin{vmatrix} -a_{12} & a_{32} \\ -a_{13} & a_{33} \end{vmatrix}} = \frac{A_{31}}{\begin{vmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ a_{23} & -a_{13} \end{vmatrix}} (=\lambda)$$

为了更清楚地显示出解的规律性,将上式中的三个行列式加以整理:

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -a_{12} & a_{32} \\ -a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{12}a_{33} + a_{13}a_{32} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ a_{23} & -a_{13} \end{vmatrix} = -a_{22}a_{13} + a_{12}a_{23} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

设 $\lambda=1$，于是有

$$A_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, A_{21}=-\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, A_{31}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

代入(1－9)式中分母、分子

分母：$a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{21}a_{12}a_{33}+a_{21}a_{13}a_{32}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{13}a_{22}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=D \text{ 为系数行列式}$$

上式说明三阶行列式的计算可用二阶行列式表示，即按第一列展开，并记

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

得：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31} \tag{1－11}$$

同理，分子：$b_1A_{11}+b_2A_{21}+b_3A_{31}=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 记为 D_1，

即 D_1 是用常数项 b_1、b_2、b_3 替换系数行列式 D 中第一列得到的三阶行列式，故当系数行列式 $D\neq0$ 时，得解： $x_1=\dfrac{D_1}{D}$

用类似的方法，得 $x_2=\dfrac{D_2}{D}$，$x_3=\dfrac{D_3}{D}$

其中 $D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$，$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$

例 1－3 求解三元线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=5 \\ 3x_1+x_2-5x_3=5 \\ 4x_1-x_2+x_3=9 \end{cases}$$

解 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}=2+20-9-12+3-10=-6\neq0$$

$$D_1=\begin{vmatrix}5 & -1 & 3\\ 5 & 1 & -5\\ 9 & -1 & 1\end{vmatrix}=5+45-15-27+5-25=-12$$

$$D_2=\begin{vmatrix}2 & 5 & 3\\ 3 & 5 & -5\\ 4 & 9 & 1\end{vmatrix}=10-100+81-60-15+90=6$$

$$D_3=\begin{vmatrix}2 & -1 & 5\\ 3 & 1 & 5\\ 4 & -1 & 9\end{vmatrix}=18-20-15-20+27+10=0$$

由 $D\neq0$ 知方程组有惟一解,且解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=2,x_2=\frac{D_2}{D}=-1,x_3=\frac{D_3}{D}=0$$

三元一次方程组与二元一次方程组解的表达式完全一致,人们有理由希望用同样的方法求出 n 元一次方程组的解.为此,我们先给出 n 阶行列式的递归法(即归纳法)定义.

1.1.2 n 阶行列式定义

所谓递归法定义,是由低一阶的行列式定义高一阶的行列式的方法.例如(1-11)式就是将三阶行列式按第1列展开,即用二阶行列式表示.

同样有:$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}$

其中 $A_{11}=(-1)^{1+1}|a_{22}|=a_{22},A_{21}=(-1)^{2+1}|a_{12}|=-a_{12}$.这里$|a_{22}|$是一阶行列式(不是数的绝对值),我们把数 a 的一阶行列式$|a|$定义为 a.

定义 1-1 由 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$排成 n 行 n 列组成的符号

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix} \tag{1-12}$$

称为 n 阶行列式,简记为$|a_{ij}|_{n\times n}$或D_n,它是一个算式,当 $n=1$ 时,$D=|a_{11}|=a_{11}$;当 $n\geq2$ 时,

$$D_n=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1}=\sum_{k=1}^{n}a_{k1}A_{k1} \tag{1-13}$$

其中 A_{k1}是元素 a_{k1}的代数余子式$(k=1,2,\cdots,n)$,$A_{k1}=(-1)^{k+1}M_{k1}$,M_{kj}是元素 a_{kj}的余子式,即由行列式 D_n 中划去元素 a_{kj}所在的第 k 行和第 j 列元素后剩余元素按其原来相对位置组成的 $n-1$ 阶行列式,即