日照市教学研究室 编写

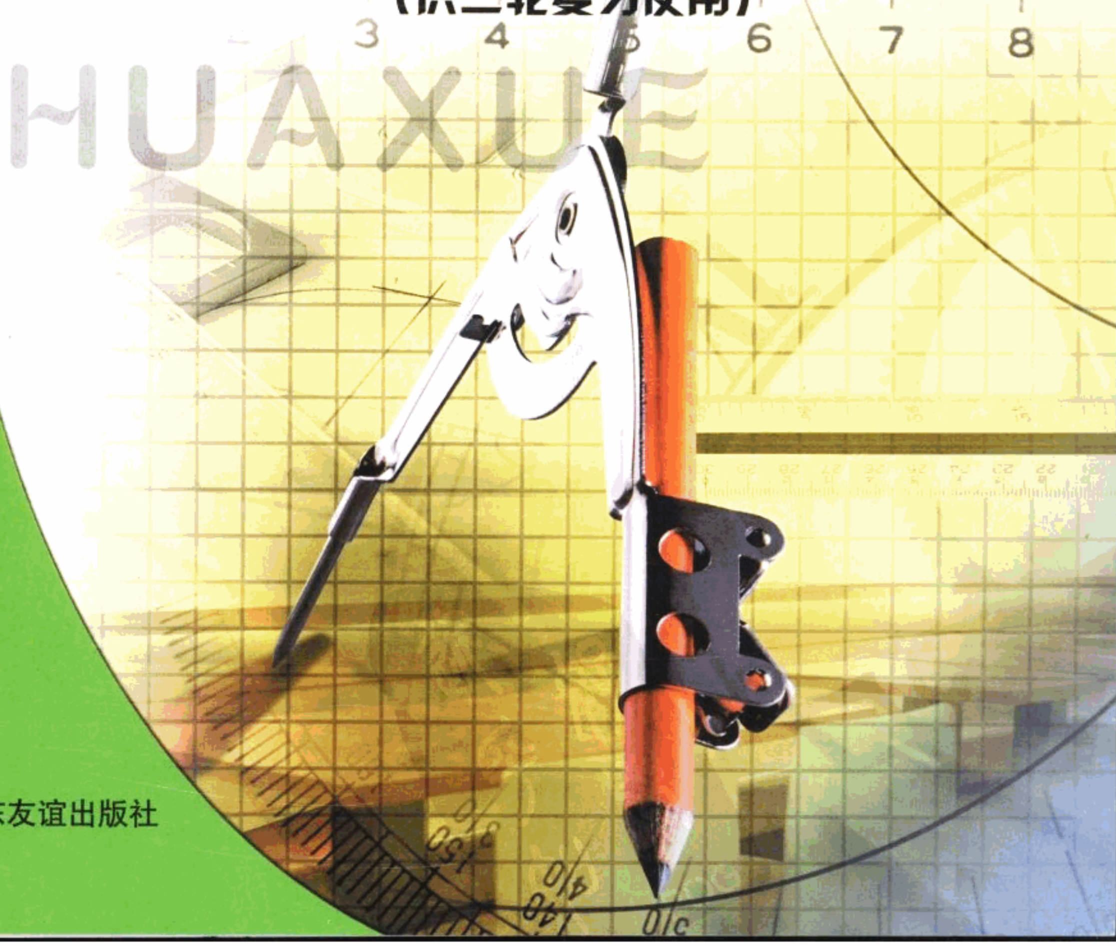
高考新理念“3+X+1”

专题能力培养

数学（理科）

GAOKAO XINLINIAN

（供二轮复习使用）



山东友谊出版社

高考新理念“3+X+1”专题能力培养

数学（理科）

（供二轮复习使用）

日照市教学研究室 编写

山东友谊出版社

《高考新理念“3＋X＋1”专题能力培养·数学》编写委员会

高考新理念“3＋X＋1”专题能力培养

数　学(理科)

(供二轮复习使用)

日照市教学研究室　编写

出　版：山东友谊出版社
地　址：济南市胜利大街 39 号　邮编：250001
电　话：总编室(0531)82098756　82098142
发行部(0531)82098147(传真)
发　行：山东友谊出版社
印　刷：山东省聊城市长虹彩印厂
版　次：2008 年 1 月第 1 版
印　次：2008 年 1 月第 1 次印刷
规　格：787mm×1092mm　16 开本
印　张：13.5
字　数：270 千字
书　号：ISBN 978－7－80737－263－9
定　价：12.80 元

(如印装质量有问题，请与出版社总编室联系调换 L)

编写说明

为了配合2008届高中毕业生进行高三二轮复习备考，我们根据《2008年普通高等学校招生全国统一考试（课程标准实验版）山东卷考试说明》和《普通高中数学课程标准（实验）》，在研修新教材和近年高考题的基础上，广泛吸收已取得的各项成果，结合自身多年来高三教学实际，编写了《高考新理念“3+X+1”专题能力培养·数学》一书，供高三师生在二轮复习时使用。

根据高考数学考查内容及能力要求，针对高三二轮复习的特点，本书分为上、下两篇，上篇用六个专题介绍了常用数学思想方法及客观题的解法，下篇将必修及选修系列2的内容分解整合成三十个专题，并配有六套阶段测试题和四套模拟试题。上篇每个专题都分专题概述、方法指要、典型例题和巩固练习四部分，旨在培养学生的解题能力，便于师生系统基本方法；下篇各专题皆以练习形式呈现，旨在引导学生自主复习，便于师生先练后讲；题目的选择体现了思想方法的典型性、呈现方式的新颖性和应试的前瞻性；题目的难度适当，数量适中，便于师生使用。阶段测试题以试卷的形式呈现，用于学生定时训练，及时查漏补缺，训练应试能力。模拟试题体现了新课程高考的理念和要求，用于学生作适应性训练。“参考答案”部分既提供参考答案，又给出解题过程或提示，便于学生自评、自悟。

由于水平所限，编写时间短促，书中疏漏、错误在所难免，诚请师生在使用过程中及时予以修正。欢迎大家对本书提出宝贵意见，以便我们更好地改进工作。

编　者

目　录

上　篇

下　篇

上篇　方法策略篇

专题一　函数与方程思想

专题概述

函数是中学数学的一个重要概念，它描述了量与量之间的依存关系，是对问题本身的数量特征和制约关系的一种刻画．变量是函数的基础，对应（映射）是函数的本质，函数一直是高考的热点、重点内容，它渗透在数学的各部分内容中．

1．函数思想，就是用运动和变化的观点，集合与对应的思想，去分析和研究数学问题中的数量关系，建立函数关系或构造函数，运用函数的图象和性质去分析问题、通过转化，使问题得到解决．

2．与函数思想相联系的就是方程思想，所谓方程思想，就是分析数学问题中的变量间的等量关系，从而建立方程或方程组，或者运用方程的性质去分析、通过转化，使问题获得解决．

方程思想与函数思想密切相关，对于函数 $y=f(x)$，当 $y=0$ 时，就转化为方程 $f(x)=0$，也可以把函数式 $y=f(x)$ 看作二元方程 $y=f(x)$，函数与方程这种相互转化关系十分重要．

方法指要

1．函数思想在解题中的应用主要表现在两个方面：一是借助有关初等函数的性质，解有关求值，解（证）不等式、解方程以及讨论参数的取值范围等问题；二是在问题研究中通过建立函数关系式或构造中间函数，把所研究的问题化为讨论函数的有关性质，达到化难为易、化繁为简的目的．

（1）深刻理解一般函数的图象和性质，熟练地掌握一次函数、二次函数和指数函数、对数函数的特性，是应用函数思想的基础，善于挖掘隐含条件，构造出恰当的函数解析式，并能合理地运用函数的图象和性质，是实施应用函数思想解题的关键；

（2）在解答非函数问题时，要注意对问题中各元素仔细地观察和分析，产生由此及彼的联想，就会构造出相关的函数模型，从而使问题获得巧妙地解决；

（3）解答实际问题，关键在于建立目标函数．

对于实际应用题，首先要读懂文字说明，再将其翻译成数学语言，建立数学模型和函数关系式，利用函数的性质、重要不等式或有关知识进行解答；

（4）数列是特殊的函数，将其转化为自变量为 $n(n\in\mathbf{N}_+)$ 的函数；

等差、等比数列通项公式，前 n 项和公式都可看成 n 的函数，因此，某些等差（比）数列问题常可用函数思想来分析或用函数方法来解决；

（5）利用二项式定理构造函数

利用二项式定理构造函数 $f(x)=(a+x)^n(n\in\mathbf{N})$ 应用广泛，特别是在证明组合数恒等式，组合数求和，证明不等式，证明整除等问题中应用较多．

（6）立体几何中有关线段、角、面积、体

积的计算，可通过建立函数表达式的方法加以解决，如建立空间坐标系后，立体几何与函数的关系就更加密切.

2. 方程思想在解题中的应用主要表现在四个方面：(1)解方程或不等式；(2)带参变数的方程或不等式的讨论，常涉及二次方程的判别式、韦达定理、区间根、区间上恒成立等知识应用；(3)需要转化为方程的讨论，如曲线的位置关系等；(4)构造方程或不等式求解问题.

典型例题

【例 1】(2000 年，上海)已知函数 $f(x)=\dfrac{x^2+2x+a}{x}$，$x\in[1,+\infty)$.

(1)当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时，求函数 $f(x)$ 的最小值；

(2)若对任意 $x\in[1,+\infty)$，$f(x)>0$ 恒成立，试求实数 a 的取值范围.

【解析】(1)当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x)=x+\dfrac{1}{2x}+2$.

$\therefore f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上为增函数，$\therefore f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上的最小值为 $f(1)=\dfrac{7}{2}$.

(2)法一：在区间 $[1,+\infty)$ 上，$f(x)=\dfrac{x^2+2x+a}{x}>0$ 恒成立 $\Leftrightarrow x^2+2x+a>0$ 恒成立.

设 $y=x^2+2x+a$，$x\in[1,+\infty)$，$y=x^2+2x+a=(x+1)^2+a-1$ 递增，$\therefore$ 当 $x=1$ 时，$y_{\min}=3+a$，于是当且仅当 $y_{\min}=3+a>0$ 时，函数 $f(x)$ 恒成立，故 $a>-3$.

法二：$f(x)=x+\dfrac{a}{x}+2$，$x\in[1,+\infty)$，

当 $a\geqslant 0$ 时，函数 $f(x)$ 的值恒为正，当 $a<0$ 时，函数 $f(x)$ 递增，故当 $x=1$ 时，$f(x)_{\min}=3+a$，于是当且仅当 $f(x)_{\min}=3+a>0$ 时，函数 $f(x)>0$ 恒成立，故 $a>-3$.

法三：在区间 $[1,+\infty)$ 上，$f(x)=\dfrac{x^2+2x+a}{x}>0$ 恒成立 $\Leftrightarrow x^2+2x+a>0$ 恒成立 $\Rightarrow a>-x^2-2x$ 恒成立.

又 $\because x\in[1,+\infty)$，$a>-x^2-2x$ 恒成立，

$\therefore a$ 应大于 $u=-x^2-2x$，$x\in[1,+\infty)$ 的最大值.

$\therefore a>-(x+1)^2+1$，$x=1$ 时 u 取得最大值，$\therefore a>-3$.

【例 2】若正数 a、b 满足 $ab=a+b+3$，求 ab 的取值范围.

【解析】法一：(看成函数的值域)

$\because ab=a+b+3$，$\therefore b=\dfrac{a+3}{a-1}$(显然 $a\neq 1$)，

$$\begin{aligned}\therefore ab&=a\cdot\frac{a+3}{a-1}\\&=\frac{(a-1)^2+5(a-1)+4}{a-1}\\&=(a-1)+\frac{4}{a-1}+5\geqslant 9,\end{aligned}$$

当且仅当 $a-1=\dfrac{4}{a-1}$，即 $a=3$ 时取等号，又 $\because a>3$ 时，$(a-1)+\dfrac{4}{a-1}+5$ 单调递增，$\therefore ab$ 的取值范围是 $[9,+\infty)$.

法二：(看成不等式的解集)

$\because a$、b 为正数，$\therefore a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$. 又 $ab=a+b+3$，$\therefore ab\geqslant 2\sqrt{ab}+3$.

即 $(\sqrt{ab})^2-2\sqrt{ab}-3\geqslant 0$. 解得 $\sqrt{ab}\geqslant 3$，或 $\sqrt{ab}\leqslant -1$(舍去)，

$\therefore ab\geqslant 9$.

法三：若设 $ab=t$，则 $a+b=t-3$，

$\therefore a$、b 可看成方程 $x^2-(t-3)x+t=0$ 的两个正根，

从而：$\begin{cases}\Delta=(t-3)^2-4t\geqslant 0,\\ a+b=t-3>0,\\ ab=t>0.\end{cases}$

即 $\begin{cases}t\leqslant 1 \text{ 或 } t\geqslant 9,\\ t>3,\\ t>0.\end{cases}$

解得 $t\geqslant 9$，即 $ab\geqslant 9$.

注：从以上解法可以看出，对于同一个问题，用不同的观点去看，会产生不同的解法. 方法一用函数的观点，方法二、三是从题中和、积特征，联想到方程、均值不等式、根与函数的关系构造不等式，方程来求解，分别体现了函数思想、方程思想及用不等式解决问题的意识. 因此解题过程中，应多方位、多角度，去思考、去探索，选用合理的解题途径，以求得事半功倍之效.

变式练习：若例题中的条件不变，结论改为“求 $a+b$ 的取值范围”应如何求解？

【例 3】已知 $S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}(n\in\mathbf{N}_+)$，设 $f(n)=S_{2n+1}-S_{n+1}$，试确定实数 m 的取值范围，使对于一切大于 1 的正整数 n，不等式 $f(n)>[\log_m(m-1)]^2-\frac{11}{20}[\log_{(m-1)}m]^2$ 恒成立.

【分析】依题意当写出 $f(n)$ 的表达式时，$f(n)$ 是一个不可求和的数列，直接求 $f(n)$ 的最小值是不可能的，进而研究 $f(n)$ 的单调性发现 $f(n)$ 单调递增，$f(2)$ 是所有 $f(n)(a\geqslant 2)$ 中最小的，这样问题得到解决.

解：由 $f(n)=S_{2n+1}-S_{n+1}$，得

$$f(n)=\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n+1},$$

$$\therefore f(n+1)=\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+4}+\cdots+\frac{1}{2n+3},$$

$$\therefore f(n+1)-f(n)=\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2n+3}-\frac{1}{n+2}$$

$$=\left(\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{2n+4}\right)+\left(\frac{1}{2n+3}-\frac{1}{2n+4}\right)>0.$$

$\therefore f(n)>f(n-1)>\cdots>f(3)>f(2)$ $(n\in\mathbf{N}_+,n\geqslant 2)$，

$$\therefore f(x)_{\min}=f(2)=\frac{1}{2+2}+\frac{1}{2+3}=\frac{9}{20}.$$

要使对于一切大于 1 的正整数 n，原不等式恒成立，只需不等式 $\frac{9}{20}>[\log_m(m-1)]^2-\frac{11}{20}[\log_{(m-1)}m]^2$ 成立.

设 $y=[\log_m(m-1)]^2$，则 $y>0$.

于是 $\begin{cases}\frac{9}{20}>y-\frac{11}{20y},\\ y>0.\end{cases}$ 解得 $0<y<1$.

从而 $\begin{cases}0<[\log_m(m-1)]^2<1,\\ m>0,m\neq 1,\\ m-1\neq 1,\\ m-1>0.\end{cases}$

解得 $m>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 且 $m\neq 2$.

$\therefore$ 实数 m 的取值范围为 $m>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 且 $m\neq 2$.

注：本题 $f(n)$ 无法求和，常规数列方法就不起作用了，而采用函数的思想，用研究函数单调性的方法研究数列的单调性，求函数 $f(x)_{\min}$ 值. 结合不等式恒成立，进一步用函数与方程思想使问题解决，这种用函数方法解决数学问题的意识，正是函数思想的核心.

变式练习：已知不等式 $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{12}\log_a(a-1)+\frac{2}{3}$ 对于一

切大于1的自然数 n 都成立，求实数 a 的取值范围.

【例 4】直线 $m: y=kx+1$ 和双曲线 $x^2-y^2=1$ 的左支交于 A、B 两点，直线 l 过点 $P(-2,0)$ 和线段 AB 的中点 M，求 l 在 y 轴上的截距 b 的取值范围.

【分析】b 的变化是由 k 的变化而引起的，即对于 k 的任一确定的值，b 有确定的值与之对应，因此 b 是 k 的函数，本题即为求这个函数的值域.

解：由 $\begin{cases} y=kx+1, \\ x^2-y^2=1, \end{cases} (x\leqslant -1)$,

消去 y 得 $(k^2-1)x^2+2kx+2=0$,

$$\begin{cases} \Delta=4k^2+8(1-k^2)>0, \\ x_1+x_2=\dfrac{2k}{1-k^2}<0, \\ x_1x_2=\dfrac{-2}{1-k^2}>0, \end{cases} \quad \therefore 1<k<\sqrt{2}.$$

设 $M(x_0, y_0)$,

$$\text{则}\begin{cases} x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{k}{1-k^2}, \\ y_0=kx_0+1=\dfrac{1}{1-k^2}. \end{cases}$$

由 $P(-2,0)$、$M\left(\dfrac{k}{1-k^2}, \dfrac{1}{1-k^2}\right)$、$Q(0,b)$ 三点共线，

得出 $b=\dfrac{2}{-2k^2+k+2}$.

设 $f(k)=-2k^2+k+2$，则 $f(k)$ 在 $(1,\sqrt{2})$ 上为减函数，

$\therefore f(\sqrt{2})<f(k)<f(1)$，且 $f(k)\neq 0$.

$\therefore -(2-\sqrt{2})<f(k)<1$，且 $f(k)\neq 0$.

$\therefore b<-\sqrt{2}-2$ 或 $b>2$.

注：本题根据函数思想建立 b 与 k 的函数关系，根据方程思想运用二次方程的理论具体求出 b 的表达式，是解此题的两个关键点，许多解析几何题中某些元素处于运动变化之中，存在相互联系、制约关系，它们之间往往构成函数关系，对于直线与曲线交点的题经常转化为方程问题，用方程理论加以解决.

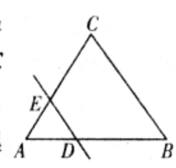
变式练习：已知函数 $f(x)=\log_2(x+1)$，当点 (x,y) 在 $y=f(x)$ 的图象上运动时，点 $P\left(\dfrac{x-t+1}{2}, 2y\right)$ 在函数 $y=g(x)$ 的图象上运动.

(1)求 $y=g(x)$ 的解析式；

(2)当 $t=4$，且 $x\in[0,1]$ 时，求 $g(x)-f(x)$ 的最小值；

(3)若在 $x\in[0,1]$ 时恒有 $g(x)>f(x)$ 成立，求 t 的取值范围.

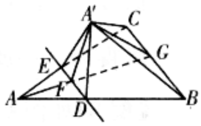
【例 5】平面内边长为 a 的正三角形 ABC，直线 DE $/\!/BC$，交 AB、AC 于 D、E，现将 $\triangle AED$ 沿 ED 折起 $60°$ 的二面角，求 DE 在何位置时，折起后 A 到 BC 的距离最短，并求最短距离是多少？



【分析】首先借助于几何作图作出折起

后 A 到 BC 的距离，然后建立距离的函数，选定合理变量是解本题的关键.

解：如图，点 A 沿 DE 折起到 A'，过 A 作 $AG\perp BC$ 于 G，交 DE 于 F，连接 $A'F$、$A'G$，



$\because\triangle ABC$ 为正三角形，$DE\parallel BC$，

$\therefore AF\perp DE$，$A'F\perp DE$.

同时 G、F 分别为 BC、DE 的中点，

$\therefore DE\perp$ 面 $A'FG$，$BC\perp$ 面 $A'FG$，

$\therefore\angle A'FG$ 是二面角 $A'-ED-B$ 的平面角，

由题知$\angle A'FG=60^\circ$，$\therefore A'G$ 为所求.

在$\triangle A'FG$ 中，设 $FG=x$，则 $A'F=\frac{\sqrt{3}}{2}a-x$，

由余弦定理，得 $A'G^2=A'F^2+FG^2-2A'F\cdot FG\cdot\cos60^\circ$

$=(\frac{\sqrt{3}}{2}a-x)^2+x^2-2\times(\frac{\sqrt{3}}{2}a-x)\cdot x\cdot\cos60^\circ$

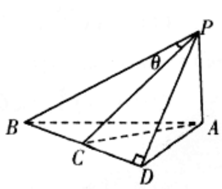
$=3x^2-\frac{3}{2}\sqrt{3}ax+\frac{3}{4}a^2=3(x-\frac{\sqrt{3}}{4}a)^2+\frac{3}{16}a^2$.

$\therefore$ 当 $x=\frac{\sqrt{3}}{4}a$ 时，$(A'G)_{\min}=\frac{\sqrt{3}}{4}a$.

即 DE 恰为$\triangle ABC$ 中位线时折起后点 A 到 BC 的距离最短，最短距离为$\frac{\sqrt{3}}{4}a$.

注：立体几何中的“运动问题”“最值问题”等常常借助函数思想来解决，就本题而言，在建立目标函数后，利用求最值的方法进行求解.

变式练习：如图，已知 $PA\perp$ 平面 ABC，$AD\perp BC$，垂足 D 在 BC 的延长线上，且 $BC=CD=DA=1$，记 $PD=x$，$\angle BPC=\theta$，求 $\tan\theta$ 的最大值.



【例 6】用总长为 14.8 m 的钢条制成一个长方体容器的框架，要求底面的一边比另一边长 0.5 m，那么高为多少时容器的容积最大？并求出它的最大容积.

【分析】这里有四个变量：底面的长、宽、长方体的体积和高. 设宽为 x(m)，则长、高可用 x 表示，容积 y 是 x 的函数. 运用长方体的体积公式，建立目标函数表达式，再求函数的最大值.

解：设容器底面宽为 x(m)，则长为$(x+0.5)$(m)，

高为$\frac{14.8-4x-4(x+0.5)}{4}=3.2-2x$.

由 $3.2-2x>0$ 和 $x>0$，得 $0<x<1.6$.

设容器的容积为 y(m^3)，则

$y=x(x+0.5)(3.2-2x)(0<x<1.6)$.

整理，得 $y=-2x^3+2.2x^2+1.6x$，

求导，得 $y'=-6x^2+4.4x+1.6$，

令 $y'=0$，有 $-6x^2+4.4x+1.6=0$，

即 $15x^2-11x-4=0$.

解得 $x_1=1$，$x_2=-\frac{4}{15}$（不合题意，舍去）.

从而，在定义域$(0,1.6)$内只有在 $x=1$ 处使 $y'=0$.

因此，当 $x=1$ 时，y 取得最大值，

$y_{\max}=-2+2.2+1.6=1.8$.

这时，高为 $3.2-2\times1=1.2$ (m).

答：当容器的高为 1.2 m 时，容积最大，最大容积是 1.8 m^3.

注：适当设出自变量，建立函数关系是解此类题的关键．但要注意自变量的取值范围，求最大值时，是用求导的方法先求函数极值点，再根据实际情况判断此时是最大值还是最小值．

【例 7】已知抛物线 $y=(m-1)x^2+(m-2)x-1(m\in\mathbf{R})$.

(1)当 m 为何值时，抛物线与 x 轴有两个交点？

(2)若关于 x 的方程 $(m-1)x^2+(m-2)x-1=0$ 的两个不等实数根的倒数平方和不大于 2，求 m 的取值范围；

(3)如果抛物线与 x 轴相交于 A，B 两点，与 y 轴交于 C 点，且△ABC 的面积等于 2，试确定 m 的值．

【分析】(1)令函数 $y=0$，则转化为求方程有两个不等的实根时 m 的值；

(2)利用根与系数的关系转化成解不等式；

(3)建立面积的函数关系式，再求函数值为 2 时方程的解．

解：(1)令 $y=0$，则 $(m-1)x^2+(m-2)x-1=0$.

据题意，需 $m\neq1$，且 $\Delta>0$，

即 $(m-2)^2+4(m-1)>0$，得 $m^2>0$，

$\therefore m\neq1$ 且 $m\neq0$ 时，抛物线与 x 轴有两个交点．

(2)在 $m\neq0,1$ 的条件下，

$x_1+x_2=\dfrac{m-2}{1-m}$，$x_1x_2=\dfrac{1}{1-m}$，

得 $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=m-2$，

$\therefore \dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{1}{x_2^2}=(m-2)^2+2(m-1)\leqslant2$，

得 $m^2-2m\leqslant0$，$\therefore 0\leqslant m\leqslant2$，$\therefore 0<m<1$ 或 $1<m\leqslant2$.

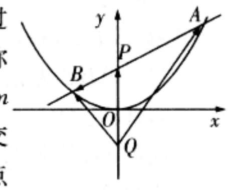
(3)由 $\dfrac{1}{2}|x_1-x_2|\cdot|y_c|=2$，

得 $\dfrac{1}{2}\cdot\left|\dfrac{m}{m-1}\right|\cdot|-1|=2$，

即 $|m|=4|m-1|$，

解得 $m=\dfrac{4}{3}$ 或 $\dfrac{4}{5}$.

【例 8】如图所示，过抛物线 $x^2=4y$ 的对称轴上任一点 $P(0,m)(m>0)$ 作直线与抛物线交于 A、B 两点，点 Q 是点 P 关于原点的对称点．



(1)设点 P 分有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 所成的比为 λ，证明：$\overrightarrow{QP}\perp(\overrightarrow{QA}-\lambda\overrightarrow{QB})$；

(2)设直线 AB 的方程是 $x-2y+12=0$，过 A、B 两点的圆 C 与抛物线在点 A 处有共同的切线，求圆 C 的方程．

【分析】(1)先将直线方程与抛物线方程联立，求出 λ，再将两向量作数量积证其为 0，即可得证．

(2)设直线与抛物线相联立求出 A、B 坐标，即可求圆的切线方程，再用待定系数法求解．

解：(1)依题意，可设直线 AB 的方程为 $y=kx+m$，代入抛物线方程 $x^2=4y$ 得 $x^2-4kx-4m=0$. ①

设 A、B 两点的坐标分别是 (x_1,y_1)、(x_2,y_2)，则 x_1、x_2 是方程①的两根，所以 $x_1x_2=-4m$.

点 $P(0,m)$ 分有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 所成的比为 λ，

得 $\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}=0$，即 $\lambda=-\dfrac{x_1}{x_2}$.

又点 Q 是点 P 关于原点的对称点，

故点 Q 的坐标是 $(0,-m)$，从而 $\overrightarrow{QP}=(0,2m)$.

$\overrightarrow{QA}-\lambda\overrightarrow{QB}=(x_1,y_1+m)-\lambda(x_2,y_2+m)=(x_1-\lambda x_2,y_1-\lambda y_2+(1-\lambda)m)$，

$\overrightarrow{QP}\cdot(\overrightarrow{QA}-\lambda\overrightarrow{QB})=2m[y_1-\lambda y_2+(1-\lambda)m]$

$=2m\left[\dfrac{x_1^2}{4}+\dfrac{x_1}{x_2}\cdot\dfrac{x_2^2}{4}+\left(1+\dfrac{x_1}{x_2}\right)m\right]$

$=2m(x_1+x_2)\cdot\dfrac{x_1x_2+4m}{4x_2}$

$=2m(x_1+x_2)\cdot\dfrac{-4m+4m}{4x^2}=0$，

所以$\overrightarrow{QP}\perp(\overrightarrow{QA}-\lambda\overrightarrow{QB})$.

(2)由$\begin{cases}x-2y+12=0,\\x^2=4y.\end{cases}$得点 A、B 的坐标分别是$(6,9)$、$(-4,4)$.

由 $x^2=4y$，得 $y=\dfrac{1}{4}x^2$，$y'=\dfrac{1}{2}x$，

所以抛物线 $x^2=4y$ 在点 A 处切线的斜率为 $y'|_{x=6}=3$.

设圆 C 的方程是$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，

则$\begin{cases}\dfrac{b-9}{a-6}=-\dfrac{1}{3},\\(a-6)^2+(b-9)^2=(a+4)^2+(b-4)^2.\end{cases}$

解之，得 $a=-\dfrac{3}{2}$，$b=\dfrac{23}{2}$，$r^2=(a+4)^2+(b-4)^2=\dfrac{125}{2}$.

所以圆 C 的方程是$(x+\dfrac{3}{2})^2+(y-\dfrac{23}{2})^2=\dfrac{125}{2}$，

即 $x^2+y^2+3x-23y+72=0$.

巩固练习

一、选择题

1. 函数 $f(x)=-x^2-2mx-m+2$ 在区间$[-1,1]$上恒为正，则实数 m 的取值范围是（　　）

A. $(-1,1)$　　B. $(-\dfrac{1}{3},1)$

C. $(-1,\dfrac{1}{3})$　　D. $(-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3})$

2. 已知关于 x 的方程 $\sin^2x+\cos x+k=0$ 有实数解，则实数 k 的取值范围是（　　）

A. $k\geqslant-\dfrac{5}{4}$　　B. $-\dfrac{5}{4}\leqslant k<1$

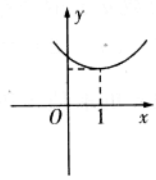
C. $-\dfrac{5}{4}\leqslant k\leqslant1$　　D. $-\dfrac{5}{4}<k<1$

3. 要使$(\log_2 3)^x-(\log_2 3)^y\geqslant(\log_3 5)^{-x}-(\log_3 5)^{-y}$成立，则应有（　　）

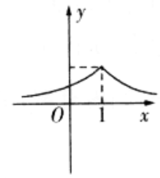
A. $x-y\leqslant0$　　B. $x+y\leqslant0$

C. $x-y\geqslant0$　　D. $x+y\geqslant0$

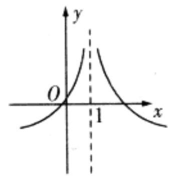
4. 若实数 x、y 满足$|x-1|-\ln\dfrac{1}{y}=0$，则 y 关于 x 的函数的图象形状大致是（　　）



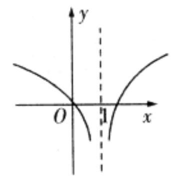
A.



B.



C.



D.

5. 函数 $f(x)=x^2-2ax+a$ 在区间$(-\infty,1)$内有极小值，则函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$在区间$(1,+\infty)$内一定（　　）

A. 有最小值　　B. 有最大值

C. 是减函数　　D. 是增函数

6. 把长为 12 cm 的细铁丝截成两段，各自围成一个正三角形，那么这两个正三角形面积之和的最小值是（　　）cm^2.

A. $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$　　B. 4

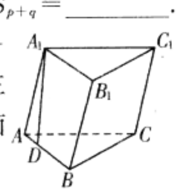
C. $3\sqrt{2}$　　D. $2\sqrt{3}$

二、填空题

7. 对于满足 $0\leqslant p\leqslant4$ 的所有实数 p，使不等式 $x^2+px>4x+p-3$ 成立的 x 的取值范围为________.

8. 已知等差数列的前 n 项和为 S_n，且 $S_p=S_q(p\neq q,p,q\in\mathbf{N}_+)$，则 $S_{p+q}=$________.

9. 如图，斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，底面为正三角形，侧棱长为 7，底面



ABC 与相邻两侧面 AB_1、AC_1 均成 $60°$ 角，则此棱柱的高为________.

三、解答题

10. 已知集合 $P=[\frac{1}{2},2]$，函数 $y=\log_2(ax^2-2x+2)$ 的定义域为 Q.

(1)若 $P\cap Q\neq\varnothing$，求实数 a 的取值范围；

(2)若方程 $\log_2(ax^2-2x+2)=2$ 在 $[\frac{1}{2},2]$ 内有解，求实数 a 的取值范围.

11. 通过研究学生的学习行为，心理学家发现，学生的接受能力依赖于老师引入概念和描述问题所用的时间，讲座开始时，学生的兴趣激增；中间有一段不太长的时间，学生的兴趣保持较理想的状态，随后学生的注意力开始分散，分析结果和实验表明，用 $f(x)$ 表示学生掌握和接受概念的能力（$f(x)$ 值越大，表示接受的能力越强），x 表示提出和讲授概念的时间（单位：分），可有以下的公式：

$$f(x)=\begin{cases}-0.1x^2+2.6x+43, & (0<x\leqslant 10)\\ 59, & (10<x\leqslant 16)\\ -3x+107. & (16<x\leqslant 30)\end{cases}$$

(1)开讲后多少分钟，学生的接受能力最强？能维持多长时间？

(2)开讲后 5 分钟与开讲后 20 分钟比较，学生的接受能力何时强一些？

(3)解一个数学题，需要 55 的接受能力以及 13 分钟时间，老师能否及时在学生一直达到所需接受能力的状态下讲授完这个难题？

12. 已知 $f(x)=\frac{2x-a}{x^2+2}(x\in\mathbf{R})$ 在区间 $[-1,1]$ 上是增函数.

(1)求实数 a 的值组成的集合 A；

(2)设关于 x 的方程 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的两个非零实根为 x_1,x_2，试问:是否存在实数 m，使得不等式 $m^2+tm+1\geqslant|x_1-x_2|$ 对任意 $a\in A$ 及 $t\in[-1,1]$ 恒成立？若存在，求出 m 的取值范围;若不存在，请说明理由.

专题二　转化与化归思想

专题概述

转化与化归就是在处理问题时，把待解决的问题或难解决的问题，通过某种转化过程，归结为一类已经解决或易解决的问题，最终求得问题的解答，转化与化归在数学中应用普遍.

转化有等价转化与非等价转化.等价转化要求转化过程中前因后果是充分必要的，才保证转化后的结果仍为原问题的结果.非等价转化其过程是充分或必要的，要对结论进行必要的修正，它能给人带来思维的闪光点，有利于问题的解决.

转化过程中应遵循的原则：

(1)熟悉化原则；(2)简单化原则；(3)直观性原则；(4)和谐化原则(变化问题的条件或结论，使其表现形式更符合数与形内部所表示和谐统一的形式，或者转化命题，使其推演有利于运用某种数学方法或符合人们的思维规律)；(5)正难则反原则.

方法指要

常用的转化方法：

(1)未知与已知转化；(2)函数与方程的转化；(3)空间与平面的转化；(4)数与形的相互转化；(5)高次与低次的转化；(6)多元与一元的转化；(7)主元与次元的转化；(8)等与不等的转化；(9)一般与特殊的转化；(10)整体与局部的转化；(11)静与动的转化；(12)正向与逆向的转化……

典型例题

【例 1】设三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 V，P、Q 分别是侧棱 AA_1、BB_1、CC_1 上的点，且 $PA=QC_1$，则四棱锥 $B-APQC$ 的体积为　　(　　)

A. $\frac{1}{6}V$　　B. $\frac{1}{4}V$

C. $\frac{1}{3}V$　　D. $\frac{1}{2}V$

解：特殊化法.取直棱柱，且 P、Q 为侧棱的中点，连接 AQ，则

$$\begin{aligned}V_{B-APQC}&=2V_{B-AQC}=2V_{Q-ABC}\\&=2\times\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\times QC\\&=2\times\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\times\frac{1}{2}C_1C\\&=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\times C_1C=\frac{1}{3}V.\end{aligned}$$

故选 C.

【例 2】若对于满足 $|p|\leqslant 2$ 的所有实数 p，不等式 $(\log_2 x)^2+p\log_2 x+1>2\log_2 x+p$ 恒成立，求实数 x 的取值范围.

解：令 $a=\log_2 x$，设 $f(p)=(a-1)p+a^2-2a+1$，则原不等式对任意 $|p|\leqslant 2$ 恒成立等价于对 $|p|\leqslant 2$，$f(p)>0$ 恒成立，等价于 $\begin{cases}f(2)>0,\\f(-2)>0.\end{cases}$

即 $\begin{cases}2(a-1)+a^2-2a+1>0,\\-2(a-1)+a^2-2a+1>0.\end{cases}$

即 $\begin{cases}a^2>1,\\a^2-4a+3>0.\end{cases}$

解得　$a>3$ 或 $a<-1$，所以 $\log_2 x>3$ 或 $\log_2 x<-1$，所以 $x>8$ 或 $0<x<\frac{1}{2}$.

故所求 x 的取值范围是 $\{x\mid 0<x<\frac{1}{2}$ 或 $x>8\}$.

注：作换元 $a=\log_2 x$，使原不等式的特征暴露得更明显，$a^2+pa+1>2a+p$ 有二次不等式的结构特征，但把它看作是关于 p 的一次不等式，从而构造了一个一次函数 $f(p)$，是该解法最给人以启发之处.

【例 3】一个四面体所有棱长都是$\sqrt{2}$，四个顶点在同一个球面上，则此球的表面积为 （　　）

A. 3π　　　　B. 4π

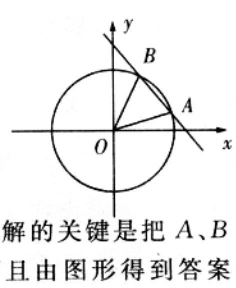
C. $3\sqrt{3}\pi$　　　　D. 6π

解：由题设可把正四面体补形成正方体，那么正四面体，正方体的中心与其外接球的球心共点，因正四面体棱长为$\sqrt{2}$，则正方体棱长为 1，从而外接球半径 $R=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$S_{球}=3\pi$. 故选 A.

注：若利用正四面体外接球的性质，构造直角三角形去解，过程冗长，容易出错. 此解的巧妙之处在于从局部入手为补形后从整体入手，从系统上去分析，更加明确地揭示了球半径满足的关系.

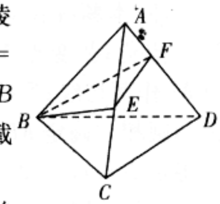
【例 4】已知两点坐标为 $A(\cos17°, \sin17°)$，$B(\cos77°, \sin77°)$，求直线 AB 的倾斜角.

解：由已知易得 A、B 两点在圆 $x^2+y^2=1$ 上，$\angle xOA=17°$，$\angle xOB=77°$，故 $\angle AOB=60°$，$\triangle ABO$ 为正三角形. 所以直线 AB 的倾斜角为 $77°+60°=137°$.

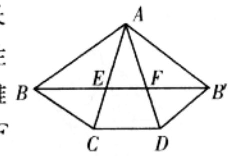


注：此解的关键是把 A、B 看成单位圆上的点，而且由图形得到答案，非常巧妙！如果由 $\tan\theta=\frac{\sin77°-\sin17°}{\cos77°-\cos17°}$，则需要用到和差化积公式.

【例 5】如图，正三棱锥 $A-BCD$ 中，$AB=2a$，$BC=a$，试求当过 B 的截面周长最短时，此截面的面积.



解：求空间折线段的最小值，常用侧面展开图，沿棱 AB 将三棱锥的侧面展开（如图），当 BE、EF、FB 在同一直线上时，截面周长最短，由正三棱锥的性质及相似三角形不难得到 $BE=FB'=a$，$EF=\frac{3}{4}a$，周长的最小值是$\frac{11}{4}a$，此时截面的面积是$\frac{3\sqrt{55}}{64}a^2$.



【例 6】已知抛物线 $y=x^2$ 的动弦 AB 所在直线与圆 $x^2+y^2=1$ 相切，分别过点 A、B 的抛物线的两条切线相交于点 M，求点 M 的轨迹方程.

解：设 $M(m,n)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则两切线方程为：

$y-y_1=2x_1(x-x_1)$，$y-y_2=2x_2(x-x_2)$，

因为同时经过 $M(m,n)$，

所以 $2mx_1-y_1-n=0$，$2mx_2-y_2-n=0$，

则动弦 AB 的方程为 $2mx-y-n=0$，

$$d=\frac{|n|}{\sqrt{4m^2+1}}=1\Rightarrow n^2-4m^2=1.$$

$$\begin{cases}2mx-y-n=0,\\ y=x^2.\end{cases}\Rightarrow x^2-2mx+n=0,$$

$\Delta=4m^2-4n>0$.

然后把定点 $M(m,n)$ 动点化就得到动点 $M(x,y)$ 的轨迹方程为 $y^2-4x^2=1$ 且满足 $y<x^2$，而 $y<x^2=\frac{y^2-1}{4}$ 且 $y^2-1\geqslant0\Rightarrow y\leqslant-1$ 或 $y>2+\sqrt{5}$，

$\therefore$动点 M 的轨迹方程为

$y^2-4x^2=1(y\leqslant-1$ 或 $y>2+\sqrt{5})$.