普通高等教育“十五”国家级规划教材

（高职高专教育）

高等数学学习辅导书

第二版

李心灿　主编

高等教育出版社

普通高等教育"十五"国家级规划教材

（高职高专教育）

高等数学学习辅导书

第二版

主　编　李心灿
副主编　徐　兵　蔡燧林
编　委　（以姓氏笔画为序）
计慕然　刘浩荣　刘　晓
吴　满　杨万禄　张魁元
金桂堂　龚冬保　谢　鹏

高等教育出版社

内容提要

本书是普通高等教育"十五"国家级规划教材，是与《高等数学》(第2版)配套的辅导书。每章都分为5部分：教学基本要求；重点；应明确的几个问题：知识背景、地位、作用及知识结构；思考题分析：引导学生掌握概念的要素、性质、特点，分析、诠释教材中的思考题；范例解析：分析讲解教材中典型习题，指出使用计算方法的条件，解题中易出现的错误。本书既是与教学同步的辅导书，又是阶段复习指导书，有助于帮助学生掌握知识框架，理出知识脉络，培养学生分析问题、解决问题的能力。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习辅导书/李心灿主编.—2版,—北京：高等教育出版社,2003.4
ISBN 7-04-012403-3

Ⅰ.高... Ⅱ.李... Ⅲ.高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第014088号

责任编辑 薛春玲 **封面设计** 杨立新 **责任绘图** 尹文军
版式设计 马静如 **责任校对** 夏 晔 **责任印制** 孔 源

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市东城区沙滩后街55号
邮政编码 100009
传 真 010-64014048

购书热线 010-64054588
免费咨询 800-810-0598
网 址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn

经 销 新华书店北京发行所
排 版 高等教育出版社照排中心
印 刷 河北新华印刷一厂

开 本 787×1092 1/16
印 张 11
字 数 260 000

版 次 1999年9月第1版
2003年5月第2版
印 次 2003年5月第1次印刷
定 价 12.10元

出版说明

为加强高职高专教育的教材建设工作，2000年教育部高等教育司颁发了《关于加强高职高专教育教材建设的若干意见》（教高司[2000]19号），提出了“力争经过5年的努力，编写、出版500本左右高职高专教育规划教材”的目标，并将高职高专教育规划教材的建设工作分为两步实施：先用2至3年时间，在继承原有教材建设成果的基础上，充分汲取近年来高职高专院校在探索培养高等技术应用性专门人才和教材建设方面取得的成功经验，解决好高职高专教育教材的有无问题；然后，再用2至3年的时间，在实施《新世纪高职高专教育人才培养模式和教学内容体系改革与建设项目计划》立项研究的基础上，推出一批特色鲜明的高质量的高职高专教育教材。根据这一精神，有关院校和出版社从2000年秋季开始，积极组织编写和出版了一批“教育部高职高专规划教材”。这些高职高专规划教材是依据1999年教育部组织制定的《高职高专教育基础课程教学基本要求》（草案）和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》（草案）编写的，随着这些教材的陆续出版，基本上解决了高职高专教材的有无问题，完成了教育部高职高专规划教材建设工作的第一步。

2002年教育部确定了普通高等教育“十五”国家级教材规划选题，将高职高专教育规划教材纳入其中。“十五”国家级规划教材的建设将以“实施精品战略，抓好重点规划”为指导方针，重点抓好公共基础课、专业基础课和专业主干课教材的建设，特别要注意选择一部分原来基础较好的优秀教材进行修订使其逐步形成精品教材；同时还要扩大教材品种，实现教材系列配套，并处理好教材的统一性与多样化，基本教材与辅助教材、文字教材与软件教材的关系，在此基础上形成特色鲜明、一纲多本、优化配套的高职高专教育教材体系。

普通高等教育“十五”国家级规划教材（高职高专教育）适用于高等职业学校、高等专科学校、成人高校及本科院校举办的二级职业技术学院、继续教育学院和民办高校使用。

教育部高等教育司

2002年11月30日

前　言

本书是普通高等教育“十五”国家级规划教材，是与《高等数学》(第二版)配套的学习辅导书。

本书按教材章次对应编写。每章所包含的内容及编写意图：“教学基本要求”及“重点”，是为了便于学生更主动地去学习；各章所提出的“应该明确的几个问题”及“思考题分析”，是为了使“无疑者须教有疑，有疑者却要疑”，有助于学生理出知识脉络与框架，理解、掌握该章的主要概念、理论和方法；“范例解析”，是为了有助于学生明确解题的思路、方法及解题时应该注意的有关问题，从而提高解题能力。

本书既是与教学同步的学习辅导书，又是阶段复习的指导书，也是学生不见面的辅导教师。它有助于使学生对“高等数学”这门课程的基本概念、基本理论、基本方法有更全面、深刻地理解和掌握，有利于培养学生分析问题、解决问题的能力。书中排小五号字的内容不作基本要求。

本书的编辑和出版，自始至终得到了高等教育出版社有关领导及该社高职高专分社张思挚副社长的重视，并给予了大力支持和帮助。在此一并致以诚挚谢意。

由于我们水平所限，书中若有不当之处，恳请同仁和读者批评指正。

编者

2002 年 12 月

目　　录

第一章 函 数

一、教学基本要求

1. 掌握函数的概念，了解分段函数.
2. 知道函数的有界性、单调性、奇偶性和周期性.
3. 理解反函数与复合函数的概念.
4. 熟悉基本初等函数的性质及图形.
5. 会建立简单实际问题中的函数关系.

二、重点

函数的定义、基本初等函数和初等函数的概念.

三、应该明确的几个问题

问题1 高等数学与初等数学划分的依据是什么？

答 通常可以将数学的发展史划分为五个阶段：

第一阶段：数学萌芽时期.这个时期从远古时代起，止于公元前5世纪.在这个时期里，逐渐形成了数的概念，产生了数的运算方法，几何有了初步发展.但这个时期的知识都是片断的、零碎的.这个时期是算术、几何形成的时期，但它们还没有分开，彼此紧密地交织在一起，也没有形成严格、完整的体系，更重要的是缺乏逻辑，基本上看不到命题的证明和演绎推理.

第二阶段：常量数学时期.即“初等数学”时期，浙个时期开始于公元前六七世纪，终止于17世纪中叶，延续了两千年左右.在这个时期，数学已由具体的、实验阶段过渡到抽象的阶段，并逐渐形成一门独立的、演绎的科学，在这个时期里，算术、初等几何、初等代数、三角学都已形成独立的分支.现在我国中学数学课的主要内容反映了这个时期的基本成果.

第三阶段：变量数学时期，即“高等数学”时期，这个时期以17世纪中叶笛卡儿的解析几何诞生为起点，终止于19世纪中叶.第三阶段与第二阶段的主要区别在于：第二阶段是用静止的方法研究世界的有关要素.而第三阶段是用运动的、变化的观点来探究事物的变化和发展规律.这个时期产生了微积分、解析几何、微分方程等学科.现在我国高等理工科院校中高等数学课程的主要内容反映了这个时期的主要成果.

第四阶段：近代数学时期.这个时期始于19世纪中叶，止于20世纪40年代，在这个时期里，数学研究的对象被推广，并引起量的关系和空间形式在概念本身的重大突破，产生了非欧几何、

数理逻辑，分析中产生了新理论、新方向，出现了函数逼近论，实变函数论、复变函数论等新学科.

第五阶段：现代数学时期.这个时期以20世纪40年代电子计算机的发明为标志而开始的.在这个时期应用数学学科形成并发展.另一方面，数理逻辑，函数论、微分方程等学科向着更抽象、更综合的方向发展，并出现了许多新的分支学科.特别是数学的理论与方法跟电子计算机相结合产生了许多新技术.

我们所讲的“高等数学”课程包括空间解析几何、微积分、微分方程等.所谓“初等”与“高等”之分是依惯例而形成的，并没有其划分的严格标准.

问题2 我们的教材中对函数的概念采用了“依赖关系”的定义，而高中数学教材中对函数的概念采用了“集合对应”的定义，这该怎样解释？“掌握函数概念”应该达到什么要求？

答 函数是一个变量对另一个(或多个)变量的依赖关系的抽象模型.函数概念是数学中的重要概念之一.微积分学是研究函数的学科.了解函数的发展史有助于解释上面的问题.函数的发展可以分为四个时期：

第一时期为17世纪初叶以前，其特点是用文字描述来表示函数.

第二时期为17世纪中、下叶，其特点是把函数当作曲线来研究.

第三时期为18世纪，其特点是将解析表达式定义为函数.

第四时期为19世纪初叶之后，这个时期给出了函数的明确的近代定义：“若变量x在允许范围内的每一个确定的值，变量y按照某个确定的规则有惟一的值与之对应，则称y为x的函数，记为$y=f(x)$”.我们称之为“依赖关系”定义.这是我国初中数学教材中普遍使用的定义.目前我国高等理工科院校的高等数学教材中也多采用“依赖关系”形式的函数定义.

19世纪70年代集合理论问世之后，函数又被定义为集合间的对应关系：“设A，B为两个集合，如果按照某种对应法则f，对于集合A中的任何一个元素，在集合B中都有惟一的元素和它对应，那么，这样的对应叫做集合A到集合B的映射，又称为函数.”我们称之为函数的“集合对应”定义.一些“集合对应”论拥护者指出“依赖关系”的函数定义的提法不严密，对于变量而言，必须是随某个过程而变，它不能脱离过程而“自变”，因此“依赖关系”的定义中含有不明确的因素.而“集合对应”的函数定义则无需依赖“过程”，从而消除了“依赖关系”定义中的不明确因素.然而到了20世纪初期，一些数学家指出“集合对应”函数定义中所指出的“对应”一词也是不明确的因素，进而提出了“序偶”形式的函数的新定义.到了20世纪60年代，一些数学教科书采用了“序偶”形式的函数的新定义.

目前我国高中教材中关于函数的定义则采用了上述“集合对应”定义.部分高等学校的教科书中也采用“集合对应”定义函数.从数学的严格性来说，两种定义都有不明确的因素.但这并不意味着“依赖关系”的函数定义不好，事实上它有易于理解、便于应用等许多优点.这也是目前国内外数学教科书中仍普遍使用“依赖关系”的函数定义主要原因.

教学基本要求指出“掌握函数的概念”，要达到这一点，应该明确函数定义的两个主要特征.

问题3 函数定义的主要特征是什么？

答 “如果自变量x在允许范围X内任取一个数值时，变量y按一定的规则总有惟一确定的数值和它对应，则称y是x的函数，常记为$y=f(x)$.”我们称之为函数的“依赖关系”定义.这个定义的关键特征为

——x的允许范围，即函数的定义域.

——对应规则,即函数的依赖关系.

可以说函数概念有两个基本要素:定义域、对应规则.

只有当两个函数的定义域与对应规则完全相同时,才能认为它们是同一个函数.

读者仔细分析教材就可以发现,"对应规则"是本章的一条知识线,它串起了许多概念.由于函数的定义中并没有限制"对应规则"与 y 的取值特点,因此可能出现:

(1) 当自变量 x 的值变动时,变量 y 的取值并不一定随 x 的变化而变化,y 可能总取一个值.

如 $y=2$ 表示不论 x 取什么值,所对应的 y 的值总是2,因此它符合函数的定义,可以说 $y=2$ 是函数.一般情形 $y=c$ 又称为常量函数.

(2) 函数对应规则的形式没有限制,是多种多样的.

① 如果函数对应规则形式是解析表达式 $y=f(x)$,可称函数为显式表示.

② 如果函数对应规则形式是方程 $F(x,y)=0$,则可称 y 为 x 的隐函数.

③ 如果函数对应规则是由几个解析表达式而表示的,如

$$f(x)=\begin{cases} x, & x<0, \\ x+1, & 0<x\leqslant 1, \\ x^2, & x>1, \end{cases}$$

则称 $f(x)$为分段函数.注意这里不可说 $f(x)$是三个函数.应该说 $f(x)$是定义域为$(-\infty,+\infty)$的一个函数,它是由三个解析表达式来表达.

④ 如果对应规则是由表格或图形表示出来,那么常称这种表示为函数的表格表示法或图形表示法.例如,自动测温仪描绘的"气温曲线"表示了"气温与时间的函数关系".

⑤ 如果 x 与 y 通过第三个变量而联系起来,如

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\phi(t) \end{cases}$$

是通过变量 t,联系起 y 与 x 的函数关系,则称这种函数关系为参数方程表示的函数.

问题4 研究函数的单调性、有界性是否能离开自变量的范围?

答 不能,例如 $y=x^2$ 在 $x<0$ 时为单调减少函数;在 $x>0$ 时为单调增加函数;在$(-\infty,+\infty)$内为非单调函数.

同样,如果 $y=x^2$,可知在$(0,1)$内为有界函数;在$(-\infty,0)$内为无界函数.

如果说函数 $f(x)$为单调函数或有界函数,而没有指明其范围,通常要理解为是在其定义域内而言.

一般初等函数的有界性与单调性常用函数的导数来判定(留待第四章介绍).本章只限于利用定义讨论一些简单情形.

四、思考题分析

思考题1 设 $f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$,且对于任意的 $k>0$,$f(x)$在$[-k,k]$上为有界函数,那么 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内是否一定为有界函数?

分析 只需考察 $f(x)=x^2$,其定义域为$(-\infty,+\infty)$,对于任意的 $k>0$,$f(x)=x^2$ 在

$[-k,k]$上为有界函数，但是 $f(x)=x^2$ 在$(-\infty,+\infty)$内为无界函数.

此例表明："直观想像"的结论并不可靠.此例也表明：在有限区间上的结论不能随意推广到无穷区间上.

思考题 2 设 $f(x)$为$[a,b]$上的有界函数，试问函数 $f(x)$在$[a,b]$上的界是否惟一？

分析 只需注意函数 $f(x)$有界性的定义."若 $f(x)$的定义域为 D，$X\subset D$，如果存在正数 M，使得对于任意的 $x\in X$，都满足不等式$|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$在 X 上有界."这里对 M 并没有附加条件，由有界性定义可知，若 $f(x)=\sin x$，设 $M_1=1$，$M_2=2$，$M_3=3$，对于任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，总有$|\sin x|\leqslant M_1$，$|\sin x|<M_2$，$|\sin x|<M_3$.可以说 $M_1=1$，$M_2=2$，$M_3=3$ 都是 $f(x)=\sin x$ 的界.因此说 $f(x)$在$[a,b]$上如果有界，那么它的界并不惟一.如果 $M>0$ 为其一个界，则任意 $M_1>M$ 也必定为其界.

通常判定函数 $f(x)$在$[a,b]$上有界，只要能找到一个界即可.如果说 $f(x)$在$[a,b]$上无界，只需对任意给定的 $M>0$，找出一个 x_M 使$|f(x_M)|>M$.

思考题 3 是否每一个函数 $y=f(x)$都有反函数？

分析 先考察函数 $f(x)=c$，并不存在反函数，因此可以说，不是每个函数都存在反函数.

函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上存在反函数的充分条件为 $f(x)$在$[a,b]$上严格单调增加(或减少)，但这个定理的证明不属于教学基本要求.本章只要求读者理解反函数的概念，知道反函数存在的充分条件，知道由 $y=f(x)$求其反函数的步骤，会求简单函数的反函数.

思考题 4 若由 $F(x,y)=0$ 确定了 y 为 x 的函数，它是否一定可以确定出 $y=f(x)$的显式形式？

分析 对于一些复杂的隐函数 $F(x,y)=0$，往往不能用显式形式 $y=f(x)$表示出来.例如 $xy-2^x+2^y=0$.

思考题 5 是否 $y=f(u)$，$u=g(x)$一定能复合成 y 为 x 的函数？

分析 复合函数的定义可以解说为：若对于 x 在某一范围内的每一个确定的值，u 按某规则有一个确定值与之相对应 $u=g(x)$.而对此 u 的确定值，y 按某规则有确定值 y 与之相对应 $y=f(u)$，这样就确定了 y 与 x 之间的函数关系 $y=f(g(x))$，并称 y 是由 $y=f(u)$和 $u=g(x)$复合为 x 的函数.

考察 $y=\ln u$，其定义域为$(0,+\infty)$.而 $u=x-\sqrt{1+x^2}$的值域为$(-\infty,0)$，即 u 的函数值为负值.u 的定义域为$(-\infty,+\infty)$，对于任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，$y=\ln u=\ln(x-\sqrt{1+x^2})$都无意义.可知 $y=\ln u$ 与 $u=x-\sqrt{1+x^2}$ 不能复合为 $y=y(x)$.只有当 $y=f(u)$的定义域与 $u=g(x)$的值域有公共部分(即交集非空)时，才能复合成复合函数 $y=f(g(x))$.

五、范例解析

例 1 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2-9}$； (2) $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$；

(3) $y=\lg(x-1)+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$.

解析

(1) 为使分式有意义,要求分母 $x^2-9\neq0$;分子的二次根号下的表达式值应非负,即 $x+1\geqslant0$.因此要使函数有意义必须满足

$$\begin{cases}x^2-9\neq0,\\x+1\geqslant0,\end{cases}$$

即,$x\geqslant-1$ 且 $x\neq3$.所以,函数的定义域为$[-1,3)\cup(3,+\infty)$.

(2) 注意到函数 $y=\arcsin u$ 的定义域为$[-1,1]$,为使 $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$有意义,需保证

$$-1\leqslant\frac{x-1}{2}\leqslant1,$$

即,$-1\leqslant x\leqslant3$.所以,函数的定义域为$[-1,3]$.

(3) 第一项 $\lg(x-1)$中真数应是正数,$x-1>0$;第二项中分母是$\sqrt{x+1}$应满足 $x+1>0$,为使函数 $y=\lg(x-1)+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$有意义,$x$ 须满足

$$\begin{cases}x-1>0,\\x+1>0,\end{cases}$$

即 $x>1$,所以函数的定义域为$(1,+\infty)$.

关于求函数的定义域问题,如果函数是由实际问题得出,则定义域根据实际情况而定;对于一般公式法表达的函数,只需使公式有意义就可以.通常考虑以下几点:

1. 分母不能为零;
2. 负数不能开偶次方;
3. 对数的真数是正数;

以及注意 $y=\arcsin x$ 和 $y=\arccos x$ 的定义域为$[-1,1]$等.

例 2 已知函数 $f(x)$的定义域是$[0,1]$,求下列函数的定义域:

(1) $h(x)=f(x^2)$;

(2) $g(x)=f(x+a)+f(x-a)(a>0)$.

解析

(1) 为使 $h(x)=f(x^2)$有意义,必须

$$0\leqslant x^2\leqslant1,$$

即 $-1\leqslant x\leqslant1$.所以 $h(x)$的定义域为$[-1,1]$.

(2) 为使 $g(x)=f(x+a)+f(x-a)$有意义,必须两项均有意义,因此应有

$$\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant1,\\0\leqslant x-a\leqslant1,\end{cases}$$

即 $x\in[-a,1-a]$及 $x\in[a,1+a]$同时成立.$g(x)$的定义域为$[-a,1-a]$与$[a,1+a]$的公共部分(即交集).因此当 $a\leqslant1-a$,即 $0<a\leqslant\dfrac{1}{2}$时,此时 $g(x)$的定义域为$[-a,1-a]\cap[a,$

$1+a]=[a,1-a]$.

当 $a>1-a$,即 $a>\frac{1}{2}$ 时 $[-a,1-a]\cap[a,1+a]=\varnothing$,此时 $g(x)$ 的定义域为空集,即函数无意义.

例 3 求下列函数的定义域及指定的函数值:

(1) $f(x)=2x+3$,求 $f(0),f(2),f(2+h)$ 及 $\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$;

(2) $\varphi(x)=\begin{cases}\sin x, x<0\\ x^2, & 0\leqslant x<1\\ \ln x, & 1\leqslant x\leqslant \mathrm{e}.\end{cases}$,求 $\varphi\left(-\frac{\pi}{2}\right),\varphi(0),\varphi\left(\frac{1}{2}\right),\varphi(1),\varphi(2)$.

解析

(1) $f(x)=2x+3$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

$f(0)=2\times 0+3=3$, $f(2)=2\times 2+3=7$, $f(2+h)=2\times(2+h)+3=7+2h$,

$\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\frac{7+2h-7}{h}=2$.

(2) $\varphi(x)$ 的定义域为 $(-\infty,\mathrm{e}]$.

因为 $-\frac{\pi}{2}<0$,所以 $\varphi\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$;因为 $0\in[0,1)$,所以 $\varphi(0)=0^2=0$;因为 $\frac{1}{2}\in[0,1)$,所以 $\varphi\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$;因为 $1\in[1,\mathrm{e}]$ 所以 $\varphi(1)=\ln 1=0$;因为 $2\in[1,\mathrm{e}]$,所以 $\varphi(2)=\ln 2$.

例 4 下列各题中,函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否相同?为什么?

(1) $f(x)=\lg x^2, g(x)=2\lg x$;

(2) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}, g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$;

(3) $f(x)=\sqrt{x}, g(x)=\frac{x}{\sqrt{x}}$;

(4) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}, g(x)=\frac{\sqrt{x}}{x}$.

解析 如果两个函数的对应规则和定义域都相同,则这两个函数是相同的,否则就是不相同的.

(1) 因为 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,而 $g(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,它们的定义域不同,所以函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是不相同的.如果将 $f(x)$ 的定义域限制在 $(0,+\infty)$ 内,则与 $g(x)$ 相同.

(2) 在 $(-\infty,+\infty)$ 上均有

$$f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}=x\sqrt[3]{x-1}=g(x),$$

它们不但定义域相同,并且对应规则相同,所以是同一个函数.

(3) 因为 $f(x)$ 的定义域为 $[0,+\infty)$,而 $g(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,它们的定义域不同,所以函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不是同一函数.如果将 $f(x)$ 的定义域限制在 $(0,+\infty)$ 内则与 $g(x)$ 相同.

(4) 因为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域相同,均为 $(0,+\infty)$,并且

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}}{x}=g(x),$$

所以，$f(x)$与$g(x)$是同一个函数．

例 5 (1)设$f(x+1)=x^2+4x+2$，求$f(x)$．

(2)设$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}+3$，求$f(x)$．

解析 此类问题是复合函数的运算问题．通常可分为两种类型：

1．已知函数$f(x)$和$g(x)$的表达式，求函数$f[g(x)]$的表达式．

这类问题相当于已知函数$y=f(u)$及函数$u=g(x)$，求复合函数$y=f(g(x))$的表达式．如例 3 中，已知$f(x)=2x+3$，求$f(2+h)$，就是此类问题．

2．已知$f[g(x)]$的表达式，求$f(x)$的表达式．

这类问题的求解方法有两种途径：

(1) 令$u=g(x)$，从中反解出$x=\varphi(u)$，从而由$f[g(x)]=f(u)$得到$f(u)$的表达式，再将其中的u换为x，即得到$f(x)$的表达式．

(2) 将$f[g(x)]$的表达式凑成$g(x)$的函数关系式，然后将所有$g(x)$的位置换为x，则得到$f(x)$．

如本例中(1)题可以用两种方法解之．

解法 1　设$x+1=t$，则$x=t-1$，从而有

$$\begin{aligned}f(t)&=(t-1)^2+4(t-1)+2\\&=t^2+2t-1,\end{aligned}$$

故

$$f(x)=x^2+2x-1.$$

解法 2　将表达式右端化为$(x+1)$的函数关系，有

$$\begin{aligned}f(x+1)&=x^2+4x+2\\&=(x^2+2x+1)+(2x+2)-1\\&=(x+1)^2+2(x+1)-1,\end{aligned}$$

从而

$$f(x)=x^2+2x-1.$$

本例中(2)题，如果令$u=x+\frac{1}{x}$，此时x不易简单表达．于是根据所给表达式按第 2 种解法凑成

$$\begin{aligned}f\left(x+\frac{1}{x}\right)&=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2+3\\&=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+1,\end{aligned}$$

得到

$$f(x)=x^2+1.$$

例 6 设$f(x)=x^2$，$g(x)=2^x$，求$f[g(x)]$及$g[f(x)]$．

解析 求$f[g(x)]$时，可理解为$f(u)=u^2$，

$$u=g(x)=2^x,$$

因此

$$f[g(x)]=[g(x)]^2=(2^x)^2=2^{2x}.$$

同理，

$$g[f(x)]=2^{f(x)}=2^{x^2}.$$

注意，2^{2x} 与 2^{x^2} 是两个不同的函数.

例 7 设

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ 0, & |x|=1,\\ -1, & |x|>1,\end{cases}\quad g(x)=e^x,$$

求 $f[g(x)]$，$g[f(x)]$.

解析 将 $g(x)=e^x$ 看成中间变量，有

$$f[g(x)]=f(e^x)=\begin{cases}1, & |e^x|<1,\\ 0, & |e^x|=1,\\ -1, & |e^x|>1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1, & e^x<1,\\ 0, & e^x=1,\\ -1, & e^x>1\end{cases}=\begin{cases}1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x>0.\end{cases}$$

将 $f(x)$ 看成中间变量，有

$$g[f(x)]=e^{f(x)}=\begin{cases}e^1, & |x|<1,\\ e^0, & |x|=1,\\ e^{-1}, & |x|>1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}e, & |x|<1,\\ 1, & |x|=1,\\ e^{-1}, & |x|>1.\end{cases}$$

例 8 设 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$，试验证 $f\{f[f(x)]\}=f(x)$，并求 $f\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)(x\neq0,x\neq1)$.

解析 此题可从内往外逐层求复合函数的表达式，先将 $f(x)$ 中的 x 用 $f(x)$ 代替，得到 $f[f(x)]$，同理，用 $f[f(x)]$ 代替 $f(x)$ 中的 x，得到的表达式.

由于

$$f[f(x)]=\frac{f(x)}{f(x)-1}=\frac{\dfrac{x}{x-1}}{\dfrac{x}{x-1}-1}$$

$$=\frac{\dfrac{x}{x-1}}{\dfrac{1}{x-1}}=x\quad(x\neq1).$$

所以

$$f\{f[f(x)]\}=f(x)=\frac{x}{x-1}.$$

$$f\left(\frac{1}{f(x)}\right)=f\left(\frac{x-1}{x}\right)=\frac{\dfrac{x-1}{x}}{\dfrac{x-1}{x}-1}=1-x\,(x\neq0,x\neq1).$$

例 9 下列函数哪些是奇函数？哪些是偶函数？哪些是既非奇函数又非偶函数？

(1) $f(x)=\frac{a^x+a^{-x}}{2}$；

(2) $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$；

(3) $f(x)=\sin x+\cos x$.

解析

(1) 因为

$$f(-x)=\frac{a^{-x}+a^x}{2}=\frac{a^x+a^{-x}}{2}=f(x),$$

所以 $f(x)$是偶函数.

(2) 因为

$$\begin{aligned}f(-x)&=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})\\&=\ln\frac{(-x+\sqrt{1+x^2})(x+\sqrt{1+x^2})}{x+\sqrt{1+x^2}}\\&=\ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\\&=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})\\&=-f(x),\end{aligned}$$

所以，$f(x)$为奇函数.

(3) 因为

$$\begin{aligned}f(-x)&=\sin(-x)+\cos(-x)\\&=-\sin x+\cos x,\end{aligned}$$

且

$$-f(x)=-\sin x-\cos x\neq f(-x),$$

所以，$f(x)$既非偶函数也非奇函数.

例 10 对于定义在对称区间$(-l,l)$上的任意函数 $f(x)$，证明 $F(x)=x^2f(x)f(-x)$是偶函数.

解析 由于

$$\begin{aligned}F(-x)&=(-x)^2f(-x)f(x)\\&=x^2f(x)f(-x)\\&=F(x),\end{aligned}$$

所以 $F(x)$为偶函数.

例 11 设函数 $f(x)$，$g(x)$在区间(a,b)内都是有界函数，证明：函数 $f(x)+g(x)$在(a,b)内也是有界函数.

解析 因为 $f(x)$，$g(x)$在(a,b)内有界，所以存在正数 M_1 和 M_2 使对一切的 $x\in(a,b)$，都有

$$|f(x)|\leqslant M_1,\quad |g(x)|\leqslant M_2,$$

从而有

$$|f(x)+g(x)|\leqslant|f(x)|+|g(x)|\leqslant M_1+M_2=M.$$

所以函数 $f(x)+g(x)$ 在区间 (a,b) 内是有界函数.

例 12 求下列周期函数的周期:

(1) $y=\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{5}\right)$;

(2) $y=\sin x+\cos x$;

(3) $y=\sin x\cos x$;

(4) $y=\sin^2 x$;

(5) $y=\sin 2x+\cos 3x$.

解析 求周期函数的周期,可以利用已知周期函数的结论,如 $y=\sin x$ 的周期是 2π,$y=\tan x$ 的周期是 π 等,还可以应用下面的结论:

设 $R=(-\infty,+\infty)$,$f(x)$ 是 R 上的以 T 为周期的周期函数,则 $F(x)=f(ax+b)$ 也是周期函数,周期为 $\dfrac{T}{a}$(其中 $a>0$,b 为实数),因为:$F\left(\dfrac{T}{a}+x\right)=f\left(a\left(\dfrac{T}{a}+x\right)+b\right)=f(T+ax+b)=f(ax+b)=F(x)$.

在求由几个不同的三角函数构成的函数的周期时,一般要把它化为由某一个三角函数表示的函数,然后再求周期.若函数 $f(x)$ 是两个三角函数 $f_1(x)$,$f_2(x)$ 的代数和,且 $f_1(x)$,$f_2(x)$ 的周期分别是 T_1,T_2,则 $f(x)$ 也是周期函数,其周期 T 为 T_1 与 T_2 的最小公倍数(证明留给有兴趣的读者自己去完成).

(1) 因为 $\sin x$ 的周期是 2π,所以 $y=\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{5}\right)$ 的周期为 $\dfrac{2\pi}{3}$.

(2) 因为 $\sin x$ 及 $\cos x$ 的周期都是 2π,所以 $y=\sin x+\cos x$ 的周期为 2π.

(3) 因为

$$y=\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x,$$

所以它的周期为 $\dfrac{2\pi}{2}=\pi$.

(4) 因为

$$y=\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x,$$

所以 $y=\sin^2 x$ 的周期为 $\dfrac{2\pi}{2}=\pi$.

(5) 因为 $\sin 2x$ 的周期是 $\dfrac{2\pi}{2}=\pi$,$\cos 3x$ 的周期是 $\dfrac{2\pi}{3}$,所以 $y=\sin 2x+\cos 3x$ 的周期为 2π(因为 1 与 $\dfrac{2}{3}$ 的最小公倍数为 2).

例 13 求下列函数的反函数:

(1) $y=ax+b\ (a\neq 0)$;

(2) $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$.

解析

(1) 从 $y=ax+b$ 中解出 x,得

$$x=\frac{1}{a}y-\frac{b}{a},$$

所以,反函数为

$$y=\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}.$$

(2) 从 $y=\frac{2^x}{2^x+1}$ 中解出 x,得

$$x=\log_2\frac{y}{1-y},$$

所以其反函数为

$$y=\log_2\frac{x}{1-x}.$$

例 14 设 $f(x)$ 为定义在 $(-l,l)$ 内的奇函数,若 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内严格单调增,证明 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也严格单调增.

解析 任取 $x_1,x_2\in(-l,0)$ 且 $x_1<x_2$,则 $-x_1,-x_2\in(0,l)$,且 $-x_2<-x_1$,由于 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 上严格单调增,所以有

$$f(-x_2)<f(-x_1),$$

又由于 $f(x)$ 是奇函数,上式可写成

$$-f(x_2)<-f(x_1),$$

即

$$f(x_1)<f(x_2).$$

所以,$f(x)$ 在 $(-l,0)$ 上是严格单调增.

例 15 已知铁路线上 AB 段的距离为 100 km. 工厂 C 离 A 处为 20 km,AC 垂直于 AB(见图 1.1). 为了运输需要,要在 AB 线上选定一点 D 向工厂 C 建筑一条公路,已知铁路上每吨货物每千米的运费为 $3k$ 元,公路上每吨货物每千米运费为 $5k$ 元(k 为某个正数). 设 $AD=x$(km),建立使一吨货物从供应站 B 运到工厂 C 的总运费与 x 之间的函数关系式.

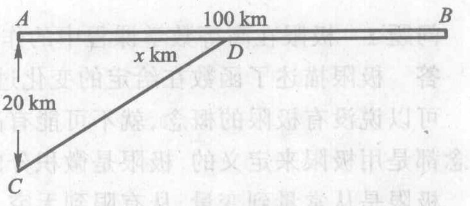

图 1.1

解析 因为 $DB=100-x$,$CD=\sqrt{20^2+x^2}=\sqrt{400+x^2}$,设从 B 点经 D 点到 C 点每吨货物需要的总运费为 y,则

$$y=5k\cdot CD+3k\cdot DB,$$

即

$$y=5k\sqrt{400+x^2}+3k(100-x),\quad 0\leqslant x\leqslant 100.$$