大學叢書

微分方程初步

費利伯著
斐禮伯譯

商務印書館

目　錄

第一章　一級微分方程式　離變數法

1. 定義 …… 1
2. 微分方程式之解 …… 2
3. 離變數法 …… 4
4. 微分方程式之解的形式 …… 5
習題 …… 8
5. 初級方程式之圖示 …… 8
6. 幾何問題 …… 10
7. 常數之決定法 …… 12
8. 含有積分的方程式 …… 14
問題 …… 16
9. 變化率 …… 18
10. 定限積分法 …… 19
11. 流射孔之水流 …… 20
12. 連續性方程式 …… 21
13. 熱之流動 …… 23
14. 二次作用 …… 24

15. 微分之相關……26
問題……30

第二章　其他初級方程式

16. 適合微分方程式……37
17. 積分因數……39
18. 平直微分方程式……40
19. 可簡化爲平直式之方程式……42
20. 齊次方程式……43
21. 高次方程式……46
22. 變數之改易……48
23. 聯立方程式……50
習題……51
問題……53

第三章　二級方程式之特類

24. 通論……58
25. 直接可解之方程式……59
26. 非含y之方程式……60
27. 非含x之方程式……61
28. 二級平直方程式……62
習題……64

29. 橫梁之彎曲 …… 65
30. 纜之平衡 …… 69
31. 質點沿直線運動 …… 70
32. 複系之運動 …… 72
33. 平面上之運動 …… 74
問題 …… 79

第四章 常係數平直微分方程式

34. n級方程式 …… 84
35. 常係數平直方程式 …… 85
36. 右端爲零之方程式 …… 87
37. 虛根 …… 89
38. 右端爲x之函數的方程式 …… 92
39. 未定係數法 …… 94
40. 聯立平直方程式 …… 98
習題 …… 99
41. 繞定軸之旋轉 …… 103
42. 振動系 …… 104
問題 …… 107

答案 …… 111

中西名詞索引 …… 121

微分方程初步

第一章

一級微分方程式　離變數法

1. 定義.

在吾人研究經驗中,知求變數變化間之關係較易於求變數自身間之關係.用包含微分及微係數之方程式,以表明此種關係,即謂之微分方程式:

例 $$(x^2+y^2)dx+2xydy=0 \quad \cdots\cdots (1a)$$

又 $$x\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}=2 \quad \cdots\cdots (1b)$$

設方程式中,只含有全微分(total differentials)或全微係數者,則謂之全微分方程式(ordinary differential equation),如(1a)(1b)是也.

設方程式中含有偏微係數者,則謂之偏微分方程式(partial differential equation):

例 $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0 \quad \cdots\cdots (1c)$$

設微分方程式中,只含有第一微分或微係數者,則謂之

初級微分方程式(first order differential equation),微分方程式之等級,卽其內所含有最高級之微係數之等級.如(1a)所示,卽爲初級方程式.如(1b),(1c)所示,卽爲二級方程式.

在本書內只研究關於全微分方程式.在每問題中,各數量爲單自變數的函數,如此卽不致有偏微係數發生.例如運動問題,諸變數皆爲時間的函數,解題時求該變數爲時間之函數.

2. 微分方程式之解. (Solutions of a Differential Equation.)

設有一方程式,變數適合於其自身之時,則此變數及其微分或微係數亦適合於所設微分方程式.如此類之方程式,稱爲微分方程式之解.

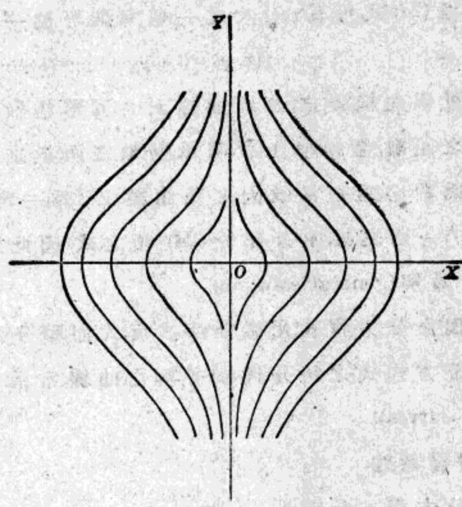
例 $$\frac{1}{3}x^3+xy^2=c \qquad (2a)$$

設 c 爲常數時,則(2a)爲下方程式之解:

$$(x^2+y^2)dx+2xydy=0 \qquad (2b)$$

因求(2a)之微分時,卽得(2b)於是 x y 二變數,適合於(2a)而變化時,則其自身及其微分卽適合於(2b).常數 c 之值旣是隨意的,故此微分方程式之解有無限多的.

現以 x, y 之二值爲點,屬於平面上直交軸之坐標,繪圖,每一解以一曲線代表之.如(圖2)內之諸曲線是代表(2b)之解,對於平面之任何點可有一曲線通過之.但有時在較複雜之情形之下,可以有若干曲線通過一點.



(圖 2)

解二變數初級微分方程式時,恆化作下式:

$$du=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2c)$$

此式內之 u 爲二變數已知之函數.如前例

設 $$u=\frac{1}{3}x^3+xy^2,$$

則 $$du=(x^2+y^2)dx+2ydy.$$

因 u 之値,所以 (2b) 式與 $du=0$ 相同.

設 c 爲任何常數,可以微分法證明

$$u=c \text{ 式} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2d)$$

爲 $du=0$ 式之解.

欲明瞭 (2*d*) 式可爲 (2*c*) 式之一切解,則可設一解如下:

$$f(x, y)=0 \cdots\cdots (2e)$$

此解可以曲線表之,在此曲線上 u 爲單變數之函數,例如沿曲線之距離,微積學上證明單變數之函數之微分等於零時,則其函數必爲一常數.因之在曲線上 u 爲一常數,卽 x, y 適合於 (2*e*) 一切之値,亦適合於 (2*d*) 類之式.因此則 $u=c$ 爲 $du=0$ 式之通解 (general solution).

解一個微分方程式,用微分法之反式卽積分法因此一解,稱爲微分方程式之積分.代表各解之曲線,常稱爲積分曲線 (integral curves).

3. **離變數法.**

設微分方程式如下:

$$f_1(x)dx+f_2(y)dy=0 \cdots\cdots (3a)$$

在一項內只含有 x 及 dx, 在他項內只含有 y 及 dy. 在此種情形下,變數稱爲分離的 (separated).

各項爲適合微分 (exact differential) 以 $du=0$ 之式可以代表 (3*a*) 全式.此式中之

$$u=\int f_1(x)dx+\int f_2(y)dy,$$

故 (3*a*) 之解卽 $u=c.$

或 $\int f_1(x)dx+\int f_2(y)dy=c.$

此式中之 c 爲隨意之常數.

各積分公式只含有一個變數.設變數不被分離,則不能

以如此簡單之方法解微分方程式也.

例 $$xdy+(1-y)dx=0 \quad\cdots\cdots(3b)$$

旣不能求 xdy 之積分,故不能以直接的積分法求其解.但可用除法化(3b)式爲以下之簡式:

$$\frac{dy}{1-y}+\frac{dx}{x}=0.$$

在此式內變數爲被分離的,其解爲:

$$-\log(1-y)+\log x=c \quad\cdots\cdots(3c)$$

變數如此可分離時,則微分方程式稱爲可分離的(separable).

例 $$Mdx+Ndy=0.$$

設各係數 MN 只爲單變數之函數或含有單變數因數之積,則前式爲可分離之方程式(separable equation).

例 (3b)式及

$$(xy^2-x)dx+(y+x^2y)dy=0 \quad\cdots\cdots(3c)$$

$$M=(xy^2-x)=x(y^2-1),$$

$$N=(y+x^2y)=y(1+x^2).$$

4 微分方程式之解的形式.(Different Forms of Solution).

(3c)式爲

$$\log x-\log(1-y)=c \quad\cdots\cdots(4a)$$

可書爲

$$\log\frac{x}{1-y}=c,$$

由此

$$\frac{x}{1-y}=e^{c}=k.$$

在此式中 c 既爲隨意的常數，則 k 亦爲隨意的常數．用 c 代 k，則微分方程式之解可書如下式：

$$x=c(1-y)\cdots\cdots\cdots\cdots(4b)$$

而 c 之任何函數爲常數，則 (4b) 解可書爲：

$$x=c(y-1)\cdots\cdots\cdots\cdots(4c)$$

$$y-1=cx\cdots\cdots\cdots\cdots(4d)$$

或

$$1-y=cx\cdots\cdots\cdots\cdots(4e)$$

以上之 (4a),(4b),(4c), (4d) 及 (4e) 諸解爲等值的 (equivalent). 吾人卽可隨意用其一作爲 (3b) 式之解．但是 c 常數在以上五式中的義意不同，因之不能同時用其二式．若吾人以相當之手續，卽可直接求得其中之任何解．如將 (3b) 書爲下式：

$$xdy-ydx+dx=0,$$

以 x^2 除之可得下式：

$$\frac{xdy-ydx}{x^2}+\frac{dx}{x^2}=0.$$

首項爲 $\frac{y}{x}$ 之微分，乃以直接積分法可得下式：

$$\frac{y}{x}-\frac{1}{x}=c,$$

卽

$$y-1=cx\cdots\cdots\cdots\cdots(4d)$$

吾人欲簡化微分方程式之解,恆用對數之諸性質.在本書上,則用 $\log u$ 代表 u 之自然對數(卽是底數 e 之對數也).因此對數之定義如下:

$$e^{\log u}=u \cdots\cdots\cdots\cdots(a)$$

其重要之性質可用以下的方程式表示之:

$$\log e^u=u \cdots\cdots\cdots\cdots(b)$$

$$\log(uv)=\log u+\log v \cdots\cdots\cdots\cdots(c)$$

$$\log\frac{u}{v}=\log u-\log v \cdots\cdots\cdots\cdots(d)$$

$$\frac{1}{n}\log u=\log u^{\frac{1}{n}} \cdots\cdots\cdots\cdots(e)$$

$$\log 1=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(f)$$

$$\log\frac{1}{v}=-\log v \cdots\cdots\cdots\cdots(g)$$

任何常數旣爲其他常數之對數,爲方便故恆以 $\log c$ 代 c 爲積分常數.

例　欲解　$(1+x^2)dy-xydx=0.$

分離變數則爲

$$\frac{dy}{y}-\frac{xdx}{1+x^2}=0.$$

求積分並以 $\log c$ 爲積分常數:

$$\log y-\frac{1}{2}\log(1+x^2)=\log c,$$

亦卽爲

$$\log y=\log\sqrt{1+x^2}+\log c.$$

由此則

$$y = c\sqrt{1+x^2}.$$

此解亦可書爲下式:

$$y^2 = c^2(1+x^2),$$

$$y^2 = c(1+x^2),$$

或

$$cy = 1+x^2.$$

習題

解以下之諸方程式:

1. $\tan x \sin^2 y dx + \cos^2 x \cot y dy = 0.$

2. $(xy^2+x)dx + (y-x^2y)dy = 0.$

3. $ydx + (x+xy)dy = 0.$

4. $dx - \sqrt{a^2-x^2}\, dy = 0.$

5. $\tan x \dfrac{dy}{dx} - y = a.$

6. $r\dfrac{dr}{dx} = \sqrt{a^4-r^4}.$

7. $x\dfrac{dy}{dx} + y = y^2.$

8. $e^{x-y}dx + e^{y-x}dy = 0.$

9. $e^y\left(\dfrac{dy}{dx}+1\right) = 1.$

10. $(1+x^2)dy + (1+y^2)dx = 0.$

5. 初級方程式之圖示.

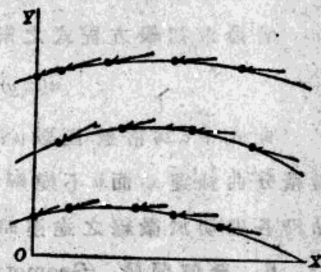
含有二變數 x, y 之初級方程式的通式如下:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(5a)$$

解$\frac{dy}{dx}$之值如下:

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y), \cdots\cdots\cdots\cdots(5b)$$

在所設方程式內,$f(x, y)$爲已知函數,在平面上諸(x, y)點,(5b)方程式決定$\frac{dy}{dx}$斜度之值.在諸點畫作短直線,其直線之斜度適與$\frac{dy}{dx}$之值相同.此等短線謂之微線(line elements)於是微分方程式對於在平面上每一點決定一微線及全平面上一切微線之總,即微分方程式之圖示.



(圖 5a)

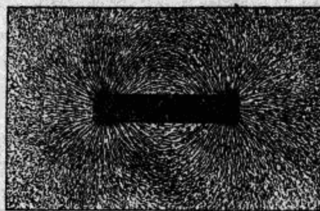
設　　$\phi(x, y)=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(5c)$

爲(5b)之解.

求(5c)方程式之微分,得$\frac{dy}{dx}$之值適合於(5b).如此積分曲線,在其諸點之斜度與屬於該點之微線斜度相等.故積分曲線,切於其諸點之微線.

仿此有時得微分方程式之近似解(approximate solution),畫作微線及切於諸微線之曲線.例圖寫一塊磁石周圍之諸磁力線時,以鐵屑散布於紙上,以手輕彈紙面,不久則鐵

屑沿磁力線之方向而排列,作成決定此磁力線之微分方程式之圖示.該磁力線可沿鐵屑之途徑畫成之.同樣欲畫液體流動之圖,恆用箭號(→)表示其流動之方向,畫在各處切於箭號之曲線,謂之流線 (stream lines).



(圖 5b)

普通求初級方程式之解如下:

$$u(x, y)=c.$$

此式中c為常數,函數u沿各積分曲線為常數,故(x, y)點沿積分曲線運動而u不變.解微分方程式可求函數u當(x, y)點沿各處切於微線之途徑時,則函數u之值不變.

6. 幾何問題. (Geometrical Problems.)

關於曲線有些可用微係數代表之量.例如斜度曲率半徑,此量所適合之方程式則為含有微係數之方程式.

例如曲線之斜度為所設x, y之函數,即$f(x, y)$,於是此曲線適合於

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y).$$

可解上式則得曲線之方程式,在平素曲線之斜度,非如上式直接所設,但常以含有微係數方程式表示曲線已知之性質.

例 1. 在曲線上之任何點,其切線在兩軸間之部份,爲切點所平分,求其方程式.

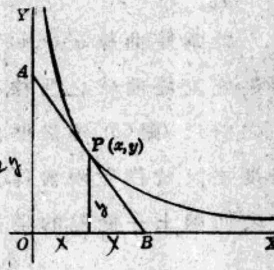
設 $P(x, y)$ 點爲 AB 切線之中點,(圖 6a) 由相似三角形

$$AO = 2y,$$

$$BO = 2x,$$

切線之斜度等於曲線在 P 點斜度.卽 $\frac{dy}{dx}$.

因此 $\frac{dy}{dx} = -\frac{AO}{BO} = -\frac{y}{x}$.



(圖 6a)

在圖中之斜度爲負, x, y 爲正,因之在上式內用負號.若是畫曲線在他象限內, x, y 之坐標有時爲負,無論如何,總可證明上式之眞確.上式內分離變數則得:

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0.$$

由此　$\log x + \log y = \log c$,

或　$xy = c$.

此卽爲所求之曲線方程式.

例 2. 求直交 $x^2 - y^2 = a^2$ ……(6a)

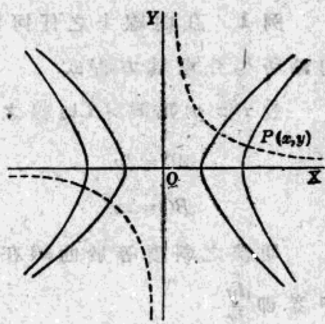
諸雙曲線(a 有任何之值)之諸曲線,此等曲線謂之雙曲線系的直交曲線(orthogonal trajectories).

求 (6a) 對於 x 之微分則得

$$2x-2y\frac{dy}{dx}=0.$$

由此

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (6b)$$



(圖 6b)

此爲雙曲線在(x, y)點之斜度.直交雙曲線之曲線在交點之斜度(圖 6b),等於雙曲線斜度之反號倒數.現設(x, y)爲直交曲線上一變點的坐標,則必適合於下方程式:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (6c)$$

此式之解爲 $xy=c.$ (參考例 1.)

此爲雙曲線系的直交曲線方程式.

在$(6b)$及$(6c)$內,x, y之各值相同,而其微係數之值不同,似覺奇疑.在一交點x, y在原曲線上之值與在直交曲線上之值相同.但在兩曲線上之其他點,x, y之值不同,因之在(x, y)點之微係數亦不同.

7. 常數之決定法. (Determination of Constants.)

積分常數既可有任何之值,則所設之微分方程式,有無限多之解,在眞實問題內,通常有特別的提示,用此可決定常數而得一定之解.

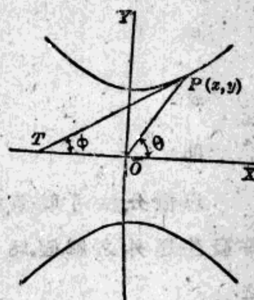
例如已知曲線通過某點,以某點坐標代入方程式內,卽可決定常數之值.有時在微分方程式內,含有未知之常數如

$$\frac{dy}{dx}=kf(x,y).$$

此式內之 $f(x,y)$ 爲已知之函數.設曲線通過 (x_1, y_1) 及 (x_2, y_2) 兩已知點,即可以此數值代入解,而得 c 及 k 兩數之值.

在問題內,常分爲兩部.第一部爲含有處處(或時時)適用之條件,恆以此求得微分方程式.第二部爲含有只在一處(或一時)適用之條件,恆以此決定常數之值.

例　通過 $(1, 2)$ 點之曲線,在任何 P 點之切線與連接 P 點與原點之直線,與 x 軸成餘角,求曲線之方程式.



(圖 7)

設 x, y 爲 P 點之坐標.OT 直線斜度爲

$$\tan\theta=\frac{y}{x},$$

TP 切線之斜度爲

$$\tan\phi=\frac{dy}{dx}.$$

設若 θ 及 ϕ 爲餘角時,此角之正切等於彼角之餘切.

是以 $\dfrac{dy}{dx}=\tan\phi=\cot\theta=\dfrac{x}{y},$

$$ydy-xdx=0,$$

$$y^2-x^2=c.$$

曲線既然通過 $(1, 2)$ 點,此點之坐標必適合於此方程式.所以 $c=3$, 而曲線之方程式爲