

微积分与线性代数

宋积平 侯风波 主编
(下册)



中国农业科技出版社

全国高等职业技术教育类专业教材
高等职业教育教材建设指导委员会审定

微积分与线性代数（下册）

主 审：刘德有
主 编：宋和平 侯风波
副主编：王增富 王会波
参 编：李仁芮 牛燕影 潘承松 赵会娟
 相秀芬 罗胡英 阴立群

中国农业科技出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

微积分与线性代数/宋和平等主编. —北京:中国农业科技出版社, 2001

ISBN 7-80167-213-5

I. 微... II. 宋... III. ①微积分②线性代数
IV. ①0172②0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2001) 第 055119 号

责任编辑 出版发行	左月秋 中国农业科技出版社 邮编: 100081 电话: (010)68919711; 62173607; 传真 62189014 新华书店北京发行所 河北昌黎县万利印刷厂
经 销	850mm×1168mm 1/32 印张: 10.25
印 刷	1~4000册 字数: 241千字
开 本	2001年8月第一版 2001年8月第1次印刷
印 数	(上、下册)36.00元
版 次	
定 价	

前 言

本书是高等职业教育规划教材,是根据教育部最新制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》,针对高职高专经济类及管理类各专业编写的高职高专教材。本书内容包括函数、极限与连续、导数与微分、一元函数微分应用、一元函数积分学、空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、常微分方程、行列式、矩阵、线性方程组、矩阵的特征值、符号计算系统 Mathematica 及其应用等内容。本书特别注重贯彻“掌握概念、强化应用,以必需够用为度”的教学原则,具有如下 9 大特点:

1、在保证数学概念准确性的前提下,尽量借助几何直观,力求使抽象的数学概念形象化,便于读者理解。

2、理论推导或证明以解释清楚有关结论为度,不追求过分的理论上的系统性。

3、例题丰富,便于学生自学。

4、注重数学概念与实际问题的联系,以培养学生的应用意识。

5、引入了用计算机做数学的系统——Mathematica 系统,便于学生借助于计算机用数学解决实际问题。

6、每章末都有例题与习题,便于学生复习巩固及教师习题课的选材。

7、在内容处理上兼顾学生抽象概括能力、逻辑推理能力、自学能力、以及较熟练的运算能力和综合运用所学的知识分析问题、解决问题的能力培养。

8、注重函数的三种描述方法,对课程的每一主题都从几何、数值和解析三个方面加以体现,避免了只注重解析推导。

9、对每一个概念都注意从其产生背景或实际问题抽象出数学概念,并注重性质、计算与应用的关系。

本书框架结构由宋和平、侯风波设计。本书分上、下两册出版。本书由宋和平、侯风波主编；王增富、王会波任副主编；编委有宋和平、赵会娟、罗胡英（第六章、第七章、第八章、第九章）；侯风波（第一章、第十四章）；李仁芮（第二章、第三章）；潘承松、相秀芬（第四章、第五章）；牛燕影（第十章、第十一章）；王增富、阴立群（第十二章）；王增富、王会波（第十三章）；全书由刘德有主审。

由于编者的水平所限，书中若有不当之处，恳请读者与同仁给予批评指正。

编 者

2001年5月28日

第四节	逆矩阵	195
第十二章	线性方程组	215
第一节	向量组的线性相关性	215
第二节	齐次线性方程组	226
第三节	非齐次线性方程组	234
第四节	投入产出模型	246
第十三章	矩阵的特征值	271
第一节	特征值与特征向量	271
第二节	矩阵的对角化	278
第十四章	符号计算系统 <i>Mathematica</i> 及其应用	292
第一节	符号计算系统 <i>Mathematica</i> 简介	292
第二节	用 <i>Mathematica</i> 做微积分运算	309
附录 E	320

第六章 空间解析几何简介

同平面解析几何一样，空间解析几何就是通过建立空间直角坐标系，使空间的点与三元有序实数组之间建立起一一对应的关系，并将空间图形与三元方程联系在一起，从而达到用代数方法研究空间几何问题的目的，因此，空间解析几何的内容也是很重要的，它是学习多元函数微积分的基础。

第一节 空间直角坐标系与向量的概念

一、空间直角坐标系

为了确定平面上任意一点的位置，我们建立了平面直角坐标系，现在，为了确定空间任意一点的位置，相应地就要引进空间直角坐标系。

在空间取定一点 O ，过点 O 作三条互相垂直的直线 OX 、 OY 、 OZ 。并按右手系规定 OX 、 OY 、 OZ 的正方向，即将右手伸直；拇指朝上为 OZ 的正方向，其余四指的指向为 OX 的正方向，四指弯曲 90° 后的指向为 OY 的正方向，再规定一个相同的单位长度，如图 6-1，这样的三条坐标轴就构成了一个空间直角坐标系，记为 $OXYZ$ 。

点 O 称为坐标原点，三条直线分别称为 X 轴、 Y 轴、 Z 轴。每两条坐标轴确定一个平面，称为坐标平面。由 X 轴和 Y 轴确定的平面称为 XY 平面，由 Y 轴和 Z 轴确定的平面称为 YZ 平面，由 Z 轴和 X 轴确定的平面称为 ZX 平面，通常 XY 平面放置在水平面上， Z 轴放在铅直位置，而且由下向上为 Z 轴方向。三个坐标平面将空间分成八个部分，称为八个卦限，这八个卦限的编号如图 6-2 示。

对于空间任意一点 M ，过点 M 作三个平面，分别垂直于 x 轴、 y 轴、 z 轴，且与这三个轴分别交于 P 、 Q 、 R 三点（图 6-3

示), 设这三点在 X 轴、 Y 轴、 Z 轴上依次取坐标为 x 、 y 、 z , 于是空间一点 M 就唯一确定了一个有序数组 (x, y, z) , 反之, 若已知一有序数组 (x, y, z) , 分别在 x 轴、 y 轴、 z 轴上依次取坐标为 x 、 y 、 z 的点 P 、 Q 、 R , 并过 P 、 Q 、 R 分别作与 x 轴、 y 轴、 z 轴垂直的平面, 则这三个平面交于唯一的一点 M , 这样就建立了空间的点 M 与有序数组 (x, y, z) 之间的一一对应关系, 这组数 (x, y, z) 称为点 M 的坐标, 坐标为 (x, y, z) 的点 M 通常记为 $M(x, y, z)$, 又称 x 、 y 、 z 分别为点 M 的横坐标、纵坐标、竖坐标。

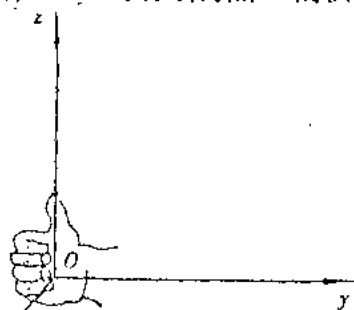


图 6-1

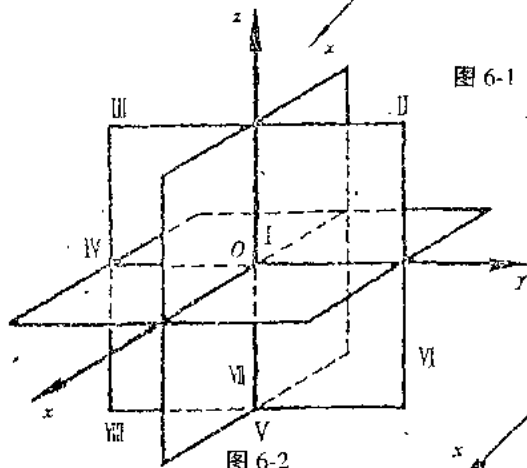


图 6-2

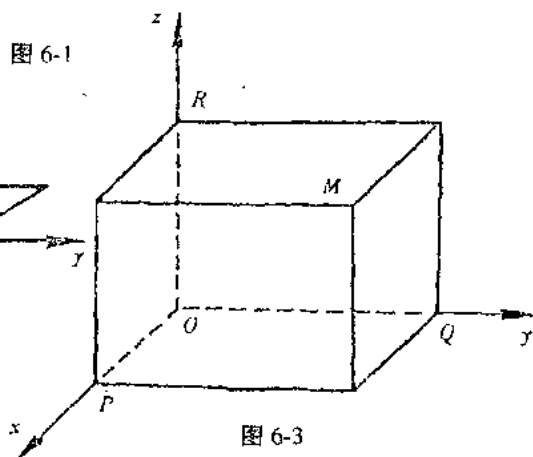


图 6-3

显然坐标原点的坐标为 $(0, 0, 0)$;

X轴上点的坐标为 $(x, 0, 0)$, 或 $(a, 0, 0)$;

Y轴上点的坐标为 $(0, y, 0)$, 或 $(0, b, 0)$;

Z轴上点的坐标为 $(0, 0, z)$, 或 $(0, 0, c)$;

给定空间两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, 过 M_1 、 M_2 各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面, 这六个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体 (图 6-4)。

由于 $\triangle M_1NM_2$ 是直角三角形, $\angle M_1NM_2$ 是直角, 所以

$$|M_1M_2|^2 = |M_1N|^2 + |NM_2|^2$$

又 $\triangle M_1PN$ 也是直角三角形, 且 $|M_1N|^2 = |M_1P|^2 + |PN|^2$

$$\text{所以 } |M_1M_2|^2 = |M_1P|^2 + |PN|^2 + |NM_2|^2$$

$$\text{而 } |M_1P| = |P_1P_2| = |x_2 - x_1|$$

$$|PN| = |Q_1Q_2| = |y_2 - y_1|$$

$$|NM_2| = |R_1R_2| = |z_2 - z_1|$$

于是空间两点 M_1M_2 的距离公式:

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

特别地, 点 $M(x, y, z)$ 与原点 $O(0,0,0)$ 间的距离为:

$$|OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

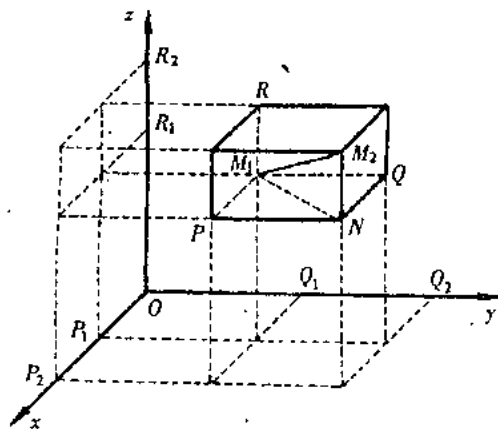


图 6-4

二、向量的概念及其线性运算

1、向量的基本概念

在实际中经常遇到两种量，一种量用数表示的量，叫做数量或标量，如质量、温度、体积等。另一种是要用数量和方向才能表示的量，即既有大小、又有方向的量，叫做向量（或矢量），如速度、力等，而且用图 6-5 所示的那样的带有箭头线段表示，记为 \overline{AB} ，称 A 、 B 依次为向量 \overline{AB} 的起点、终点。每个向量还可用小写的黑体拉丁字母来表示，如 a 、 b 等。

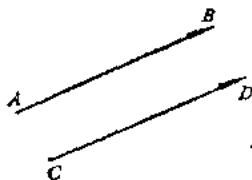


图 6-5

向量的大小叫做向量的模，向量 \overline{AB} 、 a 的模分别记为 $|\overline{AB}|$ 、 $|a|$ 。这里我们所讨论的是自由向量。即我们将具有相同方向与相等模长的任意两个向量定义为相等的向量，如图 6-5 中的向量 \overline{AB} 与 \overline{CD} ，虽然它们的起点或终点并不重合，但它们的模相等且方向相同，按定义被认为是相等两个向量，记为 $\overline{AB} = \overline{CD}$ 。

模为 1 的向量叫做单位向量，模为 0 的向量称为零向量，记为 o ，其方向不定，可看作是任意的。若向量 b 与 a 的模相等，方向相反，就称向量 b 为 a 的负向量，记为 $b = -a$ 如图 6-5 中， $\overline{BA} = -\overline{AB}$

2、向量的线性运算

1) 向量的加法

设有两个向量 a 与 b ，我们定义 a 与 b 的加法运算如下：以空间某一定点为始点作向量 a 、 b ，再以这两个向量为邻边作平行四边形，从定点到这个平行四边形对角的顶点所构成的向量，称

为 a 与 b 的和, 记作 $a+b$ (图 6-6)

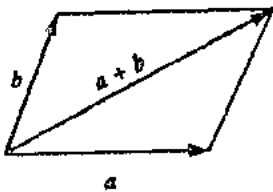


图 6-6

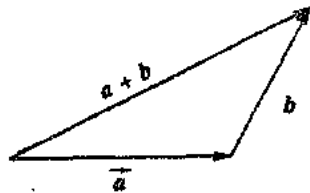


图 6-7

这种用平行四边形的对角线向量来定义两向量的和的方法, 叫做向量加法的平行四边形法则。

由于平行四边形的对边平行且相等, 所以从图 6-6 可以看出, 还可以有另一种求两个向量的和的方法, 即先作向量 a , 以 a 的终点为始点作向量 b , 则从 a 的始点到 b 的终点所构成的向量, 就是 a 与 b 的和 $a+b$ (图 6-7), 这一方法叫做向量加法的三角形法则。

如果两向量 a 与 b 在同一直线上, 那末规定它们的和为: 当 a 与 b 方向相同时, 和向量的方向与原来两向量的方向相同, 其模等于两向量的模之和; 当 a 与 b 方向相反时, 和向量的方向与较长的向量方向相同, 而模等于两向量的模之差的绝对值。

容易验证向量加法满足以下运算规律:

(1) 交换律: $a+b=b+a$

(2) 结合律: $(a+b)+c=a+(b+c)=a+b+c$

结合负向量概念, 我们规定两个向量 a 与 b 的差 $a-b=a+(-b)$

2) 向量与数的乘法(数乘)

设 λ 是一个数, 向量 a 与 λ 的乘积 λa 规定为:

当 $\lambda > 0$ 时, λa 与 a 同方向, 模 $|\lambda a| = \lambda |a|$;

当 $\lambda < 0$ 时, λa 与 a 方向相反; $|\lambda a| = |\lambda| |a|$;

当 $\lambda = 0$ 时, λa 是零向量。

向量的数乘满足以下运算规律:

(1) 结合律: $\lambda(v a) = v(\lambda a) = (\lambda v)a$;

(2) 分配律: $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$;

$$\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$$

设 a 不是零向量, 则与 a 同方向的单位向量称为向量 a 的单位向量, 记为 a^0 , 则有 $a^0 = \frac{1}{|a|} a$

三、向量的坐标表示

设 a 为直角坐标系 $oxyz$ 中的一个向量, 将 a 平行移动, 使其起点与坐标原点 O 重合, 这时终点记为 $M(x, y, z)$ 。

过点 M 作三张平面分别垂直于 x 、 y 、 z 轴, 其交点分别为 P 、 Q 、 R (图 6-8), 于是

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}$$

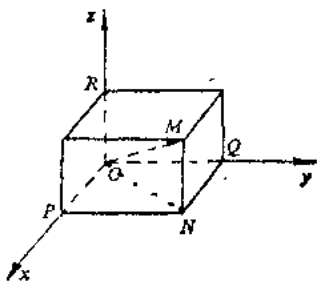


图 6-8

记 i 、 j 、 k 分别为 x 、 y 、 z 轴正向的单位向量,

称为坐标向量, 因为点 M 的坐标为 (x, y, z) 因此

$\overrightarrow{OP} = xi$ $\overrightarrow{OQ} = yj$ $\overrightarrow{OR} = zk$, 所以 $a = xi + yj + zk$. 此式称为向量 a 按坐标方向的分解式, 可以证明 a 的分解式是唯一的, 我们把这 x 、 y 、 z 称为向量 a 的坐标, 记为 $a = \{x, y, z\}$ 。

由于向量与它的坐标一一对应, 所以向量的运算能通过向量坐标的代数运算进行。

设 $a = x_1i + y_1j + z_1k = \{x_1, y_1, z_1\}$ $b = x_2i + y_2j + z_2k = \{x_2, y_2, z_2\}$
容易由定义的几何直观得到

$$\lambda a = \lambda x_1 i + \lambda y_1 j + \lambda z_1 k = \{\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1\}$$

$$a \pm b = (x_1 \pm x_2) i + (y_1 \pm y_2) j + (z_1 \pm z_2) k$$

$$= \{x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2\}$$

下面用向量的坐标来表示向量的模与方向。

设 $a = \{x, y, z\}$, 如图 6-8 所示, 由两点间的距离公式, 得

$$|a| = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

至于向量 a 的方向, 我们用 a 分别与 x 、 y 、 z 轴正方向的夹角 α 、 β 、 γ 来确定, 并将 α 、 β 、 γ 称为 a 的方向角。

在图 6-8 中由直角 $\triangle POM$, $\triangle OQM$ 及 $\triangle ORM$ 易得:

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{x}{|\overrightarrow{OM}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \cos \beta = \frac{y}{|\overrightarrow{OM}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \cos \gamma = \frac{z}{|\overrightarrow{OM}|} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{cases} \quad (6-2)$$

$\cos \alpha$ 、 $\cos \beta$ 、 $\cos \gamma$ 称为 a 的方向余弦。

容易验证 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$

$$\text{因为 } a^0 = \frac{a}{|a|} = \left\{ \frac{x}{|a|}, \frac{y}{|a|}, \frac{z}{|a|} \right\}$$

所以 $a^0 = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ 。因此, 具体计算时常常先算出 a^0 , 便得到 a 的三个方向余弦, 也就知道了 a 的方向角。

若 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, 是空间的两个点, 由于

$$\overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M_2}$$

$$\text{于是 } \overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$$

$$\text{而 } \overrightarrow{OM_2} = \{x_2, y_2, z_2\} \quad \overrightarrow{OM_1} = \{x_1, y_1, z_1\}$$

所以 $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$

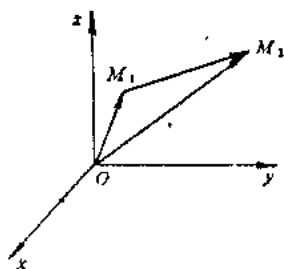


图 6-9

即向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的坐标等于向量终点 M_2 的坐标，减去向量起点 M_1 的坐标。

例 1、设有两点 $A(1, -1, 2)$, $B(-2, 1, 3)$, 求向量 $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$ 的模和三个方向余弦 $\cos \alpha$ 、 $\cos \beta$ 、 $\cos \gamma$ 。

解：∵ $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB} = \{-2-1, 1-(-1), 3-2\} = \{-3, 2, 1\}$

又∵ $|\mathbf{a}| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{14}$

又由于 $\mathbf{a}^0 = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{1}{\sqrt{14}}\{-3, 2, 1\} = \left\{ \frac{-3}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}} \right\}$

∴ $\cos \alpha = \frac{-3}{\sqrt{14}}$, $\cos \beta = \frac{2}{\sqrt{14}}$, $\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{14}}$

四、向量的点积与叉积

1、向量的点积

定义 1: 对于两个非零向量 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} , 记它们正向间的夹角为 θ ($0 \leq \theta \leq \pi$), 简称向量间夹角, 我们称 $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos \theta$ 为向量 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 的点积 (或称数量积), 记为 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ 即 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos \theta$ 容易验证点积符合下列运算规律:

1) 交换律: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$

2) 分配律: $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$

3) 结合律: $\lambda(a \cdot b) = (\lambda a) \cdot b = a \cdot (\lambda b)$

此外, 点积还具有如下性质:

1) $a \cdot a = |a|^2$

2) 任意两个向量 a 、 b 互相垂直的充要条件是 $a \cdot b = 0$

3) 两个非零向量的夹角余弦可用点积表示,

$$\text{即 } \cos \theta = \frac{a \cdot b}{|a| |b|}$$

下面导出 a 、 b 的坐标表达式:

设 $a = \{x_1, y_1, z_1\}$, $b = \{x_2, y_2, z_2\}$,

则 $a \cdot b = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$

事实上, 对于坐标向量 i, j, k , 有 $i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1$ $i \cdot j = j \cdot k = k \cdot i = 0$

于是 $a \cdot b = (x_1 i + y_1 j + z_1 k) \cdot (x_2 i + y_2 j + z_2 k)$

$$= (x_1 i + y_1 j + z_1 k) \cdot x_2 i + (x_1 i + y_1 j + z_1 k) \cdot y_2 j +$$

$$(x_1 i + y_1 j + z_1 k) \cdot z_2 k$$

$$= x_1 x_2 (i \cdot i) + y_1 y_2 (j \cdot j) + z_1 z_2 (k \cdot k)$$

即 $a \cdot b = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$

(6-4)

从而 a 与 b 的夹角余弦还可表示为

$$\cos \theta = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

例 2、已知 $M_1(0, 2, -1)$, $M_2(1, 0, 1)$, $M_3(1, 3, 2)$, 求 $\overrightarrow{M_1 M_2} \cdot \overrightarrow{M_1 M_3}$

解: $\therefore \overrightarrow{M_1 M_2} = \{1-0, 0-2, 1-(-1)\} = \{1, -2, 2\}$

$$\overrightarrow{M_1 M_3} = \{1-0, 3-2, 2-(-1)\} = \{1, 1, 3\}$$

$$\therefore \overrightarrow{M_1 M_2} \cdot \overrightarrow{M_1 M_3} = 1 \times 1 + (-2) \times 1 + 2 \times 3 = 5$$

例 3、已知三角形的三个顶点为 $A(1, 2, 2)$, $B(1, 1, 1)$, $C(1, 2, 0)$, 求证: $\triangle ABC$ 为直角三角形, 并求 $\angle A$ 。

$$\text{解: } \overrightarrow{AB} = \{1-1, 1-2, 1-2\} = \{0, -1, -1\}$$

$$\overrightarrow{BC} = \{1-1, 2-1, 0-1\} = \{0, 1, -1\}$$

$$\overrightarrow{AC} = \{1-1, 2-2, 0-2\} = \{0, 0, -2\}$$

$$\text{又 } \because \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = (-1) \times 1 + (-1) \times (-1) = 0$$

$\therefore \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$ 即 $\triangle ABC$ 为直角三角形

$$\text{又 } \because \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \times 0 + (-1) \times 0 + (-1) \times (-2) = 2$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + (-2)^2} = 2$$

$$\therefore \cos \angle A = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \angle A = \frac{\pi}{4}$$

2、向量的叉积

定义 2: 设 a 、 b 为两个非零向量, 我们定义 a 与 b 的叉积是满足下面条件的一个向量, 记为 $a \times b$, 它的模和方向为:

1) $|a \times b| = |a||b|\sin \theta$ (θ 为 a 与 b 夹角)

2) $a \times b$ 垂直于 a 与 b 所确定的平面, 且 a 、 b 、 $a \times b$ 符合右手规则 (图 6-10), 从几何上看 $|a \times b|$ 等于以 a 、 b 为邻边的平行四边形的面积。

由定义可知叉积满足以下规律和性质:

1) $b \times a = -a \times b$

2) 结合律: $(\lambda a) \times b = a \times (\lambda b) = \lambda (a \times b)$

3) 分配律: $(a+b) \times c = a \times c + b \times c$

$$a \times (b+c) = a \times b + a \times c$$

4) 两个非零向量 a 与 b 平行的充要条件是 $a \times b = 0$