〔苏联〕M. A. 葉維格拉福夫著

阿貝尔-貢察罗夫内插問題

科学技術出版社

近代数学問題

阿貝尔-貢察罗夫内插問題

〔苏联〕M. A. 葉維格拉福夫 著

閻喜傑 譯

科学技術出版社

內容提要

本書系根据苏联技术理論書籍出版社（Гостехиздат）1954 版，M. A. ЕВГРАФОВ 著“Интерполяционная задача Абеля-гончарова”一書譯出．原書系苏联“数学科学的成就”雜志編輯部主編的近代数学問題叢書中的一种．

最近几年來，經过苏联傑出的数学家的研究，陸續發現了应用于解析函数論中的阿貝尔—貢察罗夫問題的方法，远景顯得非常廣闊．本書就这一問題的已有成果作了系統的叙述，給数学研究者提供了必要的資料．

本書供大学数学物理系高年級生、研究人員、教师作研究中的參考．

近代数学問題

阿貝尔—貢察罗夫內插問題

ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ЗАДАЧА АБЕЛЯ-ГОНЧАРОВА

原著者〔苏联〕 M. A. ЕВГРАФОВ

原出版者 Гизтех или Гостехиздат · 1954 年版

譯者 閻 喜 傑

*

科学技術出版社出版

（上海建國西路 336 弄 1 号）

上海市書刊出版業營業許可證出 079 号

上海市印刷五厂印刷 新華書店上海發行所总經售

*

統一書号：13119 · 71

开本 787×1092 耗 1/27 · 印張 4 2/27 · 字數 83 000

1957 年 2 月第 1 版

1957 年 2 月第 1 次印刷 · 印數 1–4,500

定价：(10) 0.65 元

目　錄

前　言

解析函数的內插法的目的，在本質上不同于实变函数內插法所追求的目的。阿貝尔—貢察罗夫問題是解析函的最重要和最有趣的問題之一，但从实变数函数的內插法观点來看，至少象是意料之外的裝飾。实际我們很难設想这样的問題，即在一点上只有函数值，在另一点上有它的導数值，在第三点上有二階導数值等，可是在阿貝尔—貢察罗夫問題中却正要使函数接近这样的事实。

这一仿彿奇怪的問題的重要性，可以这样說明，即解析函数的內插目的并不是已知的某些不連續数据的函数近似式，而是研究展开为適当內插数列的任意解析函数的某些要素的动态。例如牛頓数列（或更多的拉格朗日数列）对研究整函数的零分布問題就有很大的意义。就阿貝尔—貢察罗夫数列的結構本身可以看出，它应該利用在解析函数的導数連續性的研究上。

根据所有的表現看，这一目的在 C. H. 別倫什坦建議自己的学生 B.Л. 貢察罗夫从事阿貝尔数列的普遍化时就已具有。然而 B.Л. 貢察罗夫所得到的結果并未能够实現这一囑託——数列的收斂問題看來是过于难解的。

从那时直过了二十五年阿貝尔—貢察罗夫問題从未給自己取到难題的称号。关于阿貝尔—貢察罗夫数列的近似問題在函数論中已經不提了。在更近一些的工作中或者稍加改善，或者普及到 B. Л. 貢察罗夫結果的其他問題中去了。

与阿貝尔—貢察罗夫問題有关的 A.O. 蓋里封德將注意轉向了內插問題唯一性和完备性当中的某些普遍和深入的規律，后來却被 A.И. 馬尔庫舍維奇普遍化了。借助这些規律才能相当良好和完

整地估計在內插問題中应用諸方法的可能性。

A. O. 盖里封德也提出了內容恰为牛頓和阿貝尔—貢察罗夫問題的特殊情形的新內插問題，这里帶來了所求得的阿貝尔—貢察罗夫問題的大多数結果。

然而所有的这些工作对阿貝尔—貢察罗夫問題本身幷未得出任何眞正的成就，对它的兴趣也就开始了冷淡。

最近成功地發現了应用于阿貝尔—貢察罗夫問題的方法，能够解决其中提出的大多数問題，幷且这些方法的可能性远不能竭尽。这样阿貝尔—貢察罗夫数列在函数論中的应用問題就已經列入了日程。这里所揭示的远景非常廣闊，本書正是以吸收解此問題的新的力量为目的而編寫的。

第一章

內插数列余項的 B.Л. 貢察罗夫公式及其应用

§1. 問題的提法

假設我們已知解析函数 $F(z)$ 在某变域 D 內正則，$\{\lambda_n\}$ 是此变域中复数的一个任意敘列。求具有

$$Q_n^{(k)}(\lambda_k)=F^{(k)}(\lambda_k),\quad k=0,1,2,\cdots,n。\tag{1}$$

性質的 n 次多項式 $Q_n(z)$（这一多項式能一意地确定，因为等式組 (1) 中，有 $n+1$ 个决定其 $n+1$ 个系数的一次方程，并且方程組的矩陣为三角形的，因而等式組的行列式不等于 0）。內插問題的第一个就是明确 $Q_n(z)$ 向 $F(z)$ 收斂的事实。

在問題的繼續研究中，会引起很多其他往往頗饒趣味的問題，例如，建立所有的 $F^{(n)}(\lambda_n)=a_n\,(n=0,1,2,\cdots)$ 的一切函数，明确 $F^{(n)}(\lambda_n)=0\,(n=0,1,2,\cdots)$ 函数集合的性質等等，但关于內插过程的收斂性問題仍保留第一位。

余項的研究乃是明确某一过程收斂性的通用的經典方法。B.Л. 貢察罗夫的功蹟在于他發現了这一过程的余項的解析式。这一解析式在長时間內都是解决这种內插問題的唯一途徑。它所具有的形式是：

$$R_n(z)=F(z)-Q_n(z)=$$

$$=\int_{\lambda_0}^{z}\int_{\lambda_1}^{z_1}\cdots\int_{\lambda_n}^{z_n}F^{(n+1)}(z_{n+1})dz_1\cdots dz_{n+1}\text{.}\tag{2}$$

如果完成積分的話，公式 (2) 的証明立刻就会求得。实际上，

$$\int_{\lambda_n}^{z_n} F^{(n+1)}(z_{n+1})dz_{n+1}=F^{(n)}(z_n)-F^{(n)}(\lambda_n),$$

$$\int_{\lambda_{n-1}}^{z_{n-1}}\int_{\lambda_n}^{z_n} F^{(n+1)}(z_{n+1})dz_n dz_{n+1}=$$

$$=F^{(n-1)}(z_{n-1})-F^{(n-1)}(\lambda_{n-1})-F^{(n)}(\lambda_n)\int_{\lambda_{n-1}}^{z_{n-1}} dz_n$$

以下類推。規律已經明确。最后是：

$$\int_{\lambda_0}^{z}\int_{\lambda_1}^{z_1}\cdots\int_{\lambda_n}^{z_n} F^{(n+1)}(z_{n+1})dz_1\cdots dz_{n+1}=F(z)-F(\lambda_0)-$$

$$-F'(\lambda_1)\int_{\lambda_0}^{z} dz_1-\cdots-F^{(n)}(\lambda_n)\int_{\lambda_0}^{z}\int_{\lambda_1}^{z_1}\cdots\int_{\lambda_{n-1}}^{z_{n-1}} dz_1\cdots dz_n,$$

卽公式(2)的 n 重積分本身表示 $F(z)$ 跟 n 次多項式的差。除此而外可看出 $R_n^{(k)}(\lambda_k)=0$,而 $k=0,1,\cdots,n$。

从上述的推論中明确到建立 $Q_n(z)$ 的簡便方法是：

$$\left.\begin{aligned} Q_n(z)&=\sum_{k=0}^{n} F^{(k)}(\lambda_k)P_k(z),\\ P_k(z)&=\int_{\lambda_0}^{z}\cdots\int_{\lambda_{k-1}}^{z_{k-1}} dz_1\cdots dz_k. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

从公式(3)中可看出多項式 $P_n(z)$ ——今后我們將称之为**阿貝尔—貢察罗夫問題的内插多項式**——滿足条件

$$P_n^{(k)}(\lambda_k)=\begin{cases}0(k\neq n),\\ 1(k=n).\end{cases} \tag{4}$$

§2. 余項估値的 В. Л. 貢察罗夫方法

В. Л. 貢察罗夫在他的論文[4]中所得的多数結果都是奠基在下边他所發現的定理上。

定理 1 設 D——包括点 $z,\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 的最小凸域。則

$$\left|\int_{\lambda_0}^{z}\int_{\lambda_1}^{z_1}\cdots\int_{\lambda_n}^{z_n}F(z_{n+1})dz_1\cdots dz_{n+1}\right|\leqslant\frac{S_n^{n+1}}{(n+1)!}\max_{z\in D}|F(z)|,\qquad(1)$$

$$S_n=|z-\lambda_0|+|\lambda_1-\lambda_0|+\cdots+|\lambda_n-\lambda_{n-1}|.$$

証明　可以認为積分是按直綫綫段進行的。設所有的 $z_1, z_2, \cdots, z_k$ 点都不超出區域 D 的边界。实际上，从 D 域的凸度中可知如果某兩点位于这一变域当中，那么联結这兩点的整个直綫綫段也必位于这一变域內。因此，如果 z_{k-1} 点位于 D 內，那么位于 z_{k-1} 和 λ_{k-1} 間的直綫綫段上的 z_k 点也在 D 中。但 z 点（起 z_0 作用）之在 D 中是已知条件。

这样，z_{n+1} 点在 D 中。意思就是：

$$I=\left|\int_{\lambda_0}^{z}\int_{\lambda_1}^{z_1}\cdots\int_{\lambda_n}^{z_n}F(z_{n+1})dz_1\cdots dz_{n+1}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\max_{z\in D}|F(z)|\int_{\lambda_0}^{z}\int_{\lambda_1}^{z_1}\cdots\int_{\lambda_n}^{z_n}|dz_1|\cdots|dz_{n+1}|=I_1\max_{z\in D}|F(z)|.$$

在 I_1 中代换变数，設 $z_1=\lambda_0+z_1'$，$z_2=\lambda_1+z_2'$，$\cdots$，$z_{n+1}=\lambda_n+z_{n+1}'$。这时得：

$$I_1=\int_0^{z-\lambda_0}\int_0^{z_1'+\lambda_0-\lambda_1}\cdots\int_0^{z_n'+\lambda_{n-1}-\lambda_n}|dz_1'|\cdots|dz_{n+1}'|\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^{|z-\lambda_0|}\int_0^{t_1+|\lambda_1-\lambda_0|}\cdots\int_0^{t_n+|\lambda_n-\lambda_{n-1}|}dt_1\cdots dt_{n+1},$$

但

$$\int_0^A\int_0^{t+a}dt\,dt_1=\int_a^{A+a}\int_0^{t_2}dt_2\,dt_1\leqslant\int_0^{A+a}\int_0^{t_2}dt_2\,dt_1,$$

因此

$$I_1\leqslant\int_0^{S_n}\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_n}dt_1\cdots dt_{n+1}=\frac{S_n^{n+1}}{(n+1)!},$$

于是可得（1）的估值。

特別設 $F(z)=1$ 时，則得：

$$\left.\begin{aligned} |P_{n+1}(z)| &\leqslant \frac{S_n^{n+1}}{(n+1)!}, \\ S_n &= |z-\lambda_0|+|\lambda_1-\lambda_0|+\cdots+|\lambda_n-\lambda_{n-1}|, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

設 $F(z)=f^{(n+1)}(z)$，則得：

$$\left.\begin{aligned} |R_n(z)| &\leqslant \max_{|\zeta|\leqslant\lambda_n^*} |f^{(n+1)}(\zeta)| \frac{S_n^{n+1}}{(n+1)!}, \\ \lambda_n^* &= \max\{|z|,\ |\lambda_0|,\cdots,|\lambda_n|\}, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

这里

$$R_n(z)=f(z)-\sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(\lambda_k)P_k(z).$$

这些公式曾被 В.Л. 貢察罗夫和其他作者用來求出关于阿貝尔—貢察罗夫內插过程的收斂性的一系列的結果。我們在这里不將重新引導这些結果，因为我們在后面会求得更准确的或更普遍的形式。作为方法的演示，在这里只援引一个定理。

§3. §2 的估值式的最簡單的应用举例

定理 1 設 $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=\lambda$，$f(z)$ 在以点 $z=\lambda$ 为圓心，半徑为 R 的某圓內正則，且

$$\sum_{n=0}^{\infty}|\lambda_{n+1}-\lambda_n|<\infty \qquad (1)$$

則数列

$$\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(\lambda_n)P_n(z)$$

在 $|z|\leqslant R_1<R$ 的任意圓內向 $f(z)$ 一致收斂。

証明 选取 n_0，使之大到滿足条件

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}|\lambda_{n+1}-\lambda_n|<\eta,\quad |\lambda_n-\lambda|<\eta \qquad (2)$$

（η 將稍晚些选定），研究一下函数 $\varphi(z)=f^{(n_0)}(z)$。我們將它寫作

阿貝尔—貢察罗夫形式的数列

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi^{(n)}(\lambda_{n+n_0}) P_{n+n_0}^{(n_0)}(z), \tag{3}$$

这里

$$P_{n+n_0}^{(n_0)}(z)=\int_{\lambda_{n_0}}^{z} \cdots \int_{\lambda_{n_0+n-1}}^{z_{n-1}} dz_1 \cdots dz_n. \tag{4}$$

按照 § 2 的公式 (2)

$$|P_{n+n_0}^{(n_0)}(z)| \leqslant \frac{[|z-\lambda_{n_0}|+|\lambda_{n_0+1}-\lambda_{n_0}|+\cdots+|\lambda_{n+n_0-1}-\lambda_{n+n_0-2}|]^n}{n!} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{[|z-\lambda|+|\lambda_{n_0}-\lambda|+\sum_{k=n_0}^{\infty}|\lambda_{k+1}-\lambda_k|]^n}{n!} \leqslant \frac{[|z-\lambda|+2\eta]^n}{n!}.$$

此外，如果使 $M=\max_{|z-\lambda|=R_1}|\varphi(z)|$，則：

$$|\varphi^{(n)}(\lambda_{n+n_0})|=\frac{n!}{2\pi}\left|\int_{|z-\lambda|=R_1} \frac{\varphi(z)\,dz}{(z-\lambda_{n+n_0})^{n+1}}\right| \leqslant \frac{M \cdot n! \cdot R_1}{(R_1-\eta)^{n+1}}.$$

就是說数列 (3) 的一般項不超过数值

$$\frac{MR_1}{R_1-\eta}\left\{\frac{|z-\lambda|+2\eta}{R_1-\eta}\right\}^n,$$

即数列 (3) 当 $|z-\lambda|<R_1-3\eta$ 时收斂，而由于 R_1 能够任意选取在接近 R 的地方，η——任意小，于是我們就証明了数列 (3) 收斂，且在位于 $|z-\lambda|<R$ 圓內的某閉合变域中一致收斂。剩下的就是說明它向 $\varphi(z)$ 收斂。为此我們研究一下差，

$$\tilde{R}_n(z)=\varphi(z)-\sum_{k=0}^{n} \varphi^{(k)}(\lambda_{n_0+k}) P_{n_0+k}^{(n_0)}$$

它等于

$$\int_{\lambda_{n_0}}^{z} \cdots \int_{\lambda_{n_0+n}}^{z_n} \varphi^{(n+1)}(z_{n+1})\, dz_1 \cdots dz_{n+1}$$

就是說按 § 2 的公式 (3)

$$|\widetilde{R}_n(z)|\leqslant \max_{|\zeta-\lambda|\leqslant\rho}|\varphi^{(n+1)}(\zeta)|\frac{[|z-\lambda_{n_0}|+\cdots+|\lambda_{n_0+n}-\lambda_{n_0+n-1}|]^{n+1}}{(n+1)!}\leqslant$$

$$\leqslant \max_{|\zeta-\lambda|\leqslant\rho}|\varphi^{(n+1)}(\zeta)|\frac{[|z-\lambda|+|\lambda_{n_0}-\lambda|+\sum\limits_{k=n_0}^{\infty}|\lambda_{k+1}-\lambda_k|]^{n+1}}{(n+1)!},$$

(这里 $\rho=\max[|z-\lambda|,|\lambda_{n_0}-\lambda|,\cdots,|\lambda_{n_0+n}-\lambda|]$)

取 $|z-\lambda|<2\eta$,則得:

$$|\widetilde{R}_n(z)|\leqslant\frac{(4\eta)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{(n+1)!\,MR_1}{(R_1-2\eta)^{n+2}},$$

由于在这一情形下 $\rho=2\eta$,而

$$\max_{|z-\lambda|\leqslant2\eta}|\varphi^{(n+1)}(z)|=\frac{(n+1)!}{2\pi}\max_{|z-\lambda|\leqslant2\eta}\left|\int\limits_{|\zeta-\lambda|=R_1}\frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^{n+2}}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{(n+1)!\,M_1R_1}{(R_1-2\eta)^{n+2}},$$

因此,当 $4\eta<R_1-2\eta$ 时 $\widetilde{R}_n(z)\to0$,就是数列(3)在圓 $|z-\lambda|<2\eta$ 內向 $\varphi(z)$ 收斂。根据解析开拓的原則,它在一切收斂區域中皆向 $\varphi(z)$ 收斂。現在將等式

$$\varphi(z)=f^{(n_0)}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}f^{(n_0+n)}(\lambda_{n_0+n})P_{n+n_0}^{(n_0)}(z)$$

兩边積分 n_0 次,就得到定理的肯定。

在用这种方法所得到的其他結果当中,我們不加証明地看一下 И. И. 依布拉吉莫夫[3]的普遍定理。

定理 2 設 $M(r)=\max\limits_{|z\leqslant r|}|f(z)|$, $T(r)$——合乎条件 $\tau_n\leqslant r$ 的叙列 $\tau_n=|\lambda_0|+|\lambda_1-\lambda_0|+\cdots+|\lambda_n-\lambda_{n-1}|$ 的点数。如果 $f(z)$满足条件

$$\ln M(r)<\lambda T(\theta r),\quad \lambda<\ln\frac{1-\theta}{\theta}\left(\theta<\frac{1}{2},\ r>r_0\right),$$

則阿貝尔—貢察罗夫数列在平面的任意有限部分中皆向 $f(z)$ 一致收斂。

§4. 二点問題

另一阿貝尔—貢察罗夫数列的余項估值方法曾为 A.O. 盖里封德和 И.И. 依布拉吉莫夫利用过。借助于这一方法能得到唯一性定理，虽然相应的阿貝耳—貢察罗夫数列一般來講能够發散。然而这唯一性定理幷不是將要在第二章內求得的唯一性定理的類似，倒不如說它是牛頓数列的某些定理的類似——可以肯定这一数列部分和的某些子叙列的收斂(見 A.O. 盖里封德 161)。較詳細地研究一下阿貝尔—貢察罗夫数列的这一新現象倒是很有意思的。

二点問題的組成如下：

設所有正整数的叙列以叙列$\{n_k\}$分为兩部分$\{\lambda_n\}$及$\{\mu_n\}$：$\{\lambda_n\}$由 $0,1,\cdots,n_1-1,n_2,n_2+1,\cdots,n_3-1,\cdots$ 等数字組成，$\{\mu_n\}$——由数字 $n_1,n_1+1,\cdots,n_2-1,n_3,n_3+1,\cdots$ 組成。

在什么条件下區間 $[0,1]$ 中存在正則函数 $F(z)\neq 0$，而

$$F^{(\lambda_n)}(0)=0,\quad F^{(\mu_n)}(1)=0?$$

(这一問題后來就被 M. M. 支尔巴相 [1] 应用另外的方法求解时一般化了)。

A. O. 盖里封德和 И. И. 依布拉吉莫夫利用过这种余項估值式。

定理 1　当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，

$$\left|\int_0^x\int_0^{x_1}\cdots\int_0^{x_{n_1-1}}\int_1^{x_{n_1}}\cdots\int_{\frac{1}{2}+(-1)^k\frac{1}{2}}^{x_{n_k-1}}dx_1\cdots dx_{n_k}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{n_1!(n_2-n_1)!\cdots(n_k-n_{k-1})!}. \tag{1}$$

証明　实际，当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时

$$\int_0^x\int_0^{x_1}\cdots\int_0^{x_{k-1}}dx_1\cdots dx_k=\frac{x^k}{k!},$$

$$\int_x^1\int_{x_1}^1\cdots\int_{x_{k-1}}^1 dx_1\cdots dx_k=\frac{(1-x)^k}{k!},$$

因此，式

$$\int_{a_k}^{x_{n_{k-1}}}\cdots\int_{a_k}^{x_{n_{k-1}}} dx_{n_{k-1}+1}\cdots dx_{n_k}\left(a_k=\frac{1}{2}+(-1)^k\frac{1}{2}\right)$$

在 $0\leqslant x_{n_{k-1}}\leqslant 1$ 时符号不变，其絕对值不超过 $\frac{1}{(n_k-n_{k-1})!}$。進行歸納就得到定理的肯定。

借此估値式还能求出 A. O. 盖里封德和 И. И. 依布拉吉莫夫的結果*。

定理 2 設

$$v(n)=\min_{0<r<\infty}\frac{\max\limits_{|z|\leqslant r}|F(z)|^{\frac{1}{n}}}{r-1},$$

这时如果 $F^{(\lambda_n)}(0)=0$, $F^{(\mu_n)}(1)=0$，依此則：

$$\varlimsup_{k\to\infty} v(n_k)\left[\frac{n_k!}{n_1!(n_2-n_1)!\cdots(n_k-n_{k-1})!}\right]^{\frac{1}{n_k}}<1, \qquad (2)$$

結論就是 $F(z)\equiv 0$。

証明 从等式

$$F(z)=\int_{\alpha_1}^{z}\cdots\int_{\alpha_1}^{z_{n_1-1}}\int_{\alpha_2}^{z_{n_1}}\cdots\int_{\alpha_k}^{z_{n_k-1}}F^{(n_k)}(z_{n_k})dz_1\cdots dz_{n_k}$$

$$\left(\alpha_k=\frac{1}{2}+(-1)^k\frac{1}{2}\right)$$

由估値式 (1) 得不等式

---

* 这些作者的准确些的結論是：以 r 代替 $v(n)$ 公式中的 $(r-1)$。然而这样却使証明顯著地复雜化。我們这里所引用的結果很不嚴整，但在一定程度上却表示了方法。在同一論文中还說明了所發現的定理的精确性和作出了下限存在标准的最簡單的公式

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|F(x)|\leqslant\frac{\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|F^{(n_k)}(x)|}{n_1!(n_2-n_1)!\cdots(n_k-n_{k-1})!}.$$

但

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|F^{(n)}(x)|\leqslant\frac{n!}{2\pi}\max_{0\leqslant x\leqslant 1}\int_{|\zeta|=r}\frac{|F(\zeta)||d\zeta|}{|\zeta-x|^{n+1}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{n!\max\limits_{|\zeta|=r}|F(\zeta)|r}{(r-1)^{n+1}}=n!\frac{r}{r-1}\left[\frac{\max\limits_{|z|\leqslant r}|F(z)|^{\frac{1}{n}}}{r-1}\right]^n,$$

就是說，

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|F(x)|\leqslant\inf_k\frac{n_k![v(n_k)]^{n_k}}{n_1!(n_2-n_1)!\cdots(n_k-n_{k-1})!}$$

由于满足条件(1)从而得出結論：$\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|F(x)|=0$，也就是 $F(z)\equiv 0$.

§5. 借遞推关系的 $|P_n(z)|$ 的估值

还有一个解决阿貝尔—貢察罗夫数列收斂問題的方法曾为И. И.依布拉吉莫夫（参看[2]）利用过。

这种方法在于利用多項式 $P_n(z)$ 間的遞推关系作它的估值（这一方法并不能从任意函数得出 n 重積分估值）。

所謂遞推关系，具有形式

$$\frac{\lambda_0^n}{n!}P_0(z)+\frac{\lambda_1^{n-1}}{(n-1)!}P_1(z)+\cdots+P_n(z)=\frac{z^n}{n!},\quad P_0(z)=1 \qquad (1)$$

它不是别的正是 $\frac{z^n}{n!}$ 按阿貝尔—貢察罗夫多項式展开的数列。借助于这种关系，很容易証明 $|P_n(z)|$ 的估值。

定理 1　如果 $\max\limits_{0\leqslant k\leqslant n}|\lambda_k|\leqslant R$，而 $|z|\leqslant r$，則

$$|P_n(z)|\leqslant\frac{M}{R}\cdot 2^{\frac{r}{R}}\left(\frac{R}{\ln 2}\right)^{n+1}, \qquad (2)$$

証明　从(1)中可看出

$$|P_n(z)|\leqslant\frac{r^n}{n!}+R|P_{n-1}(z)|+\frac{R^2}{2!}|P_{n-2}(z)|+\cdots+\frac{R^n}{n!}|P_0(z)|.$$

顯然 $|P_n(z)|$ 不超过 A_n——下列关系式的解

$$A_n=\frac{r^n}{n!}+A_{n-1}\frac{R}{1!}+\cdots+A_0\frac{R^n}{n!},\quad A_0=1. \tag{3}$$

試求 A_n。为此以 z^n 乘 (3) 的兩边，且將它从 $n=0$ 到無限大总和起來。設 $\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}A_nz^n$，則得方程

$$\varphi(z)=e^{rz}+\varphi(z)(e^{Rz}-1),$$

从而發現：

$$\varphi(z)=\frac{e^{rz}}{2-e^{Rz}}.$$

在 $z=\frac{\ln 2}{R}$ 点上函数 $\varphi(z)$ 有在其收斂圓中成为唯一奇異点的留数 $\frac{2^{\frac{r}{R}}}{2R}$ 的單極，因此，

$$A_n=\frac{2^{\frac{r}{R}}}{2R}\left(\frac{R}{\ln 2}\right)^{n+1}(1+\varepsilon_n),$$

ε_n 当 R 一定时按 r 一致地趨近 0，因为 $\varphi(z)$ 的留数在其他極 $z_k=$ $=\frac{\ln 2+2k\pi i}{R}$ $(-\infty<K<\infty)$ 上等于

$$\frac{e^{\frac{r}{R}(\ln 2+2k\pi i)}}{2R}.$$

这样 (2) 式本身就被証明了。

在这一估値的帮助下会無困难地得到阿貝尔—貢察罗夫数列的收斂定理，正然証明了它向我們展开的应有奇異点的函数的收斂性。類似定理的証明我們現在就不作了，因为以后会用更完善的方法做到。

到最近有兩种方法在阿貝尔—貢察罗夫数列收斂問題的研究中起基本作用：以 §2 估値为根据的方法，和以不等式 (2) 为根据的方法。在二点問題上所利用的估値法过于專門，并沒有普及到更廣泛的問題当中去（如第二章的方法）。