普通高等教育“十五”国家级规划教材

高等数学

下册

李 忠 周建莹 编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

普通高等教育"十五"国家级规划教材

高　等　数　学

（下　册）

李　忠　周建莹　编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学·下册/李忠,周建莹编著.—北京:北京大学出版社,2004.6
(国家"十五"规划教材)
ISBN 7-301-07439-5

Ⅰ.高… Ⅱ.①李… ②周… Ⅲ.高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 043027 号

书　　　名:高等数学(下册)
著作责任者:李　忠　周建莹　编著
责 任 编 辑:刘　勇
标 准 书 号:ISBN 7-301-07439-5/O·0596
出 版 发 行:北京大学出版社
地　　　址:北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　　址:http://www.pup.cn　电子信箱:zpup@pup.pku.edu.cn
电　　　话:邮购部 62752015　发行部 62750672　理科编辑部 62752021
　　　　　　出版部 62754962
印　刷　者:三河市新世纪印务有限公司
经　销　者:新华书店
　　　　　　650mm×980mm　16 开本　23.75 印张　401 千字
　　　　　　2004 年 6 月第 1 版　2006 年 7 月第 4 次印刷
印　　　数:13201—18300 册
定　　　价:26.00 元

本书前身《高等数学简明教程》(全三册)
获 2002 年全国普通高等学校
优秀教材一等奖

内容简介

本套教材是综合性大学、高等师范院校及其他理工科大学中的非数学类各专业(尤其是物理类专业)学生的高等数学教材.全书共分上、下两册.上册内容是一元函数的微积分,向量代数与空间解析几何,多元函数微分学;下册内容是多元函数积分学,级数与常微分方程.

本套教材的前身《高等数学简明教程》(全三册,北京大学出版社,1998)曾荣获教育部2002年全国普通高等学校优秀教材一等奖,本书是在原书的基础上修订而成,修订内容请参看本书“序言”.

本书为下册,共分六章.内容包括:重积分、曲线积分与曲面积分、常微分方程、无穷级数、广义积分与含参变量的积分、傅氏级数等.

本书是作者在北京大学进行教学试点的成果.它对传统的高等数学课的内容体系作了适当的整合,力求突出数学概念与理论的实质,避免过分形式化,使读者对所讲内容感到朴实自然.本书强调数学理论与其他学科的联系.书中附有历史的注记,简要叙述相关概念和理论的发展演变过程,以及重要数学家的贡献.本书语言流畅,叙述简捷,深入浅出,有较多的例题,便于读者自学.每小节有适量习题,每章配置综合练习题,习题给出答案或提示供读者参考.

目　　录

第七章　重　积　分

重积分的概念是一元函数的定积分概念向多元函数情况的推广．它有广泛的实际背景及应用．常用的重积分有两种：二重积分与三重积分．本章的内容是介绍这两种积分的概念、计算、换元法则及其应用．

§1　二重积分的概念与性质

1. 二重积分的概念

我们知道，一元函数的定积分是通过"分割、近似代替、求和、取极限"的步骤来定义的．关于二元函数的重积分也是通过类似的步骤定义的．

设函数 $z=f(x,y)$ 在一个由有限条光滑曲线围成的区域 D 上有定义．为定义关于 $f(x,y)$ 的二重积分，我们首先要弄清什么是关于定义区域 D 的一种分割．设想有两组曲线，它们彼此横截，并在 (x,y) 平面上形成了一个网格．这个网格将 D 分成有限个闭子区域 $D_1,D_2,\cdots,D_n$；它们彼此互不重叠，且 $D=D_1\cup D_2\cup\cdots\cup D_n$．这样的一组子区域 $\{D_1,D_2,\cdots,D_n\}$ 就称作 D 的一种**分割**（见图 7.1）．

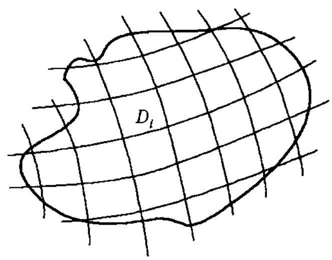

图　7.1

今后，我们用 $\Delta\sigma_i$ 表示 D_i 的面积，并用 λ 表示 D_i 的直径的最大者．所谓 D_i 的直径是指 D_i 中任意两点的距离的最大值．

定义　设 $z=f(x,y)$ 是定义在有界闭区域 D 上的函数．若对 D 的任意分割 $\{D_1,D_2,\cdots,D_n\}$ 及任意选择的 $(x_i,y_i)\in D_i\,(i=1,2,\cdots,n)$，当 $\lambda\to 0$ 时，和数

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta\sigma_i$$

总有极限，则称该极限为 $f(x,y)$ 在 D 上的**二重积分**，记作

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \quad 或 \quad \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

这里 D 称作**积分区域**,而 $f(x,y)$ 称作**被积函数**.

在定义中,我们强调了极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta\sigma_i$$

与区域 D 的分割及中间点 $(x_i,y_i)\in D_i$ 的选取无关. 这一点与一元函数的定积分的情况是一致的.

根据定义,我们立即推出

$$\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma = D \text{ 的面积}.$$

例 1 设 D 为有界闭区域,$z=f(x,y)$ 是 D 上的连续函数,且 $f(x,y)\geqslant 0$. 那么二重积分

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

代表在三维空间中区域 D 上以曲面 $z=f(x,y)$ 为顶的柱体的体积,见图 7.2.

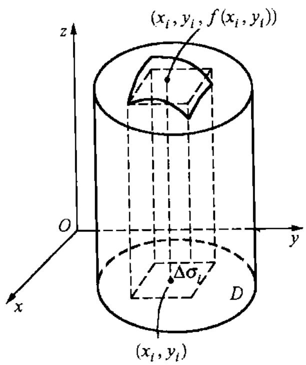

图 7.2

这是因为 $f(x_i,y_i)\Delta\sigma_i$ 表示 D_i 对应的小柱体的体积的近似值,而和数

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta\sigma_i$$

是整个柱体的体积的近似值. 随着分割的加细,上述和数越来越接近于体积的精确值,其极限自然就是体积.

上述例子指出了函数 $f(x,y)>0$ 时,二元函数 $f(x,y)$ 的二重积分的几何意义. 当 $z=f(x,y)$ 在 D 上连续,但有正有负时,其二重积分的几何意义是: 二重积分恰好是曲面 $z=f(x,y)$ 在 Oxy 坐标平面上方部分所对应的若干曲顶柱体的体积减去曲面在 Oxy 平面下方部分所对应的体积.

例 2 设 D 是一个平面的薄板,在一点 $(x,y)\in D$ 的面密度为 $\rho(x,y)$. 那么,二重积分

$$\iint\limits_D \rho(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

是薄板的质量. 事实上,若对区域 D 进行一个分割: $\{D_1,D_2,\cdots,D_n\}$,那么 D_i 的质量近似于

$$\rho(x_i,y_i)\Delta\sigma_i,$$

其中 $(x_i,y_i)\in D_i$. 于是整个薄板的质量就近似于

$$\sum_{i=1}^{n}\rho(x_i,y_i)\Delta\sigma_i,$$

当这种分割无限加细时,其极限则必定是薄板的质量.

究竟哪些二元函数是可积的呢?这里对此不作详细讨论,只是指出下列事实:**一个在有界闭区域上连续的二元函数是可积的**.更为一般地说,一个在有界闭区域上的分片有界连续函数是可积的.所谓分片有界连续函数,是指将原来的定义域分解成有限个小区域,而函数在每个小区域内是有界且连续的.

多元函数的可积性问题是较复杂的数学问题,它完全超出了本课程的基本要求.在现在这个教程中,关于重积分的讨论重点是如何计算的问题,而不是可积性问题.

2. 二重积分的性质

与定积分类似,可以证明二重积分有下列性质(我们假定这里所涉及的函数在有界闭区域 D 上是可积的):

(1) 常数因子可提到积分号之外:

$$\iint_D kf(x,y)\mathrm{d}\sigma = k\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \quad (k\text{ 为常数}).$$

(2) 函数的代数和的积分等于各函数的积分的代数和:

$$\iint_D [f(x,y)\pm g(x,y)]\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \pm \iint_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

(3) 积分对区域的可加性:

若区域 D 可分解为两个互不重叠的区域 D_1 与 D_2,且 f 在 D_1 与 D_2 上均可积,则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma + \iint_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

(4) 积分保持不等号的性质:

若函数 f 及 g 在 D 上满足不等式

$$f(x,y)\leqslant g(x,y),\quad \forall\ (x,y)\in D,$$

则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \leqslant \iint_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

特别地,由于 $-|f(x,y)|\leqslant f(x,y)\leqslant |f(x,y)|$,故由上式可推出

$$\left|\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\right| \leqslant \iint_D |f(x,y)|\mathrm{d}\sigma.$$

(5) 积分中值定理.

若函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，则在 D 上至少存在一点 (x_0,y_0)，使

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = f(x_0,y_0)\cdot S,$$

其中 S 为区域 D 的面积.

性质(1)～(4)可由二重积分的定义证明. 现证性质(5).

设 m,M 分别是 $f(x,y)$ 在 D 上的最小值与最大值，由性质(4)得

$$mS = \iint_D m\mathrm{d}\sigma \leqslant \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \leqslant \iint_D M\mathrm{d}\sigma = MS,$$

故
$$m \leqslant \frac{1}{S}\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \leqslant M.$$

由二元连续函数的介值定理(第六章§3 定理 6)，在 $\overline{D}$ 内至少有一点 (x_0,y_0)，使

$$f(x_0,y_0) = \frac{1}{S}\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

两边同乘 S，即得欲证之式.

习 题 7.1

1. 用二重积分表示上半椭球

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1,\quad z\geqslant 0$$

的体积，其中 a,b,c 为正的常数.

2. 设平面区域

$$D=\{(x,y)\mid -1\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1|\},$$

试由定义证明：

$$\iint_D x\mathrm{d}\sigma = 0.$$

3. 设函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，$g(x,y)$ 在 D 上非负，且 $g(x,y)$ 与 $f(x,y)g(x,y)$ 在 D 上可积. 证明：在 D 中存在一点 (x_0,y_0)，使

$$\iint_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}\sigma = f(x_0,y_0)\iint_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

4. 设函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续、非负，且 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$. 证明 $f(x,y)\equiv 0$，当 $(x,y)\in D$ 时.

§2　二重积分的计算

计算二重积分的基本方法是将二重积分的计算转化为连续地计算两个定积分,即计算累次积分.

1. 直角坐标系下的计算公式

设函数 $z=f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续,其中 D 由直线 $x=a, x=b\ (a<b)$ 及曲线 $y=\varphi_1(x), y=\varphi_2(x)\ (\varphi_1(x)\leqslant\varphi_2(x)$,当 $a\leqslant x\leqslant b$ 时)围成(见图 7.3). 这时 $f(x,y)$ 的二重积分可表成如下的镶嵌在一起的两个定积分

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x.$$

上式右端的内层积分是关于 y 的定积分,其中 x 视作常量,其上限与下限也依赖于 x. 整个内层积分是 x 的一个函数,而外层积分是关于这个函数的定积分.

上述公式右端的积分称为**累次积分**.

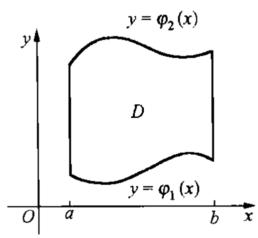

图　7.3

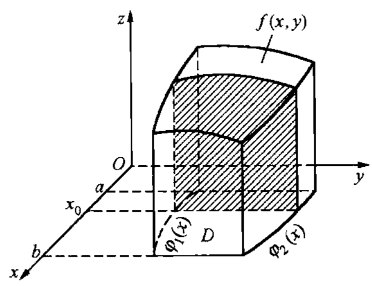

图　7.4

二重积分化为累次积分的计算公式,在某些特殊情况下可以从重积分的几何意义中看得十分清楚. 当 $f(x,y)$ 非负时,其二重积分表示以曲面 $z=f(x,y)$ 为顶,区域 D 为底的曲顶柱体的体积 V. 另一方面,我们也可用一个累次积分来表示这个体积. 事实上,用平面 $x=x_0$ 截曲顶柱体得一截面,此截面是一个曲边梯形(见图 7.4),曲边梯形之曲边的方程为 $z=f(x_0,y)$,而 y 的变化范围为 $\varphi_1(x_0)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x_0)$,故其面积可用一个定积分来表示为

$$A(x_0)=\int_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)}f(x_0,y)\mathrm{d}y.$$

同理对应于$[a,b]$上任一点 x 处的截面面积为

$$A(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y,$$

其中 y 是积分变量. 在积分过程中将 x 固定不变,积分结果与 x 有关.

又容易看出：当一曲顶柱体在 $x\in[a,b]$处的截面积为 $A(x)$时,则此立体的体积为

$$V=\int_a^b A(x)\mathrm{d}x.$$

这样,我们得到

$$V=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x,$$

因而有

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x.$$

这个公式不仅当 $f(x,y)\geqslant 0$ 时成立,而具有一般性. 下面给出一般性的结论而略去其证明.

定理 1　设函数 $f(x,y)$在闭区域 D 上连续,D 是由两直线 $x=a,x=b$ $(a<b)$及两连续曲线

$$y=\varphi_1(x),\quad y=\varphi_2(x)\quad (\varphi_1(x)<\varphi_2(x),a\leqslant x\leqslant b)$$

围成,则有公式

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x,\tag{7.1}$$

或写成

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y.\tag{7.2}$$

当闭区域 D 为矩形域 $R=\{a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d\}$时,我们的公式变成下列形式：

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y.\tag{7.3}$$

例 1　求二重积分

$$I=\iint_D\frac{y}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$.

解 利用公式(7.3),我们有

$$I=\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}dy=\int_0^1\left[\frac{-1}{(1+x^2+y^2)^{1/2}}\Big|_0^1\right]dx$$

$$=\int_0^1\left[\frac{1}{(1+x^2)^{1/2}}-\frac{1}{(2+x^2)^{1/2}}\right]dx$$

$$=\left[\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\ln\left(x+\sqrt{2+x^2}\right)\right]\Big|_0^1$$

$$=\ln\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}.$$

上述例子是最简单的情况,即积分区域是一个矩形,而这时相应的累次积分中的两个定积分的上限与下限都是常数.

例 2 求二重积分

$$I=\iint_D (x^3+xy)dxdy,$$

其中 D 是$\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1;x\leqslant y\leqslant 3x\}$.

解 首先,要画出区域 D 的图(见图 7.5).然后,确定累次积分中外层积分(对 x 的积分)的上限与下限.显然,在我们这个题目中,对 x 的上限为 1,下限为 0.最后来确定内层积分的上限与下限.对于任何固定的一个 x,$0\leqslant x\leqslant 1$,在 D 内的点(x,y)的坐标 y 的变化范围是 $x\leqslant y\leqslant 3x$.这样,内层积分(对 y 的积分)的上限为 $3x$,而其下限为 x.总之,我们有

$$I=\int_0^1 dx\int_x^{3x}(x^3+xy)dy$$

$$=\int_0^1\left[x^3(3x-x)+\frac{x}{2}y^2\Big|_x^{3x}\right]dx$$

$$=\int_0^1\left[2x^4+\frac{x}{2}(9x^2-x^2)\right]dx=\frac{7}{5}.$$

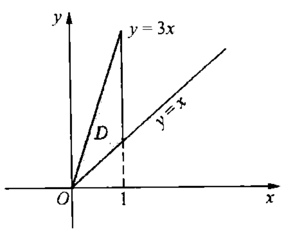

图 7.5

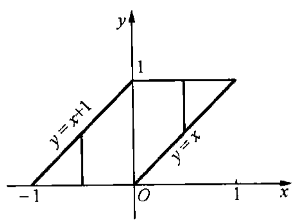

图 7.6