全国奥数领队担纲　奥赛金牌教练主笔

奥数讲义

AOSHE JIANGYI

高二年级下

◆ 主编 朱华伟

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

全国奥数领队担纲　奥赛金牌教练主笔

★ 奥数讲义　（高一年级上、下）

★ 奥数讲义　（高二年级上、下）

★ 奥数讲义　（高三年级上、下）

ISBN 978-7-308-05529-1

9 787308 055291 >

定价：19.00 元

奥数讲义

高二年级下

主编　朱华伟

编著　朱华伟　符开广　范端喜

张　雷　蒋太煌

浙江大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

奥数讲义．高二年级．下/朱华伟主编．—杭州：浙江大学出版社，2007.10
ISBN 978-7-308-05529-1

Ⅰ．奥…　Ⅱ．朱…　Ⅲ．数学课—高中—教学参考资料　Ⅳ．G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 137321 号

奥数讲义(高二年级下)

主　　编　朱华伟

责任编辑　杨晓鸣　包善贤(特邀)
封面设计　刘依群
出版发行　浙江大学出版社
　　　　　(杭州天目山路 148 号　邮政编码 310028)
　　　　　(E-mail：zupress@mail.hz.zj.cn)
　　　　　(网址：http://www.zjupress.com)
排　　版　杭州大漠照排印刷有限公司
印　　刷　杭州杭新印务有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16
印　　张　14.5
印　　数　00001—10000
字　　数　400 千
版 印 次　2007 年 10 月第 1 版　2007 年 10 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-308-05529-1
定　　价　19.00 元

浙江大学出版社发行部邮购电话(0571)88072522

前　　言

数学被誉为科学的皇后。在人类文明的历史进程中，中华民族对数学的发展曾作出过卓越的贡献。勾股定理、祖冲之圆周率、九章算术等丰硕成果无不闪烁耀眼的光芒。新中国成立以后，中国的现代数学有了长足的发展，先后涌现出华罗庚、陈景润等一批著名数学家。数学大师陈省身教授曾预言："21世纪，中国必将成为数学大国。"从1985年我国第一次派队参加国际数学奥林匹克以来，中国代表队共122人参赛，取得92块金牌、23块银牌、5块铜牌，13次团体总分第一的好成绩。中学生在国际数学奥林匹克中的出色表现，使人们相信陈省身教授的这一"猜想"将在本世纪得到证明。

由于计算机的出现，数学已不仅是一门科学，还是一种普适性的技术。从航空到家庭，从宇宙到原子，从大型工程到工商管理，无一不受惠于数学技术。高科学技术本质上是一种数学技术。美国科学院院士格里姆(J. Glimm)说："数学对经济竞争力至为重要，数学是一种关键的普遍使用的，并授予人能力的技术。"时至今日，数学已兼有科学与技术两种品质，这是其他学科少有的。数学对国家的贡献不仅在于富国，而且还在于强民。数学给予人们的不仅是知识，更重要的是能力，这种能力包括观察实验、收集信息、归纳类比、直觉判断、逻辑推理、建立模型和精确计算。这些能力的培养，将使人终身受益。这些能力的培养，必须从小抓起，从青少年抓起。而数学奥林匹克活动，则是培养这些能力的良好载体。

基于这样的想法，我们以国内外高中数学奥林匹克为背景，以《全日制高中数学课程标准》的新理念、新要求为准绳，兼顾"大纲"与"新课标"的过渡，根据多年培训数学奥林匹克选手的经验和体会，编写这套《奥数讲义》。通过这套讲义的学习，使学生发现数学的美丽和魅力，体会数学的思想和方法，感受数学的智慧和创造力，体验经过不懈的探索而获得成功的兴奋和快乐，进而激发学习数学的兴趣。她既为学有余力且对数学感兴趣的高中生提供一个施展才华和提高数学解题能力的有效指导，也为参加数学奥林匹克的高中生提供一套科学实用的培训教程。

本丛书设计新颖，方便老师、学生和家长使用，分高一、二、三年级上册，和高一、二、三年级下册，共六册。

每册内容包括专题讲座篇、同步测试篇、全真测试篇。专题讲座篇的专题以讲义的形式编写，每讲的主要栏目有：

数学名言欣赏：以名人名言开宗名义，开始每讲的奥数学习之旅。

知识方法扫描：补充竞赛方面的相关知识、方法与技巧，突出重点、难点和赛点。

经典例题解析：在保留部分经典好题、经典解法的同时，尽可能选用一些国际国内竞赛的新题（不一定是难题），如近3～5年高考、高中数学联赛、女子竞赛、西部竞赛、美国数学邀请赛、美国数学奥林匹克试题等，每道赛题注明竞赛年份，给出一些新颖的解答方法，减少跟其他同类书籍的雷同率，增强读者的阅读欲望。例题总个数控制在8道，由基础题（2道高考难度的试题）、提高题（4道一试难度的试题）、综合题（2道二试难度的试题）组成。

原版赛题传真：含英文试题与英文解答，针对试题与解答中的生词给出“英汉小词典”。

同步训练：含3道选择题、4道填空题、3道解答题（不便于采用客观题形式的专题，安排6道解答题作为同步训练题），均给出详细解答过程。

在“同步测试篇”中，与“专题讲座篇”中的专题对应设置测试卷。在“全真测试篇”中，精选了国内外最新高中数学奥林匹克试卷若干套。全书后附有“同步训练题、同步测试题、全真测试题”题目的详解。

问题是数学的心脏，数学奥林匹克是解题的竞赛。要提高解题能力，必须进行一定量的训练。本丛书精选了具有代表性的经典例题，配备了足够的训练题和测试题。在这些题目中既有传统的名题，又有国内外近几年涌现的佳题，还有作者根据自己的教学实践编撰的新题。设置这些题目时，作者专门针对学生学习的实际，突出知识的重点、难点，以期达到提高的目的。

本丛书注重数学基础知识的巩固提高和数学思想的渗透，凸现科学精神和人文精神的融合，加强对学生学习兴趣、创新精神、实践能力、应用意识和分析、解决问题能力的培养。

数学大师陈省身教授为2002年8月在北京举行的第24届国际数学家大会题词：“数学好玩”。我们深信本丛书让你品味到数学的无穷乐趣。著名数学家陈景润说得好：“数学的世界是变换无穷的世界，其中的乐趣只有那些坚持不懈的人才能体会得到！”

广州大学　朱华伟

2007—5—10

目录 contents

专题讲座篇

同步测试篇

全真测试篇

专题讲座篇

第1讲　空间的角和距离

一个学生不熟悉某个具体几何事实，他的损失并不大；如果未能掌握几何证明，他就丧失了获得严格论证训练的良机.

——G. 波利亚

知识方法扫描

1. 空间的角

空间的角主要涉及如下几个角的概念：两条直线所成的角、直线与平面所成的角、二面角.

求两条异面直线所成的角没有太多的技巧，主要方法是把异面直线平行移动转化为相交直线所成的角或者通过向量法来计算.

求直线与平面的夹角主要是过线上一点作平面的垂线，然后在直角三角形中计算.

求二面角是高考和竞赛中极为常见的题型，主要方法有：

(1) 根据二面角的定义做出二面角的平面角后进行计算.

(2) 射影面积法.

在二面角的一个半平面上的任意多边形的面积 S 与这个二面角 α 的余弦的绝对值之积，等于这个多边形在此二面角的另一个半平面上的射影多边形的面积 S'，即 $S'=S\cos\alpha$

(3) 向量法.

(4) 利用异面直线上两点间的距离公式.

AB 是异面直线 l_1，l_2 的公垂线段(A 在 l_1 上，B 在 l_2 上)，E，F 分别是 l_1，l_2 上的点，设 $AB=d$，$AE=m$，$BF=n$，l_1 与 l_2 所成的角为 $\theta(0°<\theta\leqslant 90°)$，则

$$EF^2=m^2+n^2+d^2\pm 2mn\cos\theta$$

当 $\langle\overrightarrow{AE},\overrightarrow{BF}\rangle=\theta$ 时，式中取“—”号；当 $\langle\overrightarrow{AE},\overrightarrow{BF}\rangle=\pi-\theta$ 时，式中取“+”号.

2. 空间的距离

空间的距离主要包括点到直线的距离、两条异面直线间的距离、点到平面的距离、直线与平面(直线和平面平行)的距离、两平行平面间的距离，其中以线线距离和点面距离，即异面直线间的距离和平面外一点到该平面的距离最为常见.

求异面直线间的距离主要方法有：

(1) 先作出两条异面直线的公垂线段，再解直角三角形.

(2) 向量法.

(3) 转化为线面距或转化为点面距.

求点面距的主要方法有：

(1) 先作出点到平面的垂线段，再解直角三角形计算.

(2) 体积法.

四面体 $ABCD$ 中，点 A 到平面 BCD 的距离为 h，$\triangle BCD$ 和 $\triangle ACD$ 的面积分别为 $S_{\triangle BCD}$ 和 $S_{\triangle ACD}$，则点 B 到平面 ACD 的距离 $d=\dfrac{3V_{四面体ABCD}}{S_{\triangle ACD}}=\dfrac{S_{\triangle BCD}\cdot h}{S_{\triangle ACD}}$

3. 三面角

由有公共顶点并且不在同一平面上的三条射线，以及相邻两射线间的平面部分所组成的图形，叫做三面角. 由公共顶点 S，三条射线 SA，SB，SC 组成的三面角记为三面角 $S-ABC$，$\angle ASB$，$\angle BSC$，$\angle CSA$ 分别称为三面角的三个面角.

三面角具有以下一些与三角形类似的性质：

(1) 三面角的任意两个面角的和大于第三个面角；任意两个面角的差小于第三个面角.

(2) 三面角的三个面角之和小于 2π.

(3) 在三面角 $S-ABC$ 中，记三个面角分别为 $\angle BSC=\alpha$，$\angle CSA=\beta$，$\angle ASB=\gamma$，三个二面角 $C-SA-B$，$A-SB-C$，$B-SC-A$ 的大小分别为 A，B，C，则有

正弦定理 $\dfrac{\sin\alpha}{\sin A}=\dfrac{\sin\beta}{\sin B}=\dfrac{\sin\gamma}{\sin C}$

第一余弦定理

$\cos\alpha=\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma\cos A$，$\cos\beta=\cos\gamma\cos\alpha+\sin\gamma\sin\alpha\cos B$，$\cos\gamma=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\cos C$

第二余弦定理

$\cos A=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos\alpha$，$\cos B=-\cos C\cos A+\sin C\sin A\cos\beta$，$\cos C=-\cos A\cos B+\sin A\sin B\cos\gamma$

经典例题解析

例1 见图 1-1，将一副三角板拼接后，再使三角板 BCD 沿 BC 竖起来，使两块三角板所在的平面互相垂直，求异面直线 AD 和 BC 所成角.

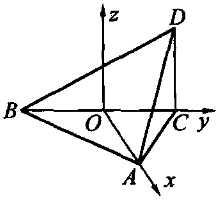


图 1-1

解 我们有 $\angle BAC=\angle BCD=90°$，$\angle CBA=45°$ 及 $\angle BDC=60°$

以 BC 中点 O 为原点，建立空间直角坐标系，令 $OC=1$

则点 $C(0,1,0)$，点 $A(1,0,0)$，点 $D\left(0,1,\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$

所以 $\overrightarrow{AD}=\left(0,1,\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)-(1,0,0)=\left(-1,1,\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{OC}=1$

所以 $\cos\langle\overrightarrow{AD},\overrightarrow{OC}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{AD}|\cdot|\overrightarrow{OC}|}=\dfrac{1}{\sqrt{(-1)^2+1^2+\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^2}}=\sqrt{\dfrac{3}{10}}$

故异面直线 AD 和 BC 所成角为 $\arccos\sqrt{\dfrac{3}{10}}$

评注 用向量法来解题，过程是“机械化”的；而用纯几何方法来解题，则需要较多的思

考，添置适当的辅助线．两者的差别如同解析几何与纯几何，或者列方程解应用题与算术解法．从培养逻辑推理能力和空间想象能力的角度来考虑，我们要有意识地应用纯几何方法完成力所能及的问题．

可以证明，四面体 $ABCD$ 相对的两条棱 AD 和 BC 所成角的余弦值为

$$\frac{|(AB^2+CD^2)-(AC^2+BD^2)|}{2AD\cdot BC}$$

例2 从 O 点引三条射线 OA，OB，OC，其两两之间的夹角分别是 $60°$，$90°$，$120°$，则这三个角的角平分线两两之间的夹角的最小值是多少？

解 见图 1-2，不妨设 OA 与 OB 夹角为 $60°$，OB 与 OC 夹角为 $120°$，OC 与 OA 夹角为 $90°$，在 OA，OB，OC 上分别取点 A'，B'，C'，使得 $OA'=OB'=OC'=1$.

作 $\angle AOB$，$\angle BOC$，$\angle COA$ 的角平分线分别交 $A'B'$，$B'C'$，$C'A'$ 于 D，E，F，则 $OD\perp A'B'$，$OE\perp B'C'$，$OF\perp C'A'$，且 D，E，F 分别是 $A'B'$，$B'C'$，$C'A'$ 的中点.

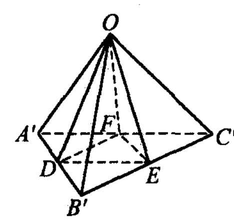


图 1-2

正 $\triangle OA'B'$ 中，$A'B'=1$

等腰 $\mathrm{Rt}\triangle OA'C'$ 中，$A'C'=\sqrt{2}$

$\triangle OB'C'$ 中，由余弦定理得

$$B'C'=\sqrt{1^2+1^2-2\times1^2\times\cos120°}=\sqrt{3}$$

又 $OD=1\cdot\sin60°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$OE=1\cdot\sin30°=\dfrac{1}{2}$，$OF=\dfrac{A'C'}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

且 $DE=\dfrac{A'C'}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$EF=\dfrac{A'B'}{2}=\dfrac{1}{2}$，$DF=\dfrac{B'C'}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

所以 $\cos\angle DOE=\dfrac{OD^2+OE^2-DE^2}{2OD\cdot OE}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\cos\angle EOF=\dfrac{OE^2+OF^2-EF^2}{2OE\cdot OF}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$\cos\angle FOD=\frac{OF^2+OD^2-DF^2}{2OF\cdot OD}=\frac{\sqrt{6}}{6}$$

因为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\max\left\{\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right\}$

所以 $\angle EOF=\min\{\angle DOE,\angle EOF,\angle FOD\}$

所以这三个角的角平分线两两之间夹角最小值为 $\angle EOF=45°$.

评注 在空间中共点 O 的三条射线上，分别截取 $OA'=OB'=OC'$ 等于单位长度，构造一个三棱锥，将空间中的角与距离置于既可定性又可定量的三棱锥中，进而分解到各个三角形中，转化为平面几何问题，利用解直角三角形、正弦定理、余弦定理等知识进行计算，这是解决立体几何问题的基本思想方法.

例3 已知边长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，AC_1 是对角线．M，N 分别是 BB_1，B_1C_1 的中点，P 是线段 MN 的中点．求异面直线 DP 与 AC_1 的距离.

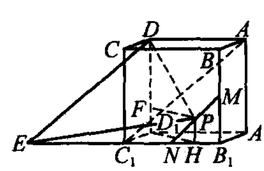


图 1-3

解 如图 1-3，在平面 AB_1C_1D 中，过 D 作 AC_1 的平行线交 B_1C_1 延长线于 E，则 AC_1∥面 DPE.

所以 DP 与 AC_1 间的距离即为 AC_1 到平面 DPE 的距离，亦即三棱锥 C_1-DEP 的高，设为 d.

由 $V_{C_1-DEP}=V_{D-C_1EP}$,

得 $\frac{1}{3}\cdot d\cdot S_{\triangle DEP}=\frac{1}{3}\cdot DC\cdot S_{\triangle C_1EP}$ ①

而 $S_{\triangle C_1EP}=\frac{1}{2}\cdot C_1E\cdot PH=\frac{1}{8}$ ②

由 $DE=\sqrt{3}$, $PE=\sqrt{HE^2+PH^2}=\frac{5}{4}\sqrt{2}$

$DP=\sqrt{PF^2+DF^2}=\frac{\sqrt{34}}{4}$

根据海伦公式得 $S_{\triangle DEP}=\frac{\sqrt{86}}{8}$ ③

综合①②③得 $d=\frac{DC\cdot S_{\triangle C_1EP}}{S_{\triangle DEP}}=\frac{\sqrt{86}}{86}$

故异面直线 DP 与 AC_1 的距离为$\frac{\sqrt{86}}{86}$

评注 利用体积方法求异面直线间的距离,是一种很有效的方法.一般来说,先将异面直线间的距离转化为直线与平面(相互平行)间的距离,再转化为点面距离,把有关几何量集中在一个四面体中,然后有目的地进行推算.

例4 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为1,在 A_1B 上取一点 M 使得 $A_1M=\frac{1}{3}A_1B$,在 B_1D_1 上取一点 N 使得 $B_1N=\frac{1}{3}B_1D_1$,连 MN,求证:MN 是 A_1B 与 B_1D_1 公垂线.

解 如图1-4,以点 D 为原点,直线 DA, DC, DD_1 分别为 x 轴,y 轴,z 轴建立空间直角坐标系.

易知 M 点坐标为$\frac{2}{3}(1,0,1)+\frac{1}{3}(1,1,0)=\left(1,\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$

N 点的坐标为$\frac{2}{3}(1,1,1)+\frac{1}{3}(0,0,1)=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},1\right)$

所以 $\overrightarrow{MN}=\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$

而 $\overrightarrow{A_1B}=(1,1,0)-(1,0,1)=(0,1,-1)$, $\overrightarrow{D_1B_1}=\overrightarrow{DB}=(1,1,0)$

所以 $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{A_1B}=\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{D_1B_1}=0$,即 MN 与 A_1B, D_1B_1 都垂直.

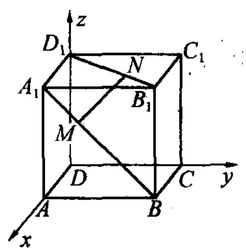


图1-4

评注 建立适当的空间直角坐标系,若相关点的坐标不难得到,则用向量法证明两条直线垂直是件非常容易的事情,且易知 $|\overrightarrow{MN}|=\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 为异面直线 A_1B 与 B_1D_1 间的距离.

事实上,本题有另外一种纯几何证法:在 A_1B_1 上取一点 P 使得 $A_1P=\frac{1}{3}A_1B_1$,连接 MP 和 NP,可先在正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 中证明 $NP\perp D_1B_1$、由 $MP\perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$ 知 $MP\perp D_1B_1$,从而 $D_1B_1\perp$ 平面 MNP,故 $D_1B_1\perp MN$;同理,$A_1B\perp MN$,证毕.

另外，根据三垂线定理，容易证明 $AC_1 \perp A_1B$ 且 $AC_1 \perp B_1D_1$，由 $\overrightarrow{MN}=\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ 及 $\overrightarrow{AC_1}=(0,1,1)-(1,0,0)=(-1,1,1)$，故异面直线 A_1B 与 B_1D_1 间的距离为 $d=|\overrightarrow{MN}|\cdot|\cos\langle\overrightarrow{MN},\overrightarrow{AC_1}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AC_1}|}{|\overrightarrow{AC_1}|}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. 求异面直线的距离，是立体几何一大“难题”，采用向量可以统一地处理，化艰难为平易.

在四面体 $A_1BB_1D_1$ 中，设 $\angle A_1B_1D_1=\theta_1$，$\angle B_1A_1B=\theta_2$，二面角 $B-A_1B_1-D_1$ 的大小为 α，$A_1B_1=a$，则异面直线 A_1B 与 B_1D_1 间的距离为

$$d=\frac{a\cdot\sin\alpha}{\sqrt{\sin^2\alpha+\cot^2\theta_1+\cot^2\theta_2+2\cot\theta_1\cdot\cot\theta_2\cdot\cos\alpha}}$$

例5 如图 1-5，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB\perp$ 侧面 BB_1C_1C，E 为棱 CC_1 上异于 C 和 C_1 的一点，$EA\perp EB_1$，已知 $AB=\sqrt{2}$，$BB_1=2$，$BC=1$，$\angle BCC_1=\frac{\pi}{3}$，求二面角 $A-EB_1-A_1$ 的平面角的正切值.

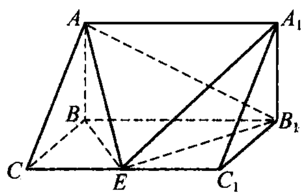


图 1-5

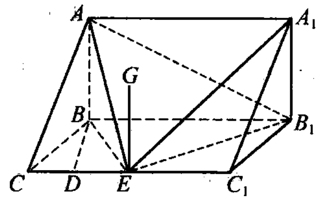


图 1-6

解 1 因 $AB\perp$ 面 BB_1C_1C，故 $AB\perp BE$

又 $EB_1\perp EA$，且 EA 在面 BCC_1B_1 内的射影为 EB

由三垂线定理的逆定理知 $EB_1\perp BE$

在平行四边形 BCC_1B_1 中，设 $EB=x$，则 $EB_1=\sqrt{4-x^2}$

如图 1-6，作 $BD\perp CC_1$，交 CC_1 于 D，则 $BD=BC\cdot\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

在 $\triangle BEB_1$ 中，由面积关系得 $\frac{1}{2}\cdot x\cdot\sqrt{4-x^2}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

解得 $x=1$ 或 $x=\sqrt{3}$

若 $x=\sqrt{3}$，在 $\triangle BCE$ 中，$CE^2+1^2-2CE\cdot\cos\frac{\pi}{3}=3$，解得 $CE=2$

此时 E 与 C_1 重合，不合题意，舍去，从而 $x=1$，$EB=1$

过 E 作 $EG \underline{\parallel} B_1A_1$，则 $EG\perp$ 面 BCC_1B_1

故 $GE\perp EB_1$ 且 GE 在平面 A_1B_1E 内，

又由已知 $AE\perp EB_1$，故 $\angle AEG$ 是二面角 $A-EB_1-A_1$ 的平面角.

因 $EG\parallel B_1A_1\parallel BA$，$\angle AEG=\angle BAE$，故 $\tan\angle AEG=\frac{BE}{AB}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

解 2 如图 1-7，以 B 为原点，$\overrightarrow{BB_1}$，$\overrightarrow{BA}$ 分别为 y 轴，z 轴建立空间直角坐标系，

则 $B(0,0,0)$，$A(0,0,\sqrt{2})$，$B_1(0,2,0)$，$C\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},0\right)$，$C_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},0\right)$

设 $E\left(\frac{\sqrt{3}}{2},a,0\right)$，由 $EA\perp EB_1$ 得 $\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EB_1}=0$

即 $0=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-a,\sqrt{2}\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},2-a,0\right)$

$=\frac{3}{4}+a(a-2)$

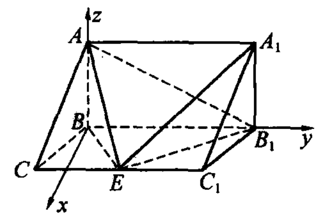


图 1－7

解得 $a=\frac{1}{2}$ 或 $a=\frac{3}{2}$（舍去），故 $E\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right)$

由已知有 $\overrightarrow{EA}\perp\overrightarrow{EB_1}$，$\overrightarrow{B_1A_1}\perp\overrightarrow{EB_1}$

故　二面角 $A-EB_1-A_1$ 的平面角 θ 的大小为向量 $\overrightarrow{B_1A_1}$ 与 $\overrightarrow{EA}$ 的夹角.

因为 $\overrightarrow{B_1A_1}=\overrightarrow{BA}=(0,0,\sqrt{2})$，$\overrightarrow{EA}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},\sqrt{2}\right)$

所以 $\cos\langle\overrightarrow{EA},\overrightarrow{B_1A_1}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{B_1A_1}}{|\overrightarrow{EA}|\cdot|\overrightarrow{B_1A_1}|}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

故　$\tan\langle\overrightarrow{EA},\overrightarrow{B_1A_1}\rangle=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 为所求.

评注　关于空间角与距离的计算，一定要熟悉有关定义. 在本题解 2 中，将二面角 $A-EB_1-A_1$ 的平面角的大小转化为向量 $\overrightarrow{B_1A_1}$ 与 $\overrightarrow{EA}$ 的夹角，实际上是对二面角的平面角定义的灵活应用. 同时，解法 1 中关于 θ 的计算也可以通过第一余弦定理

$$\cos\theta=\frac{\cos\angle A_1B_1A-\cos\angle A_1B_1E\cdot\cos\angle AB_1E}{\sin\angle A_1B_1E\cdot\sin\angle AB_1E}\text{（其中 }\angle A_1B_1E=90^\circ\text{）}$$

来完成，运算量并不大.

解法 2 中关于 $\cos\langle\overrightarrow{EA},\overrightarrow{B_1A_1}\rangle$ 的计算还可以通过式子

$$\cos\langle\overrightarrow{EA},\overrightarrow{B_1A_1}\rangle=\frac{|\overrightarrow{EA}|^2+|\overrightarrow{B_1A_1}|^2+|\overrightarrow{EB_1}|^2-|\overrightarrow{AA_1}|^2}{2|\overrightarrow{EA}|\cdot|\overrightarrow{B_1A_1}|}$$

来完成，运算量也不大.

例6　如图 1－8，正四棱锥 $S-ABCD$ 中，所有棱长都是 2. 已知点 P 为 SA 的中点，点 Q 在棱 SC 上，问直线 BQ 与 PD 能否垂直？请说明理由.

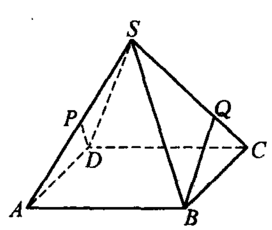


图 1－8

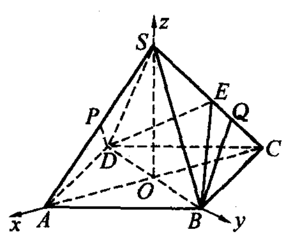


图 1－9

解 1　如图 1－9，设 AC 与 BD 交于点 O，

以 OA，OB，OS 分别为 x 轴，y 轴，z 轴，建立空间直角坐标系，

设 $CQ=m,m\in[0,2]$，可得　$B(0,\sqrt{2},0)$，$D(0,-\sqrt{2},0)$

$P\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$Q\left(\frac{\sqrt{2}}{2}m-\sqrt{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}m\right)$

所以$\overrightarrow{DP}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$\overrightarrow{BQ}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}m-\sqrt{2},-\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2}m\right)$

所以$\overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{BQ}=m-3$

因为 $m\in[0,2]$，所以$\overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{BQ}\neq0$，故 BQ 与 PD 不可能垂直.

解 2　如图 1-10，在已知正四棱锥的右侧补上一个完全相同的正四棱锥 $S'-A'BCD'$，使得它们的底面同在平面 $ABCD$ 上.

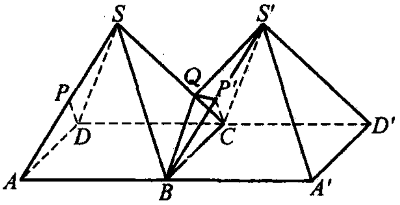


图 1-10

取 $S'B$ 中点 P'，连结 CP'，QP'，$S'Q$，所以 $CP'/\!/DP$

要使 $DP\perp BQ$，只需使 $CP'\perp BQ$

因为$CQ=CQ$，$CB=CS'$

$\angle BCQ=\angle QCS'=60°$

所以$\triangle BCQ\cong\triangle S'CQ$，故 $S'Q=BQ$

且 P'为 $S'B$ 的中点，所以 $QP'\perp S'B$

设 $CQ=x(0\leqslant x\leqslant2)$，则 $CP'=DP=\sqrt{3}$

在$\triangle BCQ$ 中，由余弦定理得　$BQ^2=2^2+x^2-2\cdot2\cdot x\cdot\cos60°$

所以　$P'Q^2=BQ^2-P'B^2=x^2-2x+3$

在等腰$\triangle BCS'$中，$CP'\perp S'B$，要使 $CP'\perp BQ$，只需使 $CP'\perp$面 $S'BQ$，即需使 $CP'\perp P'Q$

在 $\mathrm{Rt}\triangle CP'Q$ 中，$CQ^2=P'Q^2+P'C^2$，即　$x^2=x^2-2x+3+(\sqrt{3})^2$

解得　$x=3$，与 $0\leqslant x\leqslant2$ 矛盾，

故　BQ 与 PD 不可能垂直.

例7　正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，求平面 AB_1D_1 与平面 A_1BD 所成的锐角二面角的大小.

解　如图 1-11，设正方体边长为 1.

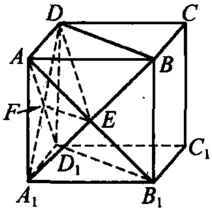


图 1-11

连结 A_1B 交 AB_1 于点 E，连结 A_1D 交 AD_1 于点 F，

易知　$AF=AE=EF=\frac{\sqrt{2}}{2}$，从而 $\angle AEF=60°$

在正三角形 A_1BD 中，$\angle DEF=30°$，$DE=\frac{\sqrt{3}}{2}A_1B=\frac{\sqrt{6}}{2}$

所以　$\cos\angle AED=\frac{AE^2+DE^2-AD^2}{2AE\cdot DE}=\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2-1}{2\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{6}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

设平面 AB_1D_1 与平面 A_1BD 所成的锐角二面角为 θ，则由三面角的第一余弦定理知

$$\cos\theta=\frac{\cos\angle AED-\cos\angle AEF\cos\angle DEF}{\sin\angle AEF\sin\angle DEF}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{3}$$

从而平面 AB_1D_1 与平面 A_1BD 所成的锐角二面角为 $\arccos\frac{1}{3}$.

评注 本题可根据二面角的平面角定义，作出二面角的平面角，然后解三角形求解. 但利用第一余弦定理则不需添置恰当的辅助线，解题过程是“机械化”的，不需要更多的思考. 事实上，本题也可用三面角的正弦定理求解.

例8 在一个锐角二面角内有一个与其两个半平面都相切的球，分别在球面和二面角的两个半平面上各求一点 A, B, C，使得$\triangle ABC$ 的周长(记为 $l_{\triangle ABC}$)最短.

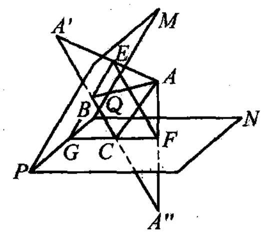


图 1-12

解 如图 1-12，设锐角二面角 $M-PQ-N$ 的平面角大小为 $\alpha(0°<\alpha<90°)$.

(1) 首先，对于二面角内任意一点 A(暂不考虑 A 是否在球面上)，欲分别在两个半平面内找出两点 B, C，使得 $\triangle ABC$ 的周长最短.

设 A 关于平面 M 的对称点为 A'，关于平面 N 的对称点为 A''.

连接 $A'A''$，分别交平面 M, N 于 B, C，则 $\triangle ABC$ 的周长最短，

这是因为 $\quad l_{\triangle ABC}=AB+BC+CA=A'B+BC+CA''=A'A''$

对于不全在直线 $A'A''$ 上的任意两点 B_1, C_1

根据两点之间的距离直线段最短，有 $l_{\triangle AB_1C_1}=A'B_1+B_1C_1+C_1A''>A'A''=l_{\triangle ABC}$

(2) 任取球面上一点 A，设 AA' 交平面 M 于点 E，AA'' 交平面 N 于点 F.

因为 $PQ\perp AE$，$PQ\perp AF$，所以 $PQ\perp$ 平面 AEF，设垂足为 G，则 $\angle EGF=\alpha$，且 $AG\perp PQ$

由于 A, E, G, F 四点共圆，AG 为直径，所以

$$EF=AG\sin\alpha \text{ 且 } l_{\triangle ABC}=A'A''=2EF=2AG\sin\alpha$$

当 AG 最小时，$l_{\triangle ABC}$ 取得最小值，即 A 到 PQ 的距离最短时，得到的 $\triangle ABC$ 的周长最短.

综上，满足题设的三点 A, B, C 的作法如下：

由球心 O 向 PQ 作垂线交球面于点 A，则球面上 A 点到 PQ 的距离最短，再由(1)利用对称方法得到 B, C，$\triangle ABC$ 即为所求.

评注 求解距离之和的最小值时，利用点对称进行等距转化是非常有效的. 如已知平面上一条定直线 l 和两个定点 A, B，在 l 上求一点 P，使 A, B 两点到 P 点的距离之和最小. 当 A, B 两点在直线 l 的同侧时，作点 A 关于直线 l 的对称点 A'，连接 $A'B$ 交直线 l 于点 P_0，则 $P_0A+P_0B=P_0A'+P_0B\leqslant PA+PB$，故点 P_0 为所求. 将这个问题推广到空间，即为本题的实质所在.

原版赛题传真

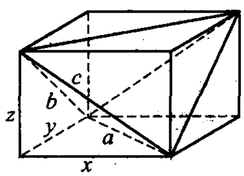
Problem

Express the volume of an isosceles tetrahedron in terms of its edges.

Solution

Inscribe the tetrahedron in a parallelepiped as in Figure. If x, y, z are the edges of the parallelepiped, and a, b, c are the edges of the tetrahedron, then since the parallelepiped is right, the Pythagorean theorem gives

$$\begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ y^2+z^2=b^2 \\ z^2+x^2=c^2 \end{cases}$$



This implies

$$x=\sqrt{\frac{a^2+b^2-c^2}{2}},\ y=\sqrt{\frac{c^2+a^2-b^2}{2}},\ z=\sqrt{\frac{b^2+c^2-a^2}{2}}$$

The volume of the parallelepiped is x, y, z, and the volume of the tetrahedron is one-third of that; this is to $\frac{1}{6\sqrt{2}}\sqrt{(a^2+b^2-c^2)(c^2+a^2-b^2)(b^2+c^2-a^2)}$

英汉小词典

isosceles [ai'sɔsili:z]　二等边的,等腰的

tetrahedron ['tetrə'hedrən]　四面体

parallelepiped [pærəle'lepiped]　平行六面体

edge [edʒ]　棱

Pythagorean theorem　毕氏定理,勾股定理

同步训练

一、选择题

1. 给定下列两个关于异面直线的命题:

命题Ⅰ: 若平面 α 上的直线 a 与平面 β 上的直线 b 互为异面直线,直线 c 是 α 与 β 的交线,那么 c 至多与 a, b 中的一条相交;

命题Ⅱ: 不存在这样的无穷多条直线,它们中的任意两条都互为异面直线.那么　(　　)

A. 命题Ⅰ正确,命题Ⅱ不正确　　B. 命题Ⅱ正确,命题Ⅰ不正确

C. 两个命题都正确　　D. 两个命题都不正确

2. 设 E, F, G 分别是正四面体 $ABCD$ 的棱 AB, BC, CD 的中点,则二面角 $C-FG-E$ 的大小是　(　　)

A. $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}$　　B. $\frac{\pi}{2}+\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{\pi}{2}-\arctan\sqrt{2}$　　D. $\pi-\arctan\frac{\sqrt{2}}{2}$

3. 在正四面体 $ABCD$ 中,$AC=1$,M 为 AC 中点,N 为 $\triangle BCD$ 的中心,$DE\perp AB$,垂足为 E,则异面直线 MN 与 DE 所成的角为　(　　)

A. $90°$　　B. $\arccos\frac{5}{6\sqrt{3}}$　　C. $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$　　D. $\arccos\frac{5}{6}$

二、填空题

4. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1,则直线 A_1C_1 与 BD_1 的距离是________.

5. 将给定的两个全等的正三棱锥的底面重叠后粘在一起,恰好得到一个所有二面角都