高等学校教材

高等数学教程（上册）

Advanced Mathematics

北京理工大学
毛京中 编

高等教育出版社

高等学校教材

高等数学教程

（上　　册）

北京理工大学
毛京中　编

高等教育出版社

内容提要

本教材汲取了当前教学改革与教学研究的最新成果，针对理工科大学非数学类专业对基础数学的基本要求，借鉴国内外同类教材的精华编写而成，分为上、下两册出版。主要内容包括一元函数微积分，常微分方程，空间解析几何，多元函数微积分，无穷级数等。

本教材对教学内容优化组合，注重对基本概念、基本定理和重要公式的实际背景、产生过程及有关人物的介绍，注重对微积分基本思想和方法的分析阐述，突出实际应用。本教材结构严谨，逻辑清晰，浅显易懂。

本书可作为高等院校非数学类理工科各专业学生使用，也可供工程技术人员学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学教程．上册/毛京中编．—北京：高等教育出版社，2008.5

ISBN 978-7-04-023603-3

Ⅰ．高…　Ⅱ．毛…　Ⅲ．高等数学-高等学校-教材　Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 040925 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
			http://www.landraco.com.cn
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
印　　刷	高等教育出版社印刷厂		
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2008 年 5 月第 1 版
印　　张	29.75	印　　次	2008 年 5 月第 1 次印刷
字　　数	560 000	定　　价	33.90 元

物料号　23603-00

策划编辑　宋瑞才

责任编辑　李　陶

封面设计　张申申

责任绘图　黄建英

版式设计　陆瑞红

责任校对　张　颖

责任印制　宋克学

前　言

本书是为高等学校工科本科生编写的教材，内容的深度和广度与教育部数学与统计学教学指导委员会最新修订的《工科类本科数学基础课程教学基本要求》大体相当。全书分为上下两册。上册内容为一元函数微积分和常微分方程，下册内容为空间解析几何，多元函数微积分及无穷级数。

在多年从事工科高等数学教学工作中，对学生的学习情况，所遇到的困难和问题都有一些了解，也积累了一些数学教学经验及体会。编写本书的目的是想为学生提供一本易于读懂的高等数学教材，以提高学生的学习兴趣，减少学习中的困难，并能使学生学到一些有益的思想方法。在编写过程中吸收了一些国内外相关教材的优点，并将自己的教学经验及体会融入其中，突出了以下几点：

1. 注意对基本概念，基本定理和重要公式的实际背景、产生过程及有关人物的介绍，并在绪论中对微积分的酝酿、创立、深入发展以及严格化几个重要阶段做了简要介绍，使学生在掌握数学知识的同时了解一些相关史料。

2. 注重对微积分基本思想和方法的分析阐述，在给出数学定理或例题的解答前，首先给出很多思维方法和分析过程，有利于学生思维发展和解题能力的训练。

3. 重视并突出实际应用，除引入有关概念时尽可能给出较多的实际背景外，还配有很多实际应用的例题和习题，有助于培养学生的应用意识和数学建模能力。

4. 内容充实，例题与习题的数量及类型很丰富，涵盖的解题方法多但不过分追求技巧。为提高学生综合解决问题的能力，在每一章的后面编写了一节综合例题，其中包括一些近年来的考研试题，这节可作为习题课的教学内容，对数学要求不是很高的学校或专业可酌情选择学习这一节。

5. 在注意结构严谨,逻辑清晰的同时,增强可读性,在内容的叙述上深入浅出,化难为简,避免过于正统的文风,尽可能用流畅的叙述使每一个新内容的引入以及各章节之间的衔接自然,对有些概念的表述进行了合理的改进以使其更简洁直观易懂,并力求语言朴实生动,以提高学生的学习兴趣,消除学生学习中的畏惧感,对一些学生容易出错之处加以提示,对一些令人费解困惑的地方给予详尽叙述及解释,十分方便学生自学,也有助于教学经验不足的教师提高讲课水平。

本书编写过程中得到了陈一宏教授的支持,在此表示感谢。

由于水平有限,书中一定有错误和不妥之处,恳请读者提出批评和指正。

作　者

2007 年 7 月

目　录

绪 论

高等数学的大部分内容是微积分. 微积分是研究变量的数学,是微分学与积分学的总称.

微积分创立于 17 世纪,它是一系列数学思想历经漫长岁月演变的结果,特别是积分的思想早在古希腊已萌芽. 公元前 3 世纪,阿基米德在解决抛物线弓形的面积、球和球冠面积、螺线下面积和旋转双曲面的体积问题中就隐含着近代积分学的思想. 作为微积分基础的极限,也不止一次在各代的著作中出现. 如中国古代的刘徽割圆术、祖暅原理等都包含着朴素的极限思想.

与积分学相比而言,微分学的起源则要晚得多. 17 世纪以前,真正意义上的微积分研究的例子是很罕见的. 近代微积分的酝酿,主要是在 17 世纪上半叶. 自然科学的综合突破所面临的数学困难,使微积分的基本问题空前地成为人们关注的焦点. 确定非匀速运动物体的速度与加速度使瞬时变化率问题的研究成为当务之急,望远镜的设计使任意曲线的切线问题变得不可回避,确定炮弹的最大射程及寻求行星轨道的近日点与远日点等涉及的函数极大值、极小值问题亟待解决,与此同时,行星沿轨道运动的路程,行星矢径扫过的面积以及物体重心与引力的计算又使对积分学的基本问题(面积、体积、曲线长、重心和引力计算)的兴趣被重新激发起来. 17 世纪的许多著名数学家、天文学家、物理学家都为解决上述几类问题做了大量的研究工作,如意大利的伽利略、卡瓦列利,德国的开普勒,法国的费马、笛卡儿、帕斯卡、罗伯瓦,荷兰的惠更斯,英国的巴罗、沃利斯等都致力于寻求解决上述难题的新的数学工具,提出了不少成功的富有启发性的方法,为微积分的创立做了许多重要的准备工作,他们在 17 世纪上半叶所作的一系列前驱性的工作,沿着不同的方向向着微积分的大门逼近,但这还

不足以标志微积分作为一门独立学科的诞生. 在17世纪前三分之二的时间里,微积分的工作湮没在细节里,所用方法仍然缺乏足够的一般性. 求切线、求变化率、求极大极小值问题以及求面积、体积等基本问题在当时是被作为不同的类型处理的,虽然也有人注意到了某些联系,然而并没有人能将这些联系作为一般规律明确提出,没有在所用方法的启发下构思出真正属于微积分的概念,然而这些先驱者的工作是不容忽视的.

自觉地意识到一个伟大的发现并实际去完成它的是牛顿(Newton,1642—1727)、莱布尼茨(Leibniz,1646—1716). 数学与科学中的巨大进展,几乎总是建立在几百年中做出一点一滴贡献的许多人工作之上的,并且需要有人来走那最高和最后的一步,这个人要能足够敏锐地从前人纷乱的猜测和说明中梳理出有价值的想法,有足够想象力地把以往个别人的贡献和分散的努力重新清理组织起来,综合为统一的理论. 时代的需要与个人的才识,使英国科学家牛顿与德国的莱布尼茨完成了微积分创立中最后也是最关键的一步. 牛顿和莱布尼茨总结并发展了前人的思想,提炼了微积分的基本概念和算法,各自独立地创立了微积分. 牛顿和莱布尼茨都是他们时代的巨人. 就微积分的创立而言,牛顿主要是以运动学为背景的,而莱布尼茨首先是出于几何问题的思考,尽管在背景、方法和形式上存在差异,各有特色,他们二人的功绩是相当的. 经过他们二人的工作,微积分不再是古希腊几何的附庸和延展,而是一门独立的科学. 微积分不再是解决个别问题的特殊方法,而是能应用于许多类函数的新的普遍适用的方法. 牛顿和莱布尼茨最大的功绩是将两个貌似毫不相关的问题联系起来,一个是切线问题(微分学的中心问题),一个是求积问题(积分学的中心问题),建立了两者之间的桥梁——牛顿-莱布尼茨公式.

微积分的创立,被誉为“人类精神的最高胜利”,是人类对自然界认识的一大飞跃,是数学发展中的一个转折点. 微积分学说的完成使后来的几代人为之振奋. 18世纪的数学家们被这新兴的、有无限发展前途的学科所吸引,他们清楚地看到,微积分是一个巨大的思想宝库,只要遵循牛顿和莱布尼茨所确定的基本法则,把这些法则应用到数学和科学问题以后,就可以取得惊人的成就. 过去很多初等数学束手无策的问题运用微积分往往迎刃而解,显示出微积分的非凡威力. 18世纪是微积分进一步深入发展的时期,这种发展与广泛的应用紧密交织在一起,刺激和推动了许多数学分支的产生. 18世纪微积分最重大的进步是由欧拉(Euler)作出的,此外在18世纪推进微积分及其应用的数学家还有瑞士的伯努利(Bernoulli)兄弟,法国的克莱罗(Clairaut)、达朗贝尔(d'Alembert)、拉格朗日(lagrange)、蒙日(Monge)、拉普拉斯(Laplace)和勒让德(Legendre)等,英国数学家泰勒(Taylor)、麦克劳林(Maclaurin)也做了一些值得称道的工作. 18世纪这些数学家功不可没,正是他们的奋力开发与仔细耕耘,使得牛顿和莱布尼

茨草创的微积分成果辉煌,其内容的丰富,应用的广泛,简直令人眼花缭乱.

历史上任何一项重大理论的完成,都是经过若干年辛勤培育的结果,不可能一开始就完美无瑕. 17 世纪创立的微积分也是很不完善的,带有逻辑上的重大困难,理论基础是不牢靠的. 微积分的基础是极限理论,但牛顿、莱布尼茨的极限和无穷小的概念是十分模糊的,不严密的,这使他们的学说一开始就受到怀疑和批评. 尽管微积分创立初期有一些逻辑上的缺陷,但它在应用方面的胜利,足以使人们信服,连攻击它的人也不得不在事实面前低头.

随着微积分的概念与技巧的扩展,人们努力去补充被遗漏的基础,18 世纪的几乎每个数学家都对微积分的逻辑做了一些努力,他们努力探索使微积分严格化的途径. 另一方面,应用微积分所取得的辉煌成果又使得大部分数学家往往不顾基础问题的困难而大胆前进,因而遭受种种非难,出现了混乱局面. 直到 19 世纪前,微积分的严密化一直未完成. 但十八世纪的欧拉、拉格朗日、达朗贝尔的观点为微积分的严格表述提供了合理内核.

经过近一个世纪的尝试和酝酿,数学家们的努力到 19 世纪开始获得成效. 严密的微积分是从波尔察诺(Bolzano)、柯西(Cauchy)、阿贝尔(Abel)和狄利克雷(Dirichlet)的工作开始的,19 世纪微积分严格化真正有影响的先驱是法国数学家柯西,柯西的工作向全面严格化迈出了关键的一步,而魏尔斯特拉斯(Weierstrass)更是为微积分的严格化作出了重要贡献. 经过他们以及戴德金(Dedekind)、康托尔(Cantor)等数学家的努力,填补了一个又一个漏洞,终于把微积分建立于牢固的基础之上.

微积分是经过许多数学家艰苦卓绝的努力而完成的,是人类思维的伟大成果,是一种撼人心灵的智力奋斗的结晶. 微积分是与实际应用联系着发展起来的. 微积分是应用性很强的数学,在这门学科诞生时是这样,在今天依然如此. 时至今日,它在天文学、物理学、化学、生物学、工程学、经济学等自然科学、应用数学及社会科学中有越来越广泛的应用,它应用的广泛程度足以令那些当初创立这门学科的物理学家、数学家和天文学家震惊和欣慰.

微积分是各高等院校许多专业的一门重要基础课,它对培养、提高同学们的素质有着重要的作用. 它对工程技术的重要性就像望远镜之于天文学家,显微镜之于生物学家一样,而且它对思维能力的培养可以使人终身受益.

微积分是研究变量的数学,是运动的数学. 从常量到变量,从有限到无穷,从研究规则的几何形体到研究不规则的几何形体,是数学发展中一个转折点,也是初等数学过渡到高等数学的关键. 初等数学与高等数学不但研究对象不同,而且研究方法也大不同. 初等数学主要采用形式逻辑的方法,孤立地、静止地、一个一个问题进行研究,而微积分则是用极限的方法,普遍地解决问题. 微积分的内容很丰富,它呈现出概念更复杂,理论性更强,表达形式更加抽象的特点.

学这门课时，应当认真和深入钻研教材的内容，要透过抽象的表达方式，深刻理解基本概念和理论的内涵与实质以及它们之间的内在联系，正确领会一些重要的数学思想方法，培养抽象思维与逻辑推理能力，掌握基本运算方法，而且应当逐步养成自己综合运用所学的数学知识解决实际问题的意识和兴趣，培养建立实际问题的数学模型，运用数学方法解决实际模型的能力．在学习中提倡独立钻研，勤于思考，敢于大胆提出问题，善于讨论和研究，不畏艰难，培养自己的勇气和创造性思维能力．另外，要根据自己个人的特点，把握好学习中的几个环节，即预习、听课、记笔记、复习、做作业．通过不懈的努力与付出，在这门课的学习中取得成功．

第一章

函数、极限与连续

函数是微积分的研究对象，极限是微积分的基础，也是微积分的重要思想方法．极限使我们可以用均匀去逼近不均匀，用规则的几何量去逼近不规则的几何量，用有限去研究无穷，将近似值转化为精确值．微积分的主要概念几乎都是用极限定义的．而将函数放到微积分的中心地位，用分析方法取代几何方法，是 18 世纪微积分的一个历史性转折（这一转折首先归功于欧拉），而以往数学家们都以曲线作为微积分的主要研究对象．将函数作为主要对象具有更大的普遍性．本章主要讨论函数、极限与连续的概念，极限与连续的性质，极限的计算方法．

第一节　函　　数

一、函数概念

1．函数

客观世界中的数量一般可以分为两种：常量与变量．在考察过程中保持不变的量称为常量，在考察过程中会起变化的量称为变量．常量一般是暂时的、相对的，而变量是永恒的、绝对的．

在同一个问题中，往往同时出现两个或多个变量，并且它们的变化是相互关

联的,函数就是反映客观世界中量与量之间的变化关系的,函数是用数学语言描述现实世界变化规律的主要工具. 对于变量之间变化关系的认识,远在公元前三百年左右就已开始了. 函数这个名词是由德国数学家莱布尼茨于1694年提出的,但是当时却没有给这个名词下过定义,后经伯努利、欧拉、柯西以及狄利克雷等数学家给出定义,且又不断加以修改、扩充而得到如下的函数概念.

定义1 **设 X,Y 是两个非空数集,如果对每个 $x\in X$,按照某种确定的法则 f,有唯一的 $y\in Y$ 与之对应,则称 f 是 X 上的函数,或说 y 是 x 的函数,记作 $y=f(x)$. 其中 x 称为自变量,y 称为因变量,数集 X 称为函数 f 的定义域. 当 x 取遍 X 中的一切数时,相应的函数值的集合称为 f 的值域.**

y 是 x 的函数也可记作 $y=y(x)$. 当自变量 x 的值取为 $x_0\in X$ 时,函数 $y=f(x)$ 的对应值 $f(x_0)$ 称为函数值,$f(x_0)$ 也可以写成 $y\Big|_{x=x_0}$ 或 $y\Big|_{x_0}$.

在函数的定义中,我们要求对每个 $x\in X$,有唯一的 $y\in Y$ 与之对应,这样定义的函数 f 又称为**单值函数**. 例如 $y=\sin x$,$y=x^2$ 都是单值函数. 如果与 x 相应的 y 值不总是唯一的,则 y 称为 x 的**多值函数**. 以后如果不做特别说明,则所提到的函数都是指单值函数.

函数的定义中有两个要素. 一个是定义域,另一个是对应法则. 如果两个函数的定义域相同,对应法则也相同,那么这两个函数就是相同的,否则就是不同的. 例如 $y=\ln x^2$ 与 $y=2\ln x$ 是不同的函数,因为它们的定义域不相同. $y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 也是不同的函数,因为它们的对应法则不相同.

确定函数的定义域通常分两种情形. 如果函数是有实际背景的,则应根据问题的实际意义来确定它的定义域. 例如,球的体积 V 与半径 r 之间具有函数关系 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$,根据实际意义,函数的定义域,即半径的取值范围应为 $r\geqslant 0$. 如果函数是用抽象的算式表达的,而没有实际背景,则函数的定义域是使得算式有意义的一切实数组成的集合,这种定义域称为自然定义域. 例如,函数 $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的自然定义域为满足 $1-x^2>0$ 的一切 x 的集合,即开区间 $(-1,1)$.

函数的对应法则,也叫函数关系或对应律,常用三种方法表示:数值法(又称列表法),几何法(又称图形法),解析法(又称公式法). 这些内容在中学已学过,此处不再详细叙述.

2. 区间与邻域

微积分中所研究的函数,其定义域通常是由一个或若干个区间组成的. 区间分为有限区间和无穷区间.

有限区间包括:

开区间 $(a,b)=\{x|a<x<b\}$,

闭区间 $[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$,

左开右闭区间 $(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$,

左闭右开区间 $[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$.

无穷区间包括： $(a,+\infty)=\{x|x>a\}$, $[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\}$,

$(-\infty,b)=\{x|x<b\}$, $(-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\}$,

$(-\infty,+\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}$.

以上各种区间中的 a 和 b 称为区间的端点,其中 a 称为左端点,b 称为右端点,属于区间但不是端点的点称为区间的内点.

微积分的研究方法是运动的方法. 当我们研究函数在一点处的某种特性时,常常要用到函数在这一点附近某一区间的函数值. 为以后叙述方便,先定义一个概念.

我们将开区间 $(a-\delta,a+\delta)=\{x||x-a|<\delta\}(\delta>0)$ 称为点 a 的 δ 邻域,记作 $N(a,\delta)$,其中 a 叫做邻域的中心,δ 叫做邻域的半径(如图 1-1).

如果在 $N(a,\delta)$ 中去掉点 a,所得数集 $\{x|0<|x-a|<\delta\}$ 叫做 a 的去心 δ 邻域(如图 1-2).

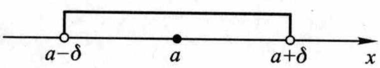

图 1-1

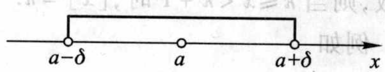

图 1-2

3. 分段函数、隐函数

在函数的定义中,并不要求在整个定义域上只能用一个表达式来表示对应规则. 在很多问题中常常会遇到这种情况,在定义域的不同区间上用不同的表达式来表示对应规则,这种函数叫做分段函数. 下面是几个分段函数的例子.

例 1 某种商品每件出厂价 90 元,成本 60 元. 厂家为鼓励销售商大量采购,决定凡是订购量超过 100 件以上的,每多订购一件,售价就降低 1 分(例如订购 300 件,订购量比 100 件多出 200 件,于是每件降价 $0.01\times200=2$(元),即销售商可以每件 88 元订购 300 件),但最低价为每件 75 元. 设 x 表示订购量,p 表示实际售价,则 p 与 x 之间的函数关系为

$$p=\begin{cases}90, & x\leqslant100,\\ 90-0.01\times(x-100), & 100<x<1\,600,\\ 75, & x\geqslant1\,600.\end{cases}$$

例 2 绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant0,\\ -x, & x<0,\end{cases}$ 其定义域为 $(-\infty,+\infty)$,值域为

$[0,+\infty)$,其图形为图 1－3.

例 3 符号函数,其定义如下

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$$

它的定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$\{-1,0,1\}$,其图形如图 1－4 所示.

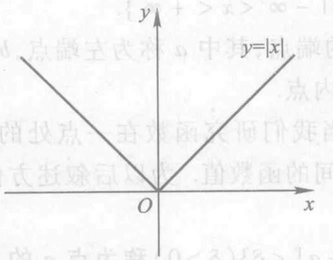

图 1－3

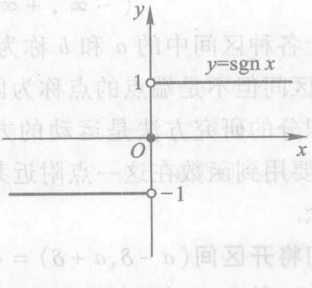

图 1－4

例 4 取整函数. 我们用符号$[x]$表示不超过 x 的最大整数,即如用 k 表示整数,则当 $k\leqslant x<k+1$ 时,$[x]=k$.

例如

$$[\sqrt{2}]=1,\qquad \left[\frac{1}{3}\right]=0,\qquad [-1.3]=-2.$$

取整函数 $y=[x]$俗称地板函数,它的定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为整数集,其图形为图 1－5.

从函数的表示形式来看,又可分为显函数和隐函数. 如果 y 是 x 的函数关系可以写成 $y=f(x)$的形式,则称其为显函数. 例如:$y=x^2$,$y=\ln x$ 都是显函数. 如果 y 与 x 之间的函数关系是用一个二元方程确定的,例如

$$3x+5y-1=0,\qquad x^2+y^2=1,$$
$$y=x\mathrm{e}^{x+y},\qquad xy+\sin\frac{y}{x}=0$$

都确定了 y 是 x 的函数,这样的函数称为隐函数.

图 1－5

实际上,显函数与隐函数并没有严格的界限,有时可以从隐函数解出显函数来. 例如,由 $3x+5y-1=0$,可以解出 $y=\dfrac{1-3x}{5}$,由 $x^2+y^2=1$,可以解出 $y=$

$\sqrt{1-x^2}$或 $y=-\sqrt{1-x^2}$. 也有些隐函数无法化成显函数. 例如,$xy+\sin\frac{y}{x}=0$ 即如此,但是 y 与 x 之间的函数关系是确实存在的. 后面有些微积分的理论与计算是专门针对隐函数的.

二、函数的几种特性

这里所讨论的是函数的一些简单性质,随着学习的深入,我们会认识函数更多的性质.

先约定一些简单的符号.

"∃"表示存在,例如,存在正数 M,可以简单写成 $\exists M>0$. "∀"表示任意,例如,任意 $x\in I$,可以简写成 $\forall x\in I$.

1. 有界性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义,如果 $\exists M>0$,使得对 $\forall x\in I$,都有 $|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界,如果这样的 M 不存在,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上无界.

例如,$y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界,因为对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$,都有 $|\sin x|\leqslant 1$.

又如,$y=\frac{1}{x}$ 在区间 $[1,2)$ 上是有界的,因为对 $\forall x\in[1,2)$,都有 $\left|\frac{1}{x}\right|\leqslant 3$. 但此函数在区间 $(0,1)$ 内是无界的,因为不论我们将正数 M 取得多么大,都 $\exists x\in(0,1)$,使得 $\left|\frac{1}{x}\right|>M$.

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义,如果 $\exists M_1$,使得对 $\forall x\in I$,都有 $f(x)\leqslant M_1$,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上有上界. 如果 $\exists M_2$,使得对 $\forall x\in I$,都有 $f(x)\geqslant M_2$,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上有下界.

例如,$y=\frac{1}{x}$ 在区间 $(-\infty,0)$ 有上界,但没有下界. $y=|x|$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 有下界,但没有上界.

几何上,函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界,表示 $\exists M>0$,使 $y=f(x)$ 在区间 I 上的图形都位于由直线 $y=M$ 与 $y=-M$ 形成的水平带形域内(如图 1-6). 而 $f(x)$ 在区间 I 上有上界,表示 $\exists M_1$,使 $y=f(x)$ 在区间 I 上的图形都位于直线 $y=M_1$ 下方(如图 1-7). $f(x)$ 在区间 I 上有下界,表示 $\exists M_2$,使 $y=f(x)$ 在区间 I 上的图形都位于直线 $y=M_2$ 上方(如图 1-8).

容易证明,$f(x)$ 在区间 I 上有界的充分必要条件是它在 I 上既有上界又有下界.