流体力学中数值方法

第二届会议论文集

（二）

会议组织委员会编辑

西安交通大学印刷

一九八三年十月

二、可压缩流动

流体力学计算中显式格式稳定条件的一个简单的改进方法

马延文 付德薰

（北京空气动力研究所）

一、引 言

N S方程是一非线性双曲—抛物混合型偏微分方程组。数值求解N S方程的典型例子为在平板上激波与附面层的相互干扰问题，对高雷诺数，计算平面的大部分区域内方程的双曲特性占主导地位。在近物面的薄层内抛物特性起重要作用。计算时为准确描述物理特性，在近物面的附面层内需取足够的网格点数。早期在数值求解N S方程时人们多采用显式格式〔1—5〕。其优点为方法简单，但由于稳定性而使时间步长受到很大限制，上面提到的干扰问题由于近物面附近法向空间网格非常之小而使如何减小计算机时成为更突出的问题，为克服显式格式的这一缺点，在很多文献中采用了隐式显隐混合格式〔6—10〕。Beam等人〔7〕提出了一个非迭代的隐式因式分解法使计算大大地简化。其缺点为仍需矩阵求逆。MacCormack〔9〕最近给出了一个更为简单的勿需矩阵求逆的隐式格式。

一般说来，显式格式简单，但可能总体计算量大，隐式格可减少计算量，但方法较复杂。本文企图对现有的部分显式格式进行改进，使其兼备二者的优点，克服相应的缺点。文内提出两种改进方法。其一称为算子附加型修正方法，另一为算子放大型修正方法。前者为求解不定常问题而设计的，后者只适于求解定常问题。文章

第二部分通过模型方程对方法给以描述和分析，最后通过算例对方法进行了考查。

二．基本方法

设有方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+c\frac{\partial u}{\partial x}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

c、ν为常数。人们通常用（1）式来研究NS方程的数值解法，以空间一阶导数模拟对流项，二阶导数模拟粘性项。两种特殊形式为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+c\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{3}$$

设下面的显式格式逼近于（1）或（2）、（3）式

$$u_m^{n+1}=u_m^n+L_h(u_m^n) \tag{4}$$

通常显式格式对时间步长有一定限制。当用隐式格式逼近NS方程时，对应于（1）中的C和粘性系数为矩阵，求解过程需进行大量的矩阵求逆，这给计算带来很大不便．下面提出两个简单的方法来改进几个常用的显式差分格式。

A．算子附加型修正

在计算中可用下式代替对（4）式的求解

$$u_m^{n+1}=u_m^n+L_h(u_m^n)+L_{ad}(u_m^n,u_m^{n+1}) \tag{5}$$

这里要求算子附加项 L_{ad} 满足以下三条件

i) 附加的算子简单易于求解；

ii) 修正后不降低原格式的逼近精度；

iii) 修正后格式的稳定条件得以放宽.

下面针对几个常用的格式给出修正方法

1. 热传导方程的差分逼近

逼近于（3）的最简单的差分格式为

$$u_m^{n+1}=u_m+\sigma\nu\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\delta^2 u_m^{n+1}+(1-\sigma)\nu\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\delta_x u_m^n \qquad (6)$$

$$\delta_x^2 u_m=u_{m+1}-2u_m+u_{m-1},\quad 0\le\sigma\le 1$$

当 $\sigma\neq 0$ 时，在每一时间层上需求解代数方程组。当对应的 C 和 ν 为矩阵时，特别是对非线性问题，对(6)纯的求解是很复杂的。当 $\sigma=0$ 时的显式格式的稳定条件为

$$\nu\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\le\frac{1}{2} \qquad (7)$$

为放宽 $\sigma=0$ 时对时间步长的限制而又不影响精度可取（5）式代替(6)。其中

$$L_h(u_m^n)=\nu\frac{\Delta t}{\Delta x}\delta_x^2 u_m^n \qquad (8)$$

$$L_{ad}(u_m^n, u_m^{n+1})=\frac{\beta_m^n}{2}(\delta_x^2 u^{n+1}-\delta_x^2 u_m^n) \qquad (9)$$

如果取 β 为

$$\beta_m=\max\ \{0, \frac{1}{2}(\nu\frac{\Delta t}{\Delta x^2}-1)\} \qquad (10)$$

则对任意$\Delta t/\Delta x$格式(5)，(8)和(9)都是稳定的。它们可改写成如下形式

$$u_m^{n+1}=u_m^n+\frac{\beta_m^n}{2}\delta_x^2u^{n+1}+\left(\nu\frac{\Delta t}{\Delta x^2}-\frac{\beta_m^n}{2}\right)\delta_x^2u_m^n$$

比较(6)与(11)可看出，在(6)式中ν以差分算子$\delta_x^2u_m^{n+1}$的系数出现，而在(11)式中则不。当$\beta\equiv 0$时(11)为显式格式，当$\beta\equiv 2\nu\frac{\Delta t}{\Delta x^2}$时为纯隐式格式。当(3)式为偏微分方程组时，对应的参数β可不直接与对应的矩阵ν发生联系。例如，在某些情况下(10)式中的ν可取按绝对值最大的特征值。对非线性问题，β可取在n时间层上，很明显此时求解简单，又不影响精度。显式热传导格式的附加修正算子也可选成如下形式

$$L_{ad}(u_m^n,u_m^{n+1})=u_m^{n+1}-u_m^n+$$

$$+\left(1-\frac{\beta}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}\delta_x^+\right)\left(1+\frac{\beta}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}\delta_x^-\right)(u_m^n-u_m^{n+1}) \qquad (12)$$

$$\delta_x^+u_m^n=u_{m+1}-u_m \qquad \delta_x^-u_m^n=u_m-u_{m-1}$$

此时如果取

$$\beta=\max\left\{0,\frac{\Delta x}{\Delta t}\left(\sqrt{\frac{2\Delta t}{R_e\Delta x^2}}-1\right)\right\} \qquad (13)$$

则修正后的差分格式对任意步长比都是稳定的。从(10)和(13)中可知，若(7)式满足则$\beta=0$。也可选取其他类型的附加算子。一般说来，如果在L_{ad}中利用太少的网络点，则不易保持原格式的精度，若选用过多的网点，则会给计算和边界处理带来不便。

2. 逼近单向波方程的MacCormack 格式

当(2)中的C为常数时，如果将预测步代入校正步，则MacCormack格式和L—W有着共同形式

$$u_m^{n+1}=u_m^n+L_h(u_m^n)$$

$$=u_m^n-\frac{1}{2}c\frac{\Delta t}{\Delta x}(u_{m+1}^n-u_{m-1}^n)+$$

$$+\frac{1}{2}(c\frac{\Delta t}{\Delta x})^2\delta_x^2u_m \tag{14}$$

对(14)式仍可选取(9)和(12)形式的算子附加修正，当取(9)式时，如果取

$$\beta=\max\{0,\frac{1}{2}(c\frac{\Delta t}{\Delta x})^2[(c\frac{\Delta t}{\Delta x})^2-1]\} \tag{15}$$

则修正后的格式总是稳定的。利用二步法计算时可将附加算子只加到校正步中去。

对逼近于单向波方程的迎风格式为

$$u^{n+1}=u_m^n+L_h(u_m^n)$$

$$=u_m-\frac{1}{2}c\frac{\Delta t}{\Delta x}(u_{m+1}-u_{m-1})+$$

$$+\frac{1}{2}|c|\frac{\Delta t}{\Delta x}\delta_x^2u_m^n \tag{16}$$

也可对其进行附加修正。因这是一阶精度的差分格式，则L_{ad}可取如下简单形式

$$L_{ad}(u_m^{n+1})=\frac{\beta}{2}\delta_x^2u_m \tag{17}$$

$$\beta = \max\{0,\ |C|\frac{\Delta t}{\Delta x}(|C|\frac{\Delta t}{\Delta x}-1)\} \tag{18}$$

B。算子放大型修正

有时人们只对定常解感兴趣，此时可以改变求解过程，只要稳定下来的解满足需要就可以了。设有差分方程

$$u_m^{n+1} = u_m^n + L_h(u_m^n) \tag{19}$$

在[11]中提出，（19）式的求解可以求解下式代之

$$u_m^{n+1} = u_m^n + HL_h(u_m) \tag{20}$$

在某种意义下，这里通过H对算子L_h以放大。通过H的调整使在每个网点上都得以取最大允许的改变。当（19）式为(2)的差分逼近时，对MacCormack 格式，迎风格式，Бpau o cka 格式，L—W格式和[12]中提出的单步格式皆可取

$$H = \frac{1}{1+|C|\frac{\Delta t}{\Delta x}} \tag{21}$$

（取[11]中的$l = \frac{\Delta t}{\Delta x}$）。对逼近于偏微分方程组的差分式，放大型算子也可取矩阵形式[11]。

在讨论算子附加修正时，要求不影响原格式的精度。如果只要求不影响稳定下来的解的逼近精度，则(5)中的L_{ad}可取

$$L_{ad}(u_m^n,\ u^{n+1}) = \beta(u_m^n - u_m^{n+1}) \tag{22}$$

此时(5)式可改写为

$$u_m^{n+1}=u_m^n+(1+\beta)^{-1}L_h(u_m^n) \tag{23}$$

算子的放大因子为$(1+\beta)^{-1}$。对(6)式($\sigma=0$)可取

$$\beta=\max\{0,\ 2\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\nu-1\} \tag{24}$$

对前面所提逼近于单向波方程的各格式可取

$$\beta=\max\ \{0,\ |c\frac{\Delta t}{\Delta x}|-1\ \} \tag{25}$$

三。数值试验

A。非线性Burgers'方程

要求得到满足边界条件$u(x=0)=0$，$u(x=1)=-1$的下面非线性Burgers'方程的定常解。

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\ \frac{u^2}{2}=\frac{1}{Re}\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{26}$$

经算子附加修正后的Maccormack格式为

$$\overline{u_m^{n+1}}=u_m-\frac{1}{2}\ \frac{\Delta t}{\Delta x}[(u_{m+1}^n)^2-(u_m^n)^2)]$$
$$+\frac{1}{Re}\ \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\delta_x^2u_m^n \tag{27}$$

$$u_m^{n+1}-\frac{\beta_m^n}{2}(1+\alpha_m)\delta_x^2u_m^{n+1}=\frac{u_m^n+\overline{u_m^{n+1}}}{2}-$$
$$-\frac{1}{4}\ \frac{\Delta t}{\Delta x}[(\overline{u_m^{n+1}})^2-(\overline{u_m^{n+1}})^2]+\cdots$$

$$+\frac{1}{2}\frac{1}{R_e}\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\delta_x{}^2u^{n+1}-\frac{\beta_m^n}{2}(1-\alpha_m^n)\delta_x{}^2u_m^n$$

(28)

式中 $\beta=\beta_1+\beta_2$

$$\beta_1=\max\left\{0,\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}u\right)^2\left[\left(u\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2-1\right]\right\} \tag{29}$$

$$\beta_2=\max\left\{0,\frac{1}{2}\left(\frac{2}{R_e}\frac{\Delta t}{\Delta x^2}-1\right)\right\} \tag{30}$$

$$\alpha_m=\min\{1,\ \alpha_0|u_{m+1}-u_{m-1}|\} \tag{31}$$

参数 α 的引进为压制在 $x=0$ 附近数值解中的跳切现像。表宁给出 $R_e=100$，总点数为 41 时临近两次迭代间最大差的变化情况

格　　式	迭代次数	$\max\limits_m\|u_m^{n+1}-u_m^n\|$
MacCormack $\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}=0.8\right)$	20	$\cdot 24^{-1}$
	40	$\cdot 45^{-1}$
	60	$\cdot 11^{-1}$
	80	$\cdot 49^{-3}$
加算子附加修正 $\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}=2\right)$	20	$\cdot 27^{0}$
	40	$\cdot 31^{-3}$
	60	$\cdot 18^{-5}$
	80	$\cdot 22^{-7}$

从表中可看出，加算子附加修正可改进收敛速度。

B. NS方程的数值计算

我们利用附加修正的办法利用单步格式[12]和Maccormack格式计算了平板上激波与附面层相互干扰问题。计算中取$M_{\infty}=2.0$, $R_e=2.96\times10^{7}$与显式格式相比，步长可放大近10倍。在[13]中利用算子放大型修正了的单步格式算了三元激波与附面层的相互干扰问题。计算中取$M_{\infty}=2.94$, $R_{e_{\delta}}=3000$，约迭代300次就可以得到一组稳下汞的结果。

参　考　文　献

〔1〕 Враиловскаэ, и. Ю, ДокладЫ АНСССР, 160, 5(1965)

〔2〕 MacCormack, R. W, AIAA Paper 69-354, 1969

〔3〕 Allep, J. S., and Cheng. S. I., The physics of fluids, 13(1970)1

〔4〕 Carter, J. E., NASA TR R-385, July 1972

〔5〕 Viviand, H and Ghazzi, W, Lecture Notes in Physics, Vol. 59, Springer-VerLag, New York, 1976.

〔6〕 Li, C. P., Proceedings of the fifth International Conference on Numerical Methods in Tluid Dynamics, Lecture Notes in Physics59, Springer-VerLag, New York, 1976.

〔7〕Beam, R. M. and Warming, R. f., Proceeding of the AIAA 3rd computational fluid Dynamics conference, ALbuguergue, New Mexico June 1977.

〔8〕Steger, J. L. AIAA paper 77-665, 1977

〔9〕MacCormack, R. W, AIAA paper 81-0110, 1981

〔10〕张函信，陆林生，余泽楚，马占奎，应用数学和力学，第4期，第一卷（1983）

〔11〕马延文，计算数学，No.4，1978

〔12〕马延文，计算数学，No.1，1983。

〔13〕Ma, Y. W. and cheng, S. I., MAEReport No.1566-T, Dept of Mechanical and Aerospace Engineering, Princeton University, 1982.

几种差分格式的定量比较

倪林安 吴雄华 王 玥 朱幼兰

（科学院 计算中心）

摘 要

通常在比较差分格式时，只是作定性比较，但是，只作定性比较是不够的。例如有两种格式A和B，并设A比B精度高，但A的工作量比B大，那么究竟哪一种格式好？有时甚至高精度的格式反而得不出物理解的近似解，因此有必要对差分格式进行定量比较。

当状态方程非凸时，数值解对方法是非常敏感的，因此，我们选具有非凸状态方程的问题，用7种不同的格式进行了数值比较试验，数值计算表明有如下的结论。

rogyHoB格式，E—O一阶格式能获得物理解的近似解，但精度不高。对某一问题，为了获得误差为10^{-3}的解，至少在空间方向上要取100000个网格。

Lax格式、L—W格式，Maccormark格式、Ri-chtmyer格式都不能得到收敛于物理解的近似解。

二阶分离奇性法可以得到物理解。对于我们所给的问题，要获得误差为10^{-3}的解，只需30个网格，与rogyHoB格式、E—O1阶格式相差至少3000倍。由于rogyHoB格式与E—O一阶格式的敛速大约$O(\Delta t^{\frac{1}{2}})$，而二阶分离奇性法敛速为$O(\Delta t^{2})$，因此，如果精度要求愈高，那么，为了达到同一精度，工作量相差将更大。

问　　题

方程：
$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{\partial f(u)}{\partial x}=0,\\ f(u)=u^4/2-19u^3/30+u^2/4-33u/1000,\end{cases}$$

$$u(x,0)=\begin{cases}0.656-200(x+0.001), & -0.001\le x<-0.0005,\\ 0.656+200x, & -0.0005\le x<0,\\ 0.014+170x, & 0\le x\le 0.0005,\\ 0.014-170(x-0.001), & 0.0005\le x\le 0.001.\end{cases}$$

$$\begin{cases}u(t,-0.001)=0.656-4x_1(t),\ t\ge 0,\\ u(t,0.001)=0.014-3.4x_2(t),\ t\ge 0.\end{cases}$$

而 $x_1(t)$、$x_2(t)$ 是由下列关系按隐式方式定义：

$$t=x_1(t)f'(0.656-4x_1(t)),\quad t=x_2(t)f'(0.014-3.4x_2(t))$$

对于这种一阶拟线性方程间断始值问题，用L－W格式等格式及其变形得到的通常只是问题的弱解，而不是问题的唯一的物理解，这已得到了证明。但是，用这样的格式求解这样的间断始值问题与物理解的误差是多少？下面针对这一问题，给予数值上的说明。

边界处理

由于边界条件不是显式，而是参数形式，并且对于参变量而言，是一个非线性方程，因此为了从已知此时刻的 u^n 值，求下一时刻的 u^{n+1} 值，需要先求出参变量，而求参变量 x_1^{n+1}、x_2^{n+1}，我们采用了迭代法，具体采用了割线法，迭代初值取前一时刻的 x_1^n、x_2^n 及与此适当接近的另一值，求出 x_1^{n+1}、x_2^{n+1} 后，也就求出了 u_0^{n+1}、u_J^{n+1}。（在此假设对〔－0.001，0.001〕J等分。）

计算结果

计算结果表明，用分离奇性法[1]、E－O一阶格式[2]、roвyHoB格式可求出物理解，而用其它方法求出的都不是物理解。

由于理论上证明了分离奇性法具有可以准确地求出间断的优越性，因而以分离奇性法求得的结果作为标准值进行了误差的数值分析。在比较中，我们采用均方根误差。

设在 $t=t_0$ 时的"标准解"为 $u_1(x, t_0)$，用差分方程求得的数值解为 $u_2(x, t_0)$，则误差为：

$$\|\delta\|=\sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b (u_1(x, t_0)-u_2(x,t_0))^2 dx},$$

其中 $a=-0.001$，$b=0.001$。

对于上式中的积分，采用数值积分，且取120个网格的分离奇性法的结果作为"标准解"。

计算结果可参看图2—图9。表1给出了各方法在 $t_0=0.066$ 处的误差值。

由于我们所用的是分离奇性法120个网格的结果作为"标准解"实际上这个解与真正的标准解还有一个误差。理论上证明了分离奇性法是二阶格式，而且计算结果也验证了这一点，所以我们可以估计出所用的"标准解"与真解之间的误差。

在分离奇性法中，我们取 $\frac{\Delta t}{\Delta \xi}$ =notcos，我们用下面方法估计真解：

设所求问题的真解为 u^*，用差分格式求出的解为 $\tilde{u}$，则有：

$$\tilde{u}(\Delta t)=u^*+a(\Delta t)^2+b(\Delta t)^3+O(\Delta t^4)$$

表1* $t_0=0.066$ 时各格式的误差值

格　式	网格份数(J)	误差($\|\delta\|$)
分离奇性法	15	0.11×10^{-2}
	30	0.12×10^{-3}
	60	0.25×10^{-4}
rogyHoB格式	50	0.37×10^{-1}
	100	0.26×10^{-1}
	200	0.18×10^{-1}
	400	0.14×10^{-1}
	800	0.92×10^{-2}
E－O格式	50	0.38×10^{-1}
	100	0.28×10^{-1}
	200	0.20×10^{-1}
	400	0.15×10^{-1}
	800	0.11×10^{-1}
Lax格式	100	0.89×10^{-1}
L—W格式	100	1.01×10^{-1}
RichtMyer格式	100	0.94×10^{-1}
MacCormack格式	100	0.66×10^{-1}
$\max\limits_j\|f'(u_j^n)\|\frac{\Delta t_n}{\Delta x}=0.5$	200	0.69×10^{-1}
MacCormack格式	100	0.99×10^{-1}
$\max\limits_j\|f'(u_j^n)\|\frac{\Delta t_n}{\Delta x}=0.75$	200	1.01×10^{-1}
	400	1.02×10^{-1}

(续下页)

（续上表）

MacCormack格式	100	1.01×10^{-1}
$\max\lvert f'(u_j^n)\rvert\frac{\Delta t_n}{\Delta x}=0.95$	200	1.01×10^{-1}
	400	1.02×10^{-1}

*含入误差影响待查。

设30个网点所求得的差分解为$\widetilde{u}(\Delta t)$，则相应的60个网点，120个网点的解为$\widetilde{u}(\frac{\Delta t}{2})$、$\widetilde{u}(\frac{\Delta t}{4})$。

$$\text{由}\begin{cases}\widetilde{u}(\Delta t)=u^*+a(\Delta t)^2+b(\Delta t)^3+0(\Delta t^4)\\ \widetilde{u}(\frac{\Delta t}{2})=u^*+a(\frac{\Delta t}{2})^2+b(\frac{\Delta t}{2})^3+0(\Delta t^4)\\ \widetilde{u}(\frac{\Delta t}{4})=u^*+a(\frac{\Delta t}{4})^2+b(\frac{\Delta t}{4})^3+0(at^4)\end{cases}$$

可解得：

$$u^*=\frac{32}{21}\widetilde{u}(\frac{\Delta t}{4})-\frac{12}{21}\widetilde{u}(\frac{\Delta t}{2})+\frac{1}{21}\widetilde{u}(\Delta t)+0(\Delta t^4)$$

由此式根据我们的计算结果可估得：

$$\lvert u^*-\widetilde{u}(\frac{\Delta t}{4})\rvert\approx0.000005$$

所以尽管我们用的不是真正的标准解，然而由于：

$$\lvert u^*-\bar{u}\rvert\leq\lvert u^*-\widetilde{u}(\frac{\Delta t}{4})\rvert+\lvert\widetilde{u}(\frac{\Delta t}{4})-\bar{u}\rvert$$

其中u为所用格式求出的差分解。从而上表中所给出的误差是可信的。

结 论

由计算结果可见，分离奇性法对求解这种一阶拟线性双曲型方

程的间断始值问题是行之有效的方法，其次是rogyHoB格式、E—O一阶格式，而其它所用格式对求解我们所给的问题都是不行的(见表一)。在计算中我们还发现：Lax格式将间断磨平，L—W格式、Richtmyer格式分不开间断，而且不同程度地出现震荡，对于Richtmyer格式，由于震荡的增大，为了保证格式的稳定，从而Δt将愈来愈小，因而当t较大时，此格式实际上已无法进行。

在不收敛于物理解的格式中，我们特取MacCormock格式作了较详细地讨论。结果表明，改变步长但步长比不变时，解很接近，但

$$\max_j |f'(u_j^n)| \frac{\Delta t_n}{ax}$$

取不同值时，收敛到不同的弱解。

在可用的格式中，rogyHoB格式是一个过渡点，E—O一阶格式是两个过渡点，并且rogyHoB格式、E—O一阶格式的敛速约为$O(\Delta t^{\frac{1}{2}})$，分离奇性法的敛速为$O(\Delta t^2)$。要达到$10^{-3}$的精度，rogyHoB格式和E—O格式至少需100000个网点，而分离奇性法只需30个网点，所以至少相差3000倍。

参 考 文 献

1. 朱　兰、钟锡昌、陈　木、张作民，初边值问题差分方法及绕流，科学出版社，1980。
2. B·Engquist and S·Osher，Stable and entrohy—ratirfying opproximatione for transonic flow calculatione，math comp.，v·34，(1980)，pp45—75。